ROZUMOWANIE, ARGUMENTACJA, DOWÓD

Andrzej Indrzejczak

Katedra Logiki i Metodologii Nauk UŁ

Łódź, semestr letni 2008/2009

WYNIKANIE

Ważniejsze koncepcje wynikania:

WYNIKANIE

Ważniejsze koncepcje wynikania:

- Średniowieczne teorie konsekwencji

WYNIKANIE

Ważniejsze koncepcje wynikania:

- Średniowieczne teorie konsekwencji
- Teoria relacji dedukowalności Bolzano

WYNIKANIE

Ważniejsze koncepcje wynikania:

- Średniowieczne teorie konsekwencji
- Teoria relacji dedukowalności Bolzano
- Operacja konsekwencji Tarskiego

WYNIKANIE

Ważniejsze koncepcje wynikania:

- Średniowieczne teorie konsekwencji
- Teoria relacji dedukowalności Bolzano
- Operacja konsekwencji Tarskiego
- Relacja konsekwencji Scotta

WYNIKANIE

Własności strukturalne operacji konsekwencji $Cn : \mathcal{P}(FOR) \longrightarrow \mathcal{P}(FOR)$:

WYNIKANIE

Własności strukturalne operacji konsekwencji $Cn : \mathcal{P}(FOR) \longrightarrow \mathcal{P}(FOR)$:

- (ZWR) $\Gamma \subseteq Cn(\Gamma)$

WYNIKANIE

Własności strukturalne operacji konsekwencji $Cn : \mathcal{P}(FOR) \longrightarrow \mathcal{P}(FOR)$:

- (ZWR) $\Gamma \subseteq Cn(\Gamma)$
- (MON) $\Gamma \subseteq \Delta \Rightarrow Cn(\Gamma) \subseteq Cn(\Delta)$

WYNIKANIE

Własności strukturalne operacji konsekwencji $Cn : \mathcal{P}(FOR) \longrightarrow \mathcal{P}(FOR)$:

- (ZWR) $\Gamma \subseteq Cn(\Gamma)$
- (MON) $\Gamma \subseteq \Delta \Rightarrow Cn(\Gamma) \subseteq Cn(\Delta)$
- (TR) $Cn(Cn(\Gamma)) \subseteq Cn(\Gamma)$

WYNIKANIE

Własności strukturalne operacji konsekwencji $Cn : \mathcal{P}(FOR) \longrightarrow \mathcal{P}(FOR)$:

- (ZWR) $\Gamma \subseteq Cn(\Gamma)$
- (MON) $\Gamma \subseteq \Delta \Rightarrow Cn(\Gamma) \subseteq Cn(\Delta)$
- (TR) $Cn(Cn(\Gamma)) \subseteq Cn(\Gamma)$

lub (poprzez $\Gamma \models \varphi \ := \ \varphi \in Cn(\Gamma)$)

WYNIKANIE

Własności strukturalne operacji konsekwencji $Cn : \mathcal{P}(FOR) \longrightarrow \mathcal{P}(FOR)$:

- (ZWR) $\Gamma \subseteq Cn(\Gamma)$
- (MON) $\Gamma \subseteq \Delta \Rightarrow Cn(\Gamma) \subseteq Cn(\Delta)$
- (TR) $Cn(Cn(\Gamma)) \subseteq Cn(\Gamma)$

lub (poprzez $\Gamma \models \varphi \ := \ \varphi \in Cn(\Gamma)$)

Własności relacji wynikania $\models \subseteq \mathcal{P}(FOR) \times FOR$:

WYNIKANIE

Własności strukturalne operacji konsekwencji $Cn : \mathcal{P}(FOR) \longrightarrow \mathcal{P}(FOR)$:

- (ZWR) $\Gamma \subseteq Cn(\Gamma)$
- (MON) $\Gamma \subseteq \Delta \Rightarrow Cn(\Gamma) \subseteq Cn(\Delta)$
- (TR) $Cn(Cn(\Gamma)) \subseteq Cn(\Gamma)$

lub (poprzez $\Gamma \models \varphi \ := \ \varphi \in Cn(\Gamma)$)

Własności relacji wynikania $\models \subseteq \mathcal{P}(FOR) \times FOR$:

- (ZWR) $\varphi \models \varphi$

WYNIKANIE

Własności strukturalne operacji konsekwencji $Cn : \mathcal{P}(FOR) \longrightarrow \mathcal{P}(FOR)$:

- (ZWR) $\Gamma \subseteq Cn(\Gamma)$
- (MON) $\Gamma \subseteq \Delta \Rightarrow Cn(\Gamma) \subseteq Cn(\Delta)$
- (TR) $Cn(Cn(\Gamma)) \subseteq Cn(\Gamma)$

lub (poprzez $\Gamma \models \varphi \ := \ \varphi \in Cn(\Gamma)$)

Własności relacji wynikania $\models \subseteq \mathcal{P}(FOR) \times FOR$:

- (ZWR) $\varphi \models \varphi$
- (MON) $\Gamma \models \varphi \Rightarrow \Gamma, \psi \models \varphi$

WYNIKANIE

Własności strukturalne operacji konsekwencji $Cn : \mathcal{P}(FOR) \longrightarrow \mathcal{P}(FOR)$:

- (ZWR) $\Gamma \subseteq Cn(\Gamma)$
- (MON) $\Gamma \subseteq \Delta \Rightarrow Cn(\Gamma) \subseteq Cn(\Delta)$
- (TR) $Cn(Cn(\Gamma)) \subseteq Cn(\Gamma)$

lub (poprzez $\Gamma \models \varphi \ := \ \varphi \in Cn(\Gamma)$)

Własności relacji wynikania $\models \subseteq \mathcal{P}(FOR) \times FOR$:

- (ZWR) $\varphi \models \varphi$
- (MON) $\Gamma \models \varphi \Rightarrow \Gamma, \psi \models \varphi$
- (TR) $\Gamma \models \varphi \ \& \ \varphi, \Gamma \models \psi \Rightarrow \Gamma \models \psi$

WYNIKANIE

Charakterystyka stałych logicznych w teorii operacji konsekwencji:

WYNIKANIE

Charakterystyka stałych logicznych w teorii operacji konsekwencji:

- $(\neg)$ $\varphi \in Cn(\Gamma) \Leftrightarrow Cn(\Gamma \cup \{\neg\varphi\}) = FOR$

WYNIKANIE

Charakterystyka stałych logicznych w teorii operacji konsekwencji:

- $(\neg)$ $\varphi \in Cn(\Gamma) \Leftrightarrow Cn(\Gamma \cup \{\neg\varphi\}) = FOR$
- $(\wedge)$ $Cn(\{\varphi, \psi\}) = Cn(\{\varphi \wedge \psi\})$

WYNIKANIE

Charakterystyka stałych logicznych w teorii operacji konsekwencji:

- $(\neg)$ $\varphi \in Cn(\Gamma) \Leftrightarrow Cn(\Gamma \cup \{\neg\varphi\}) = FOR$
- $(\wedge)$ $Cn(\{\varphi, \psi\}) = Cn(\{\varphi \wedge \psi\})$
- $(\vee)$ $Cn(\{\varphi\}) \cap Cn(\{\psi\}) = Cn(\{\varphi \vee \psi\})$

WYNIKANIE

Charakterystyka stałych logicznych w teorii operacji konsekwencji:

- $(\neg)$ $\varphi \in Cn(\Gamma) \Leftrightarrow Cn(\Gamma \cup \{\neg\varphi\}) = FOR$
- $(\wedge)$ $Cn(\{\varphi, \psi\}) = Cn(\{\varphi \wedge \psi\})$
- $(\vee)$ $Cn(\{\varphi\}) \cap Cn(\{\psi\}) = Cn(\{\varphi \vee \psi\})$
- $(\rightarrow)$ $\psi \in Cn(\Gamma \cup \{\varphi\}) \Leftrightarrow \varphi \rightarrow \psi \in Cn(\Gamma)$

WYNIKANIE

Charakterystyka stałych logicznych w teorii operacji konsekwencji:

- $(\neg)$ $\varphi \in Cn(\Gamma) \Leftrightarrow Cn(\Gamma \cup \{\neg\varphi\}) = FOR$
- $(\wedge)$ $Cn(\{\varphi, \psi\}) = Cn(\{\varphi \wedge \psi\})$
- $(\vee)$ $Cn(\{\varphi\}) \cap Cn(\{\psi\}) = Cn(\{\varphi \vee \psi\})$
- $(\rightarrow)$ $\psi \in Cn(\Gamma \cup \{\varphi\}) \Leftrightarrow \varphi \rightarrow \psi \in Cn(\Gamma)$

lub

WYNIKANIE

Charakterystyka stałych logicznych w teorii operacji konsekwencji:

- $(\neg)$ $\varphi \in Cn(\Gamma) \Leftrightarrow Cn(\Gamma \cup \{\neg\varphi\}) = FOR$
- $(\wedge)$ $Cn(\{\varphi, \psi\}) = Cn(\{\varphi \wedge \psi\})$
- $(\vee)$ $Cn(\{\varphi\}) \cap Cn(\{\psi\}) = Cn(\{\varphi \vee \psi\})$
- $(\rightarrow)$ $\psi \in Cn(\Gamma \cup \{\varphi\}) \Leftrightarrow \varphi \rightarrow \psi \in Cn(\Gamma)$

lub

Charakterystyka relacyjna:

WYNIKANIE

Charakterystyka stałych logicznych w teorii operacji konsekwencji:

- $(\neg)$ $\varphi \in Cn(\Gamma) \Leftrightarrow Cn(\Gamma \cup \{\neg\varphi\}) = FOR$
- $(\wedge)$ $Cn(\{\varphi, \psi\}) = Cn(\{\varphi \wedge \psi\})$
- $(\vee)$ $Cn(\{\varphi\}) \cap Cn(\{\psi\}) = Cn(\{\varphi \vee \psi\})$
- $(\rightarrow)$ $\psi \in Cn(\Gamma \cup \{\varphi\}) \Leftrightarrow \varphi \rightarrow \psi \in Cn(\Gamma)$

lub

Charakterystyka relacyjna:

- $(\neg)$ $\Gamma \models \varphi \Leftrightarrow \Gamma, \neg\varphi \models$

WYNIKANIE

Charakterystyka stałych logicznych w teorii operacji konsekwencji:

- $(\neg)$ $\varphi \in Cn(\Gamma) \Leftrightarrow Cn(\Gamma \cup \{\neg\varphi\}) = FOR$
- $(\wedge)$ $Cn(\{\varphi, \psi\}) = Cn(\{\varphi \wedge \psi\})$
- $(\vee)$ $Cn(\{\varphi\}) \cap Cn(\{\psi\}) = Cn(\{\varphi \vee \psi\})$
- $(\rightarrow)$ $\psi \in Cn(\Gamma \cup \{\varphi\}) \Leftrightarrow \varphi \rightarrow \psi \in Cn(\Gamma)$

lub

Charakterystyka relacyjna:

- $(\neg)$ $\Gamma \models \varphi \Leftrightarrow \Gamma, \neg\varphi \models$
- $(\wedge)$ $\varphi, \psi \models \gamma \Leftrightarrow \varphi \wedge \psi \models \gamma$

WYNIKANIE

Charakterystyka stałych logicznych w teorii operacji konsekwencji:

- $(\neg)$ $\varphi \in Cn(\Gamma) \Leftrightarrow Cn(\Gamma \cup \{\neg\varphi\}) = FOR$
- $(\wedge)$ $Cn(\{\varphi, \psi\}) = Cn(\{\varphi \wedge \psi\})$
- $(\vee)$ $Cn(\{\varphi\}) \cap Cn(\{\psi\}) = Cn(\{\varphi \vee \psi\})$
- $(\rightarrow)$ $\psi \in Cn(\Gamma \cup \{\varphi\}) \Leftrightarrow \varphi \rightarrow \psi \in Cn(\Gamma)$

lub

Charakterystyka relacyjna:

- $(\neg)$ $\Gamma \models \varphi \Leftrightarrow \Gamma, \neg\varphi \models$
- $(\wedge)$ $\varphi, \psi \models \gamma \Leftrightarrow \varphi \wedge \psi \models \gamma$
- $(\vee)$ $\Gamma, \varphi \models \gamma \;\&\; \Gamma, \psi \models \gamma \Leftrightarrow \Gamma, \varphi \vee \psi \models \gamma$

WYNIKANIE

Charakterystyka stałych logicznych w teorii operacji konsekwencji:

- $(\neg)$ $\varphi \in Cn(\Gamma) \Leftrightarrow Cn(\Gamma \cup \{\neg\varphi\}) = FOR$
- $(\wedge)$ $Cn(\{\varphi, \psi\}) = Cn(\{\varphi \wedge \psi\})$
- $(\vee)$ $Cn(\{\varphi\}) \cap Cn(\{\psi\}) = Cn(\{\varphi \vee \psi\})$
- $(\rightarrow)$ $\psi \in Cn(\Gamma \cup \{\varphi\}) \Leftrightarrow \varphi \rightarrow \psi \in Cn(\Gamma)$

lub

Charakterystyka relacyjna:

- $(\neg)$ $\Gamma \models \varphi \Leftrightarrow \Gamma, \neg\varphi \models$
- $(\wedge)$ $\varphi, \psi \models \gamma \Leftrightarrow \varphi \wedge \psi \models \gamma$
- $(\vee)$ $\Gamma, \varphi \models \gamma \;\&\; \Gamma, \psi \models \gamma \Leftrightarrow \Gamma, \varphi \vee \psi \models \gamma$
- $(\rightarrow)$ $\Gamma, \varphi \models \psi \Leftrightarrow \Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$

WYNIKANIE

Relacja konsekwencji Scotta $\models \subseteq \mathcal{P}(FOR) \times \mathcal{P}(FOR)$:

WYNIKANIE

Relacja konsekwencji Scotta $\models \subseteq \mathcal{P}(FOR) \times \mathcal{P}(FOR)$:

- (ZWR) $\varphi \models \varphi$

WYNIKANIE

Relacja konsekwencji Scotta $\models \subseteq \mathcal{P}(FOR) \times \mathcal{P}(FOR)$:

- (ZWR) $\varphi \models \varphi$
- (MON) $\Gamma \subseteq \Gamma'$ & $\Delta \subseteq \Delta'$ & $\Gamma \models \Delta \Rightarrow \Gamma' \models \Delta'$

WYNIKANIE

Relacja konsekwencji Scotta $\models \subseteq \mathcal{P}(FOR) \times \mathcal{P}(FOR)$:

- (ZWR) $\varphi \models \varphi$
- (MON) $\Gamma \subseteq \Gamma'$ & $\Delta \subseteq \Delta'$ & $\Gamma \models \Delta \Rightarrow \Gamma' \models \Delta'$
- (TR) $\Gamma \models \Delta, \varphi$ & $\varphi, \Gamma \models \Delta \Rightarrow \Gamma \models \Delta$

WYNIKANIE

Relacja konsekwencji Scotta $\models \subseteq \mathcal{P}(FOR) \times \mathcal{P}(FOR)$:

- (ZWR) $\varphi \models \varphi$
- (MON) $\Gamma \subseteq \Gamma'$ & $\Delta \subseteq \Delta'$ & $\Gamma \models \Delta \Rightarrow \Gamma' \models \Delta'$
- (TR) $\Gamma \models \Delta, \varphi$ & $\varphi, \Gamma \models \Delta \Rightarrow \Gamma \models \Delta$
- ($\neg$) $\models \varphi, \neg\varphi$, oraz

WYNIKANIE

Relacja konsekwencji Scotta $\models \subseteq \mathcal{P}(FOR) \times \mathcal{P}(FOR)$:

- (ZWR) $\varphi \models \varphi$
- (MON) $\Gamma \subseteq \Gamma'$ & $\Delta \subseteq \Delta'$ & $\Gamma \models \Delta \Rightarrow \Gamma' \models \Delta'$
- (TR) $\Gamma \models \Delta, \varphi$ & $\varphi, \Gamma \models \Delta \Rightarrow \Gamma \models \Delta$
- $(\neg)$ $\models \varphi, \neg\varphi$, oraz $\varphi, \neg\varphi \models$

WYNIKANIE

Relacja konsekwencji Scotta $\models \subseteq \mathcal{P}(FOR) \times \mathcal{P}(FOR)$:

- (ZWR) $\varphi \models \varphi$
- (MON) $\Gamma \subseteq \Gamma'$ & $\Delta \subseteq \Delta'$ & $\Gamma \models \Delta \Rightarrow \Gamma' \models \Delta'$
- (TR) $\Gamma \models \Delta, \varphi$ & $\varphi, \Gamma \models \Delta \Rightarrow \Gamma \models \Delta$
- ($\neg$) $\models \varphi, \neg\varphi$, oraz $\varphi, \neg\varphi \models$
- ($\wedge$) $\Gamma, \varphi, \psi \models \Delta \Leftrightarrow \Gamma, \varphi \wedge \psi \models \Delta$

WYNIKANIE

Relacja konsekwencji Scotta $\models \subseteq \mathcal{P}(FOR) \times \mathcal{P}(FOR)$:

- (ZWR) $\varphi \models \varphi$
- (MON) $\Gamma \subseteq \Gamma'$ & $\Delta \subseteq \Delta'$ & $\Gamma \models \Delta \Rightarrow \Gamma' \models \Delta'$
- (TR) $\Gamma \models \Delta, \varphi$ & $\varphi, \Gamma \models \Delta \Rightarrow \Gamma \models \Delta$
- ($\neg$) $\models \varphi, \neg\varphi$, oraz $\varphi, \neg\varphi \models$
- ($\wedge$) $\Gamma, \varphi, \psi \models \Delta \Leftrightarrow \Gamma, \varphi \wedge \psi \models \Delta$
- ($\vee$) $\Gamma \models \Delta, \varphi, \psi \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \varphi \vee \psi$

WYNIKANIE

Relacja konsekwencji Scotta $\models \subseteq \mathcal{P}(FOR) \times \mathcal{P}(FOR)$:

- (ZWR) $\varphi \models \varphi$
- (MON) $\Gamma \subseteq \Gamma'$ & $\Delta \subseteq \Delta'$ & $\Gamma \models \Delta \Rightarrow \Gamma' \models \Delta'$
- (TR) $\Gamma \models \Delta, \varphi$ & $\varphi, \Gamma \models \Delta \Rightarrow \Gamma \models \Delta$
- $(\neg)$ $\models \varphi, \neg\varphi$, oraz $\varphi, \neg\varphi \models$
- $(\wedge)$ $\Gamma, \varphi, \psi \models \Delta \Leftrightarrow \Gamma, \varphi \wedge \psi \models \Delta$
- $(\vee)$ $\Gamma \models \Delta, \varphi, \psi \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \varphi \vee \psi$
- $(\rightarrow)$ $\Gamma, \varphi \models \Delta, \psi \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \varphi \rightarrow \psi$

SYSTEMY DEDUKCYJNE

Jak scharakteryzować syntaktycznie relację konsekwencji?

SYSTEMY DEDUKCYJNE

Jak scharakteryzować syntaktycznie relację konsekwencji?

Ważniejsze typy systemów:

- Systemy aksjomatyczne (Hilbertowskie) – AX

SYSTEMY DEDUKCYJNE

Jak scharakteryzować syntaktycznie relację konsekwencji?

Ważniejsze typy systemów:

- Systemy aksjomatyczne (Hilbertowskie) – AX
- Dedukcja naturalna – DN

SYSTEMY DEDUKCYJNE

Jak scharakteryzować syntaktycznie relację konsekwencji?

Ważniejsze typy systemów:

- Systemy aksjomatyczne (Hilbertowskie) – AX
- Dedukcja naturalna – DN
- Rachunki sekwentów – RS

SYSTEMY DEDUKCYJNE

Jak scharakteryzować syntaktycznie relację konsekwencji?

Ważniejsze typy systemów:

- Systemy aksjomatyczne (Hilbertowskie) – AX
- Dedukcja naturalna – DN
- Rachunki sekwentów – RS
- Systemy tablicowe – TAB

SYSTEMY DEDUKCYJNE

Jak scharakteryzować syntaktycznie relację konsekwencji?

Ważniejsze typy systemów:

- Systemy aksjomatyczne (Hilbertowskie) – AX
- Dedukcja naturalna – DN
- Rachunki sekwentów – RS
- Systemy tablicowe – TAB
- Rezolucja – REZ

SYSTEMY DEDUKCYJNE

Jak scharakteryzować syntaktycznie relację konsekwencji?

Ważniejsze typy systemów:

- Systemy aksjomatyczne (Hilbertowskie) – AX
- Dedukcja naturalna – DN
- Rachunki sekwentów – RS
- Systemy tablicowe – TAB
- Rezolucja – REZ
- Koneksja – KON

SYSTEMY DEDUKCYJNE

Jak scharakteryzować syntaktycznie relację konsekwencji?

Ważniejsze typy systemów:

- Systemy aksjomatyczne (Hilbertowskie) – AX
- Dedukcja naturalna – DN
- Rachunki sekwentów – RS
- Systemy tablicowe – TAB
- Rezolucja – REZ
- Koneksja – KON
- Systemy odrzuceniowe – REF

SYSTEMY AKSJOMATYCZNE

1884 Frege – aksjomatyzacja KRZ

SYSTEMY AKSJOMATYCZNE

1884 Frege – aksjomatyzacja KRZ

1913 Russell, Whitehead – aksjomatyzacja KRK

SYSTEMY AKSJOMATYCZNE

1884 Frege – aksjomatyzacja KRZ

1913 Russell, Whitehead – aksjomatyzacja KRK

Struktura systemu:

SYSTEMY AKSJOMATYCZNE

1884 Frege – aksjomatyzacja KRZ
1913 Russell, Whitehead – aksjomatyzacja KRK

Struktura systemu:

- Aksjomaty

SYSTEMY AKSJOMATYCZNE

1884 Frege – aksjomatyzacja KRZ
1913 Russell, Whitehead – aksjomatyzacja KRK

Struktura systemu:

- Aksjomaty
- Reguły dowodzenia

SYSTEMY AKSJOMATYCZNE

1884 Frege – aksjomatyzacja KRZ

1913 Russell, Whitehead – aksjomatyzacja KRK

Struktura systemu:

- Aksjomaty
- Reguły dowodzenia
- Definicja dowodu, tezy, relacji dowiedlności

SYSTEMY AKSJOMATYCZNE

Przykładowa aksjomatyka KRZ:

SYSTEMY AKSJOMATYCZNE

Przykładowa aksjomatyka KRZ:

1 $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$

2 $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$

3 $\varphi \wedge \psi \rightarrow \varphi; \qquad \varphi \wedge \psi \rightarrow \psi$

4 $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi \wedge \psi)$

5 $\varphi \rightarrow \varphi \vee \psi; \qquad \psi \rightarrow \varphi \vee \psi$

6 $(\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \vee \psi \rightarrow \chi))$

7 $(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$

SYSTEMY AKSJOMATYCZNE

Aksjomaty dla kwantyfikatorów i identyczności:

SYSTEMY AKSJOMATYCZNE

Aksjomaty dla kwantyfikatorów i identyczności:

$(\forall E)$ $\quad \forall x\varphi \rightarrow \varphi[x/\tau]$

$(\exists D)$ $\quad \varphi[x/\tau] \rightarrow \exists x\varphi$

(ID) $\quad \forall x(x = x)$

(LL) $\quad \forall x, y(x = y \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi[x//y]))$,
gdzie φ jest formułą atomową

SYSTEMY AKSJOMATYCZNE

Reguły pierwotne:

SYSTEMY AKSJOMATYCZNE

Reguły pierwotne:

(*MP*) $\varphi \rightarrow \psi, \varphi \ / \ \psi$

SYSTEMY AKSJOMATYCZNE

Reguły pierwotne:

(MP) $\varphi \rightarrow \psi, \varphi \ / \ \psi$

$(\forall D)$ $\varphi \rightarrow \psi[x/\tau] \ / \ \varphi \rightarrow \forall x\psi$, gdzie τ nie występuje lub nie jest wolną zmienną w φ, ψ

SYSTEMY AKSJOMATYCZNE

Reguły pierwotne:

(MP) $\varphi \to \psi, \varphi \; / \; \psi$

$(\forall D)$ $\varphi \to \psi[x/\tau] \; / \; \varphi \to \forall x\psi$, gdzie τ nie występuje lub nie jest wolną zmienną w φ, ψ

$(\exists E)$ $\varphi[x/\tau] \to \psi \; / \; \exists x\varphi \to \psi$, gdzie τ nie występuje lub nie jest wolną zmienną w φ, ψ

SYSTEMY AKSJOMATYCZNE

Dowód, teza, dowiedlność:

SYSTEMY AKSJOMATYCZNE

Dowód, teza, dowiedlność:

- Dowód φ to ciąg formuł, którego dowolny element jest aksjomatem lub został wyprowadzony z poprzednich elementów za pomocą reguł pierwotnych systemu, a ostatni element to φ.

SYSTEMY AKSJOMATYCZNE

Dowód, teza, dowiedlność:

- Dowód φ to ciąg formuł, którego dowolny element jest aksjomatem lub został wyprowadzony z poprzednich elementów za pomocą reguł pierwotnych systemu, a ostatni element to φ.
- $\vdash_S \varphi$ (φ jest tezą systemu S) wtw, istnieje dowód φ w systemie S.

SYSTEMY AKSJOMATYCZNE

Dowód, teza, dowiedlność:

- Dowód φ to ciąg formuł, którego dowolny element jest aksjomatem lub został wyprowadzony z poprzednich elementów za pomocą reguł pierwotnych systemu, a ostatni element to φ.
- $\vdash_S \varphi$ (φ jest tezą systemu S) wtw, istnieje dowód φ w systemie S.
- $\Gamma \vdash_S \varphi$ wtw:

SYSTEMY AKSJOMATYCZNE

Dowód, teza, dowiedlność:

- Dowód φ to ciąg formuł, którego dowolny element jest aksjomatem lub został wyprowadzony z poprzednich elementów za pomocą reguł pierwotnych systemu, a ostatni element to φ.
- $\vdash_S \varphi$ (φ jest tezą systemu S) wtw, istnieje dowód φ w systemie S.
- $\Gamma \vdash_S \varphi$ wtw:
  1. istnieje dowód φ, którego elementami są dodatkowo formuły z Γ

SYSTEMY AKSJOMATYCZNE

Dowód, teza, dowiedlność:

- Dowód φ to ciąg formuł, którego dowolny element jest aksjomatem lub został wyprowadzony z poprzednich elementów za pomocą reguł pierwotnych systemu, a ostatni element to φ.
- $\vdash_S \varphi$ (φ jest tezą systemu S) wtw, istnieje dowód φ w systemie S.
- $\Gamma \vdash_S \varphi$ wtw:
  1. istnieje dowód φ, którego elementami są dodatkowo formuły z Γ
  2. $\vdash_S \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n \rightarrow \varphi$ (gdzie $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \subseteq \Gamma$)

SYSTEMY AKSJOMATYCZNE

Dowód, teza, dowiedlność:

- Dowód φ to ciąg formuł, którego dowolny element jest aksjomatem lub został wyprowadzony z poprzednich elementów za pomocą reguł pierwotnych systemu, a ostatni element to φ.
- $\vdash_S \varphi$ (φ jest tezą systemu S) wtw, istnieje dowód φ w systemie S.
- $\Gamma \vdash_S \varphi$ wtw:
  1. istnieje dowód φ, którego elementami są dodatkowo formuły z Γ
  2. $\vdash_S \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n \rightarrow \varphi$ (gdzie $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \subseteq \Gamma$)

Uwaga! podane charakterystyki $\vdash_S$ generalnie nie są równoważne!

SYSTEMY AKSJOMATYCZNE

Przykład dowodu

SYSTEMY AKSJOMATYCZNE

Przykład dowodu

1	$p \rightarrow (p \rightarrow p)$	A1, $\varphi := p, \psi := p$
2	$p \rightarrow ((p \rightarrow p) \rightarrow p)$	A1, $\varphi := p, \psi := p \rightarrow p$
3	$(p \rightarrow ((p \rightarrow p) \rightarrow p)) \rightarrow$ $((p \rightarrow (p \rightarrow p)) \rightarrow (p \rightarrow p))$	A2, $\varphi := p, \psi := p \rightarrow p, \chi := p$
4	$(p \rightarrow (p \rightarrow p)) \rightarrow (p \rightarrow p)$	3, 2 MP
5	$p \rightarrow p$	4, 1 MP

SYSTEMY AKSJOMATYCZNE

Zalety i wady:

SYSTEMY AKSJOMATYCZNE

Zalety i wady:

- prosta struktura systemu ułatwia badania metalogiczne

SYSTEMY AKSJOMATYCZNE

Zalety i wady:

- prosta struktura systemu ułatwia badania metalogiczne
- dowodzenie tez w systemie trudne i nienaturalne;

SYSTEMY AKSJOMATYCZNE

Zalety i wady:

- prosta struktura systemu ułatwia badania metalogiczne
- dowodzenie tez w systemie trudne i nienaturalne; dowody długie;

SYSTEMY AKSJOMATYCZNE

Zalety i wady:

- prosta struktura systemu ułatwia badania metalogiczne
- dowodzenie tez w systemie trudne i nienaturalne; dowody długie; słabo nadaje się do automatyzacji

SYSTEMY AKSJOMATYCZNE

Zalety i wady:

- prosta struktura systemu ułatwia badania metalogiczne
- dowodzenie tez w systemie trudne i nienaturalne; dowody długie; słabo nadaje się do automatyzacji

Możliwe remedium:

SYSTEMY AKSJOMATYCZNE

Zalety i wady:

- prosta struktura systemu ułatwia badania metalogiczne
- dowodzenie tez w systemie trudne i nienaturalne; dowody długie; słabo nadaje się do automatyzacji

Możliwe remedium:
– wzbogacanie bazy o dodatkowe reguły wtórne

SYSTEMY AKSJOMATYCZNE

Zalety i wady:

- prosta struktura systemu ułatwia badania metalogiczne
- dowodzenie tez w systemie trudne i nienaturalne; dowody długie; słabo nadaje się do automatyzacji

Możliwe remedium:
– wzbogacanie bazy o dodatkowe reguły wtórne – 1928 dowód TD (Herbrand).

SYSTEMY AKSJOMATYCZNE

Zalety i wady:

- prosta struktura systemu ułatwia badania metalogiczne
- dowodzenie tez w systemie trudne i nienaturalne; dowody długie; słabo nadaje się do automatyzacji

Możliwe remedium:
– wzbogacanie bazy o dodatkowe reguły wtórne – 1928 dowód TD (Herbrand).
– konstrukcja wygodniejszych i naturalniejszych systemów dedukcyjnych.

OGÓLNA STRUKTURA SYSTEMU DEDUKCYJNEGO

Dowolny system dedukcyjny to dwa komponenty:

OGÓLNA STRUKTURA SYSTEMU DEDUKCYJNEGO

Dowolny system dedukcyjny to dwa komponenty:

- teoretyczny – rachunek

OGÓLNA STRUKTURA SYSTEMU DEDUKCYJNEGO

Dowolny system dedukcyjny to dwa komponenty:

- teoretyczny – rachunek
- praktyczny – realizacja

OGÓLNA STRUKTURA SYSTEMU DEDUKCYJNEGO

Rachunek to niepusty zbiór:

OGÓLNA STRUKTURA SYSTEMU DEDUKCYJNEGO

Rachunek to niepusty zbiór:

- sekwentów postaci $\Gamma \vdash \Delta$

OGÓLNA STRUKTURA SYSTEMU DEDUKCYJNEGO

Rachunek to niepusty zbiór:

- sekwentów postaci $\Gamma \vdash \Delta$
- reguł sekwentowych postaci: $\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \ldots., \Gamma_n \vdash \Delta_n \ / \ \Pi \vdash \Sigma$

OGÓLNA STRUKTURA SYSTEMU DEDUKCYJNEGO

Rachunek to niepusty zbiór:

- sekwentów postaci $\Gamma \vdash \Delta$
- reguł sekwentowych postaci: $\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \ldots., \Gamma_n \vdash \Delta_n \ / \ \Pi \vdash \Sigma$

Uwaga! zbiory Γ, Δ itp. mogą być puste.

OGÓLNA STRUKTURA SYSTEMU DEDUKCYJNEGO

Rachunek to niepusty zbiór:

- sekwentów postaci $\Gamma \vdash \Delta$
- reguł sekwentowych postaci: $\Gamma_1 \vdash \Delta_1, \ldots., \Gamma_n \vdash \Delta_n \ / \ \Pi \vdash \Sigma$

Uwaga! zbiory Γ, Δ itp. mogą być puste.
Przykładowo dowolny system aksjomatyczny składa się z sekwentów postaci $\varnothing \vdash \varphi$ (aksjomaty) i MP jako reguły sekwentowej.

OGÓLNA STRUKTURA SYSTEMU DEDUKCYJNEGO

Realizacja systemu to m.in.:

OGÓLNA STRUKTURA SYSTEMU DEDUKCYJNEGO

Realizacja systemu to m.in.:

- ustalenie formy reprezentacji dowodu (linearny – L-dowód, w postaci drzewa – T-dowód,...)

OGÓLNA STRUKTURA SYSTEMU DEDUKCYJNEGO

Realizacja systemu to m.in.:

- ustalenie formy reprezentacji dowodu (linearny – L-dowód, w postaci drzewa – T-dowód,...)
- ustalenie swoistych reguł realizacji dowodu (np. reguły inferencji, wprowadzania założeń, konstrukcji dowodu itp.)

OGÓLNA STRUKTURA SYSTEMU DEDUKCYJNEGO

Realizacja systemu to m.in.:

- ustalenie formy reprezentacji dowodu (linearny – L-dowód, w postaci drzewa – T-dowód,...)
- ustalenie swoistych reguł realizacji dowodu (np. reguły inferencji, wprowadzania założeń, konstrukcji dowodu itp.)
- ustalenie jakie obiekty podlegają przekształceniu za pomocą reguł realizacji dowodu (formuły – F-systemy, zbiory formuł, sekwenty – S-systemy,...)

SYSTEMY DN

Geneza DN

SYSTEMY DN

Geneza DN

1. Arystoteles? (spór Łukasiewicza z Corcoranem)

SYSTEMY DN

Geneza DN

1. Arystoteles? (spór Łukasiewicza z Corcoranem)
2. Stoicy? (dowody założeniowe)

SYSTEMY DN

Geneza DN

1. Arystoteles? (spór Łukasiewicza z Corcoranem)
2. Stoicy? (dowody założeniowe)
3. 1927 – pierwszy założeniowy system Jaśkowskiego (seminarium Łukasiewicza)

SYSTEMY DN

Geneza DN

1. Arystoteles? (spór Łukasiewicza z Corcoranem)
2. Stoicy? (dowody założeniowe)
3. 1927 – pierwszy założeniowy system Jaśkowskiego (seminarium Łukasiewicza)
4. 1929 – wprowadzenie sekwentów i T-dowodów przez Hertza

SYSTEMY DN

Geneza DN

1. Arystoteles? (spór Łukasiewicza z Corcoranem)
2. Stoicy? (dowody założeniowe)
3. 1927 – pierwszy założeniowy system Jaśkowskiego (seminarium Łukasiewicza)
4. 1929 – wprowadzenie sekwentów i T-dowodów przez Hertza
5. 1934 – publikacje Gentzena i Jaśkowskiego

SYSTEMY DN

Geneza DN

1. Arystoteles? (spór Łukasiewicza z Corcoranem)
2. Stoicy? (dowody założeniowe)
3. 1927 – pierwszy założeniowy system Jaśkowskiego (seminarium Łukasiewicza)
4. 1929 – wprowadzenie sekwentów i T-dowodów przez Hertza
5. 1934 – publikacje Gentzena i Jaśkowskiego
6. 1936 – sekwentowy system DN Gentzena

SYSTEMY DN

Geneza DN

1. Arystoteles? (spór Łukasiewicza z Corcoranem)
2. Stoicy? (dowody założeniowe)
3. 1927 – pierwszy założeniowy system Jaśkowskiego (seminarium Łukasiewicza)
4. 1929 – wprowadzenie sekwentów i T-dowodów przez Hertza
5. 1934 – publikacje Gentzena i Jaśkowskiego
6. 1936 – sekwentowy system DN Gentzena
7. lata 50-te i dalej – powstanie wielu zróżnicowanych systemów zaliczanych do DN

SYSTEMY DN

Kryteria dedukcji naturalnej

SYSTEMY DN

Kryteria dedukcji naturalnej

1. W systemie DN można wprowadzać i eliminować dowolne założenia do dowodu.

SYSTEMY DN

Kryteria dedukcji naturalnej

1. W systemie DN można wprowadzać i eliminować dowolne założenia do dowodu.
2. Dopuszczalne są różne metody konstrukcji dowodu (założeniowe, nie wprost, ...), w przeciwieństwie do innych systemów dedukcyjnych.

SYSTEMY DN

Kryteria dedukcji naturalnej

1. W systemie DN można wprowadzać i eliminować dowolne założenia do dowodu.
2. Dopuszczalne są różne metody konstrukcji dowodu (założeniowe, nie wprost, ...), w przeciwieństwie do innych systemów dedukcyjnych.
3. Stałe logiczne są charakteryzowane raczej przez reguły pierwotne umożliwiające zarówno wprowadzanie formuł z tymi stałymi jako głównymi funktorami, jak i eliminowanie ich w dowodzie.

SYSTEMY DN JAŚKOWSKIEGO

Systemy DN Jaśkowskiego – rachunek:

SYSTEMY DN JAŚKOWSKIEGO

Systemy DN Jaśkowskiego – rachunek:

$(\rightarrow E)$	$\varphi, \varphi \rightarrow \psi \vdash \psi$
$[\rightarrow D]$	$\Gamma, \varphi \vdash \psi \;/\; \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$
$[\neg E]$	$\Gamma, \neg\varphi \vdash \bot \;/\; \Gamma \vdash \varphi$

SYSTEMY DN JAŚKOWSKIEGO

Systemy DN Jaśkowskiego – rachunek:

$(\rightarrow E) \quad \varphi, \varphi \rightarrow \psi \vdash \psi$

$[\rightarrow D] \quad \Gamma, \varphi \vdash \psi \ / \ \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$

$[\neg E] \quad \Gamma, \neg\varphi \vdash \bot \ / \ \Gamma \vdash \varphi$

Jaśkowski rozważał też reguły dla koniunkcji:

SYSTEMY DN JAŚKOWSKIEGO

Systemy DN Jaśkowskiego – rachunek:

$(\rightarrow E)$ $\varphi, \varphi \rightarrow \psi \vdash \psi$
$[\rightarrow D]$ $\Gamma, \varphi \vdash \psi \ / \ \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$
$[\neg E]$ $\Gamma, \neg\varphi \vdash \bot \ / \ \Gamma \vdash \varphi$

Jaśkowski rozważał też reguły dla koniunkcji:

$(\wedge D)$ $\varphi, \psi \vdash \varphi \wedge \psi$
$(\wedge E)$ $\varphi \wedge \psi \vdash \varphi$ i $\varphi \wedge \psi \vdash \psi$

SYSTEMY DN JAŚKOWSKIEGO

Systemy DN Jaśkowskiego – realizacja:

SYSTEMY DN JAŚKOWSKIEGO

Systemy DN Jaśkowskiego – realizacja:

Jaśkowski używał:

SYSTEMY DN JAŚKOWSKIEGO

Systemy DN Jaśkowskiego – realizacja:

Jaśkowski używał:

- formuł (F-system – sekwenty jako reguły inferencji, reguły sekwentowe jako reguły konstrukcji dowodu)

SYSTEMY DN JAŚKOWSKIEGO

Systemy DN Jaśkowskiego – realizacja:

Jaśkowski używał:

- formuł (F-system – sekwenty jako reguły inferencji, reguły sekwentowe jako reguły konstrukcji dowodu)
- linearnej reprezentacji dowodu (L-system)

SYSTEMY DN JAŚKOWSKIEGO

Systemy DN Jaśkowskiego – realizacja:

Jaśkowski używał:

- formuł (F-system – sekwenty jako reguły inferencji, reguły sekwentowe jako reguły konstrukcji dowodu)
- linearnej reprezentacji dowodu (L-system)
- reguły nieograniczonego dołączania założeń do dowodu

SYSTEMY DN JAŚKOWSKIEGO

Systemy DN Jaśkowskiego – realizacja:

Jaśkowski używał:

- formuł (F-system – sekwenty jako reguły inferencji, reguły sekwentowe jako reguły konstrukcji dowodu)
- linearnej reprezentacji dowodu (L-system)
- reguły nieograniczonego dołączania założeń do dowodu
- reguły repetycji dowolnej formuły.

SYSTEMY DN JAŚKOWSKIEGO

Systemy DN Jaśkowskiego – realizacja:

Jaśkowski używał:

- formuł (F-system – sekwenty jako reguły inferencji, reguły sekwentowe jako reguły konstrukcji dowodu)
- linearnej reprezentacji dowodu (L-system)
- reguły nieograniczonego dołączania założeń do dowodu
- reguły repetycji dowolnej formuły.

Uwaga! Bez zastosowania dodatkowych środków może to prowadzić do problemów.

SYSTEMY DN JAŚKOWSKIEGO

Systemy DN Jaśkowskiego – realizacja:

SYSTEMY DN JAŚKOWSKIEGO

Systemy DN Jaśkowskiego – realizacja:

Przykład "dowodu":

SYSTEMY DN JAŚKOWSKIEGO

Systemy DN Jaśkowskiego – realizacja:

Przykład "dowodu":

1	p	z

SYSTEMY DN JAŚKOWSKIEGO

Systemy DN Jaśkowskiego – realizacja:

Przykład "dowodu":

1	p	z
2	q	z

SYSTEMY DN JAŚKOWSKIEGO

Systemy DN Jaśkowskiego – realizacja:

Przykład "dowodu":

1	p	z
2	q	z
3	p	1, rep.

SYSTEMY DN JAŚKOWSKIEGO

Systemy DN Jaśkowskiego – realizacja:

Przykład "dowodu":

1	p	z
2	q	z
3	p	1, rep.
4	$q \rightarrow p$	2-3, $\rightarrow D$

SYSTEMY DN JAŚKOWSKIEGO

Systemy DN Jaśkowskiego – realizacja:

Przykład "dowodu":

1	p	z
2	q	z
3	p	1, rep.
4	$q \rightarrow p$	2-3, $\rightarrow D$
5	$p \rightarrow (q \rightarrow p)$	1-4, $\rightarrow D$

SYSTEMY DN JAŚKOWSKIEGO

Systemy DN Jaśkowskiego – realizacja:

Przykład "dowodu":

1	p	z
2	q	z
3	p	1, rep.
4	$q \rightarrow p$	2-3, $\rightarrow D$
5	$p \rightarrow (q \rightarrow p)$	1-4, $\rightarrow D$
6	$(p \rightarrow (q \rightarrow p)) \wedge p$	5, 3 $\wedge D*$

$*$ – błędne zastosowanie reguły

SYSTEMY DN JAŚKOWSKIEGO

Jak uniknąć takich problemów?

SYSTEMY DN JAŚKOWSKIEGO

Jak uniknąć takich problemów?

Należy zastosować dodatkowe środki do zaznaczenia zasięgu aktywnych założeń dodatkowych.

SYSTEMY DN JAŚKOWSKIEGO

Jak uniknąć takich problemów?

Należy zastosować dodatkowe środki do zaznaczenia zasięgu aktywnych założeń dodatkowych.

- Pierwsze rozwiązanie Jaśkowskiego (1927) – zastosowanie zanurzanych prostokątów

SYSTEMY DN JAŚKOWSKIEGO

Jak uniknąć takich problemów?

Należy zastosować dodatkowe środki do zaznaczenia zasięgu aktywnych założeń dodatkowych.

- Pierwsze rozwiązanie Jaśkowskiego (1927) – zastosowanie zanurzanych prostokątów
- Drugie rozwiązanie Jaśkowskiego (1934) – zastosowanie prefiksów (zarzucenie F-systemu)

SYSTEMY DN JAŚKOWSKIEGO

Pierwszy system Jaśkowskiego – realizacja reguł sekwentowych:

SYSTEMY DN JAŚKOWSKIEGO

Pierwszy system Jaśkowskiego – realizacja reguł sekwentowych:

$$\begin{array}{l} \Gamma \\ \quad \boxed{\begin{array}{l} \varphi \\ \Gamma' \\ \vdots \\ \psi \end{array}} \\ \varphi \to \psi \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} \Gamma \\ \quad \boxed{\begin{array}{l} \neg\varphi \\ \Gamma' \\ \vdots \\ \bot \end{array}} \\ \varphi \end{array}$$

SYSTEMY DN JAŚKOWSKIEGO

Pierwszy system Jaśkowskiego – realizacja reguł sekwentowych:

$$\begin{array}{l} \Gamma \\ \quad \boxed{\begin{array}{l} \varphi \\ \Gamma' \\ \vdots \\ \psi \end{array}} \\ \varphi \to \psi \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} \Gamma \\ \quad \boxed{\begin{array}{l} \neg\varphi \\ \Gamma' \\ \vdots \\ \bot \end{array}} \\ \varphi \end{array}$$

Repetycja dozwolona tylko do wewnętrznego prostokąta ($\Gamma' \subseteq \Gamma$)!

SYSTEMY DN JAŚKOWSKIEGO

Pierwszy system Jaśkowskiego – realizacja reguł sekwentowych:

$$\begin{array}{l} \Gamma \\ \quad \boxed{\begin{array}{l} \varphi \\ \Gamma' \\ \vdots \\ \psi \end{array}} \\ \varphi \longrightarrow \psi \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} \Gamma \\ \quad \boxed{\begin{array}{l} \neg\varphi \\ \Gamma' \\ \vdots \\ \bot \end{array}} \\ \varphi \end{array}$$

Repetycja dozwolona tylko do wewnętrznego prostokąta ($\Gamma' \subseteq \Gamma$)!
Koszta: Definicja dowodu się komplikuje

SYSTEMY DN JAŚKOWSKIEGO

Drugi system Jaśkowskiego – prefiksowane formuły:

SYSTEMY DN JAŚKOWSKIEGO

Drugi system Jaśkowskiego – prefiksowane formuły:

1. Prefiks to ciąg liczb naturalnych, który ma być zapisem zależności formuły od założeń.

SYSTEMY DN JAŚKOWSKIEGO

Drugi system Jaśkowskiego – prefiksowane formuły:

1. Prefiks to ciąg liczb naturalnych, który ma być zapisem zależności formuły od założeń. Teza to formuła z pustym prefiksem.

SYSTEMY DN JAŚKOWSKIEGO

Drugi system Jaśkowskiego – prefiksowane formuły:

1. Prefiks to ciąg liczb naturalnych, który ma być zapisem zależności formuły od założeń. Teza to formuła z pustym prefiksem.
2. Założenie φ wprowadzamy jako $\sigma.i.S\varphi$, gdzie σ to prefiks poprzedniej formuły w dowodzie, i to kolejna liczba naturalna, S oznacza założenie.

SYSTEMY DN JAŚKOWSKIEGO

Drugi system Jaśkowskiego – prefiksowane formuły:

1. Prefiks to ciąg liczb naturalnych, który ma być zapisem zależności formuły od założeń. Teza to formuła z pustym prefiksem.
2. Założenie φ wprowadzamy jako $\sigma.i.S\varphi$, gdzie σ to prefiks poprzedniej formuły w dowodzie, i to kolejna liczba naturalna, S oznacza założenie.
3. Zastosowanie reguły konstrukcji dowodu (zamknięcie poddowodu) wprowadza formułę z prefiksem σ, jeżeli formuła z poprzedniego wiersza miała prefiks $\sigma.i$

SYSTEMY DN JAŚKOWSKIEGO

Drugi system Jaśkowskiego – prefiksowane formuły:

1. Prefiks to ciąg liczb naturalnych, który ma być zapisem zależności formuły od założeń. Teza to formuła z pustym prefiksem.
2. Założenie φ wprowadzamy jako $\sigma.i.S\varphi$, gdzie σ to prefiks poprzedniej formuły w dowodzie, i to kolejna liczba naturalna, S oznacza założenie.
3. Zastosowanie reguły konstrukcji dowodu (zamknięcie poddowodu) wprowadza formułę z prefiksem σ, jeżeli formuła z poprzedniego wiersza miała prefiks $\sigma.i$
4. Zastosowanie reguły inferencji wprowadza formułę z prefiksem σ takim samym jak prefiks poprzedniej formuły i jest dozwolone tylko jeżeli prefiksy przesłanek są takie same lub identyczne z początkowym segmentem σ (repetycja zbędna)

SYSTEMY DN JAŚKOWSKIEGO

Drugi system Jaśkowskiego – realizacja reguł sekwentowych:

SYSTEMY DN JAŚKOWSKIEGO

Drugi system Jaśkowskiego – realizacja reguł sekwentowych:

$$
\begin{array}{ll}
1\gamma_1 & 1\gamma_1 \\
\vdots & \vdots \\
\sigma\gamma_n & \sigma\gamma_n \\
\sigma.iS\varphi & \sigma.iS\neg\varphi \\
\vdots & \vdots \\
\sigma.i\psi & \sigma.i\bot \\
\sigma\varphi \rightarrow \psi & \sigma\varphi
\end{array}
$$

SYSTEMY DN JAŚKOWSKIEGO

Przykład dowodu:

SYSTEMY DN JAŚKOWSKIEGO

Przykład dowodu:

1	p	*z.*
2	$\neg\neg\neg p$	*z.*
3	p	(1, *rep.*)
4	$\neg\neg p$	*z.*
5	$\neg\neg\neg p$	(2, *rep.*)
6	$\neg p$	$[4, 5, \neg E]$
7	$\neg\neg p$	$[3, 6, \neg E]$
8	$p \rightarrow \neg\neg p$	$[\rightarrow D]$

1	$1.Sp$	
2	$1.1.S\neg\neg\neg p$	
3	$1.1.1.S\neg\neg p$	
4	$1.1.\neg p$	$[2, 3, \neg E]$
5	$1.\neg\neg p$	$[1, 4, \neg E]$
6	$p \rightarrow \neg\neg p$	$[\rightarrow D]$

SYSTEMY DN JAŚKOWSKIEGO

Wpływ rozwiązań Jaśkowskiego na współczesne systemy DN:

SYSTEMY DN JAŚKOWSKIEGO

Wpływ rozwiązań Jaśkowskiego na współczesne systemy DN:

1. Słupecki/Borkowski – modyfikacja prefiksowanego systemu

SYSTEMY DN JAŚKOWSKIEGO

Wpływ rozwiązań Jaśkowskiego na współczesne systemy DN:

1. Słupecki/Borkowski – modyfikacja prefiksowanego systemu
2. większość stosowanych w praktyce systemów DN to modyfikacje pierwszego systemu, m.in:

SYSTEMY DN JAŚKOWSKIEGO

Wpływ rozwiązań Jaśkowskiego na współczesne systemy DN:

1. Słupecki/Borkowski – modyfikacja prefiksowanego systemu
2. większość stosowanych w praktyce systemów DN to modyfikacje pierwszego systemu, m.in:
    - 1952 – Fitch; pionowe linie zamiast prostokątów dla poddowodów

SYSTEMY DN JAŚKOWSKIEGO

Wpływ rozwiązań Jaśkowskiego na współczesne systemy DN:

1. Słupecki/Borkowski – modyfikacja prefiksowanego systemu
2. większość stosowanych w praktyce systemów DN to modyfikacje pierwszego systemu, m.in:
   - 1952 – Fitch; pionowe linie zamiast prostokątów dla poddowodów
   - 1954 – Copi; poddowody w nawiasach

SYSTEMY DN JAŚKOWSKIEGO

Wpływ rozwiązań Jaśkowskiego na współczesne systemy DN:

1. Słupecki/Borkowski – modyfikacja prefiksowanego systemu
2. większość stosowanych w praktyce systemów DN to modyfikacje pierwszego systemu, m.in:
   - 1952 – Fitch; pionowe linie zamiast prostokątów dla poddowodów
   - 1954 – Copi; poddowody w nawiasach
   - 1957 – Kalish/Montague; format Jaśkowskiego z dodanymi wierszami wskazującymi cel poddowodu

SYSTEMY DN JAŚKOWSKIEGO

System Kalisha/Montague – realizacja reguł sekwentowych:

SYSTEMY DN JAŚKOWSKIEGO

System Kalisha/Montague – realizacja reguł sekwentowych:

Γ
SHØW: $\varphi \to \psi$

$$\boxed{\begin{array}{l} \varphi \\ \Gamma' \\ \vdots \\ \psi \end{array}}$$

Γ
SHØW: φ

$$\boxed{\begin{array}{l} \neg\varphi \\ \Gamma' \\ \vdots \\ \bot \end{array}}$$

SYSTEMY DN GENTZENA

Pierwszy system DN Gentzena – rachunek:

SYSTEMY DN GENTZENA

Pierwszy system DN Gentzena – rachunek:

$(\rightarrow E)$ $\quad \varphi, \varphi \rightarrow \psi \vdash \psi$

$[\rightarrow D]$ $\quad \Gamma, \varphi \vdash \psi \; / \; \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$

SYSTEMY DN GENTZENA

Pierwszy system DN Gentzena – rachunek:

$(\rightarrow E)$	$\varphi, \varphi \rightarrow \psi \vdash \psi$
$[\rightarrow D]$	$\Gamma, \varphi \vdash \psi \ / \ \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$
$(\wedge D)$	$\varphi, \psi \vdash \varphi \wedge \psi$
$(\wedge E)$	$\varphi \wedge \psi \vdash \varphi$ i $\varphi \wedge \psi \vdash \psi$

SYSTEMY DN GENTZENA

Pierwszy system DN Gentzena – rachunek:

$(\rightarrow E)$	$\varphi, \varphi \rightarrow \psi \vdash \psi$
$[\rightarrow D]$	$\Gamma, \varphi \vdash \psi \ / \ \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$
$(\wedge D)$	$\varphi, \psi \vdash \varphi \wedge \psi$
$(\wedge E)$	$\varphi \wedge \psi \vdash \varphi$ i $\varphi \wedge \psi \vdash \psi$
$(\vee D)$	$\varphi \vdash \varphi \vee \psi$ i $\psi \vdash \varphi \vee \psi$
$[\vee E]$	$\Gamma, \varphi \vdash \chi; \ \Delta, \psi \vdash \chi \ / \ \Gamma, \Delta, \varphi \vee \psi \vdash \chi$

SYSTEMY DN GENTZENA

Pierwszy system DN Gentzena – rachunek:

$(\rightarrow E)$	$\varphi, \varphi \rightarrow \psi \vdash \psi$
$[\rightarrow D]$	$\Gamma, \varphi \vdash \psi \;/\; \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$
$(\wedge D)$	$\varphi, \psi \vdash \varphi \wedge \psi$
$(\wedge E)$	$\varphi \wedge \psi \vdash \varphi$ i $\varphi \wedge \psi \vdash \psi$
$(\vee D)$	$\varphi \vdash \varphi \vee \psi$ i $\psi \vdash \varphi \vee \psi$
$[\vee E]$	$\Gamma, \varphi \vdash \chi; \Delta, \psi \vdash \chi \;/\; \Gamma, \Delta, \varphi \vee \psi \vdash \chi$
$[\neg D]$	$\Gamma, \varphi \vdash \bot \;/\; \Gamma \vdash \neg\varphi$
$(\neg E)$	$\varphi, \neg\varphi \vdash \bot$ i $\bot \vdash \varphi$

SYSTEMY DN GENTZENA

Pierwszy system DN Gentzena – rachunek:

$(\rightarrow E)$	$\varphi, \varphi \rightarrow \psi \vdash \psi$
$[\rightarrow D]$	$\Gamma, \varphi \vdash \psi \ / \ \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$
$(\wedge D)$	$\varphi, \psi \vdash \varphi \wedge \psi$
$(\wedge E)$	$\varphi \wedge \psi \vdash \varphi$ i $\varphi \wedge \psi \vdash \psi$
$(\vee D)$	$\varphi \vdash \varphi \vee \psi$ i $\psi \vdash \varphi \vee \psi$
$[\vee E]$	$\Gamma, \varphi \vdash \chi; \ \Delta, \psi \vdash \chi \ / \ \Gamma, \Delta, \varphi \vee \psi \vdash \chi$
$[\neg D]$	$\Gamma, \varphi \vdash \bot \ / \ \Gamma \vdash \neg\varphi$
$(\neg E)$	$\varphi, \neg\varphi \vdash \bot$ i $\bot \vdash \varphi$
(EM)	$\vdash \neg\varphi \vee \varphi$ lub $(\neg\neg E)$ $\neg\neg\varphi \vdash \varphi$

SYSTEMY DN GENTZENA

Systemy DN Gentzena – realizacja:

SYSTEMY DN GENTZENA

Systemy DN Gentzena – realizacja:

Gentzen używał:

SYSTEMY DN GENTZENA

Systemy DN Gentzena – realizacja:

Gentzen używał:

- formuł (F-system – sekwenty jako reguły inferencji, reguły sekwentowe jako reguły konstrukcji dowodu)

SYSTEMY DN GENTZENA

Systemy DN Gentzena – realizacja:

Gentzen używał:

- formuł (F-system – sekwenty jako reguły inferencji, reguły sekwentowe jako reguły konstrukcji dowodu)
- reprezentacji dowodu jako drzewa (liście to założenia, korzeń to teza dowodzona) (T-system)

SYSTEMY DN GENTZENA

Systemy DN Gentzena – realizacja:

Gentzen używał:

- formuł (F-system – sekwenty jako reguły inferencji, reguły sekwentowe jako reguły konstrukcji dowodu)
- reprezentacji dowodu jako drzewa (liście to założenia, korzeń to teza dowodzona) (T-system)
- dla każdej stałej para reguł: dołączania i eliminacji

SYSTEMY DN GENTZENA

Systemy DN Gentzena – realizacja:

Gentzen używał:

- formuł (F-system – sekwenty jako reguły inferencji, reguły sekwentowe jako reguły konstrukcji dowodu)
- reprezentacji dowodu jako drzewa (liście to założenia, korzeń to teza dowodzona) (T-system)
- dla każdej stałej para reguł: dołączania i eliminacji

Podstawowa różnica: w L-systemach w dowodzie używamy formuł a w T-systemach używamy konkretnych wystąpień formuł (wszystkie przesłanki zastosowania danej reguły są podane explicite nad wnioskiem)

SYSTEMY DN GENTZENA

Przykład dowodu:

SYSTEMY DN GENTZENA

Przykład dowodu:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[p] \qquad [p \longrightarrow q]}{q} \qquad [q \longrightarrow r]}{r}}{p \longrightarrow r}}{(q \longrightarrow r) \longrightarrow (p \longrightarrow r)}}{(p \longrightarrow q) \longrightarrow ((q \longrightarrow r) \longrightarrow (p \longrightarrow r))}$$

SYSTEMY DN GENTZENA

Systemy DN Gentzena – realizacja:

SYSTEMY DN GENTZENA

Systemy DN Gentzena – realizacja:

Zalety T-systemu DN Gentzena:

SYSTEMY DN GENTZENA

Systemy DN Gentzena – realizacja:

Zalety T-systemu DN Gentzena:

- dobra reprezentacja struktury dowodu

SYSTEMY DN GENTZENA

Systemy DN Gentzena – realizacja:

Zalety T-systemu DN Gentzena:

- dobra reprezentacja struktury dowodu
- nie ma ryzyka niepoprawnych inferencji (gdyż każde wystąpienie danej formuły używamy tylko raz!)

SYSTEMY DN GENTZENA

Systemy DN Gentzena – realizacja:

Zalety T-systemu DN Gentzena:

- dobra reprezentacja struktury dowodu
- nie ma ryzyka niepoprawnych inferencji (gdyż każde wystąpienie danej formuły używamy tylko raz!)

Dlatego T-system Gentzena wykorzystywany głównie w pracach teoretycznych poświęconych DN (np. Prawitz)

SYSTEMY DN GENTZENA

Systemy DN Gentzena – realizacja:

SYSTEMY DN GENTZENA

Systemy DN Gentzena – realizacja:

Wady T-systemu DN Gentzena:

SYSTEMY DN GENTZENA

Systemy DN Gentzena – realizacja:

Wady T-systemu DN Gentzena:

- odbiega od praktyki dowodzenia (liearne przejścia od zdań do zdań)

SYSTEMY DN GENTZENA

Systemy DN Gentzena – realizacja:

Wady T-systemu DN Gentzena:

- odbiega od praktyki dowodzenia (liearne przejścia od zdań do zdań)
- jest niepraktyczny (przydatny raczej do zapisu gotowego dowodu niż do aktualnego dowodzenia)

SYSTEMY DN GENTZENA

Systemy DN Gentzena – realizacja:

Wady T-systemu DN Gentzena:

- odbiega od praktyki dowodzenia (liearne przejścia od zdań do zdań)
- jest niepraktyczny (przydatny raczej do zapisu gotowego dowodu niż do aktualnego dowodzenia)
- jest nieekonomiczny (bo korzysta z wystąpień formuł)

SYSTEMY DN GENTZENA

Nieekonomiczność systemu DN Gentzena – przykład:

SYSTEMY DN GENTZENA

Nieekonomiczność systemu DN Gentzena – przykład:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[q] \quad \dfrac{[p \wedge (q \wedge p \to r)]}{p}}{q \wedge p} \qquad \dfrac{[p \wedge (q \wedge p \to r)]}{q \wedge p \to r}}{r}}{q \to r}}{(p \wedge (q \wedge p \to r)) \to (q \to p)}$$

SYSTEMY DN GENTZENA

Drugi system DN Gentzena (1936) – rachunek

SYSTEMY DN GENTZENA

Drugi system DN Gentzena (1936) – rachunek

(A_S) $\varphi \vdash \varphi$

(W_S) $\Gamma \vdash \varphi \; / \; \psi, \Gamma \vdash \varphi$

SYSTEMY DN GENTZENA

Drugi system DN Gentzena (1936) – rachunek

(A_S) $\varphi \vdash \varphi$

(W_S) $\Gamma \vdash \varphi \;/\; \psi, \Gamma \vdash \varphi$

$(\wedge D_S)$ $\Gamma \vdash \varphi; \Delta \vdash \psi \;/\; \Gamma, \Delta \vdash \varphi \wedge \psi$

$(\wedge E_S)$ $\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi \;/\; \Gamma \vdash \varphi$ i $\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi \;/\; \Gamma \vdash \psi$

SYSTEMY DN GENTZENA

Drugi system DN Gentzena (1936) – rachunek

(A_S) $\varphi \vdash \varphi$

(W_S) $\Gamma \vdash \varphi \;/\; \psi, \Gamma \vdash \varphi$

$(\wedge D_S)$ $\Gamma \vdash \varphi; \Delta \vdash \psi \;/\; \Gamma, \Delta \vdash \varphi \wedge \psi$

$(\wedge E_S)$ $\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi \;/\; \Gamma \vdash \varphi$ i $\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi \;/\; \Gamma \vdash \psi$

$(\vee D_S)$ $\Gamma \vdash \varphi \;/\; \Gamma \vdash \varphi \vee \psi$ i $\Gamma \vdash \psi \;/\; \Gamma \vdash \varphi \vee \psi$

$(\vee E_S)$ $\Gamma \vdash \varphi \vee \psi; \varphi, \Delta \vdash \chi; \psi, \Lambda \vdash \chi \;/\; \Gamma, \Delta, \Lambda \vdash \chi$

SYSTEMY DN GENTZENA

Drugi system DN Gentzena (1936) – rachunek

$$
\begin{array}{rl}
(A_S) & \varphi \vdash \varphi \\
(W_S) & \Gamma \vdash \varphi \ / \ \psi, \Gamma \vdash \varphi \\
(\wedge D_S) & \Gamma \vdash \varphi; \Delta \vdash \psi \ / \ \Gamma, \Delta \vdash \varphi \wedge \psi \\
(\wedge E_S) & \Gamma \vdash \varphi \wedge \psi \ / \ \Gamma \vdash \varphi \ \text{ i } \ \Gamma \vdash \varphi \wedge \psi \ / \ \Gamma \vdash \psi \\
(\vee D_S) & \Gamma \vdash \varphi \ / \ \Gamma \vdash \varphi \vee \psi \ \text{ i } \ \Gamma \vdash \psi \ / \ \Gamma \vdash \varphi \vee \psi \\
(\vee E_S) & \Gamma \vdash \varphi \vee \psi; \varphi, \Delta \vdash \chi; \psi, \Lambda \vdash \chi \ / \ \Gamma, \Delta, \Lambda \vdash \chi \\
(\rightarrow D_S) & \varphi, \Gamma \vdash \psi \ / \ \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \\
(\rightarrow E_S) & \Gamma \vdash \varphi; \Delta \vdash \varphi \rightarrow \psi \ / \ \Gamma, \Delta \vdash \psi
\end{array}
$$

SYSTEMY DN GENTZENA

Drugi system DN Gentzena (1936) – rachunek

$$
\begin{array}{rl}
(A_S) & \varphi \vdash \varphi \\
(W_S) & \Gamma \vdash \varphi \ / \ \psi, \Gamma \vdash \varphi \\
(\wedge D_S) & \Gamma \vdash \varphi; \Delta \vdash \psi \ / \ \Gamma, \Delta \vdash \varphi \wedge \psi \\
(\wedge E_S) & \Gamma \vdash \varphi \wedge \psi \ / \ \Gamma \vdash \varphi \ \text{ i } \ \Gamma \vdash \varphi \wedge \psi \ / \ \Gamma \vdash \psi \\
(\vee D_S) & \Gamma \vdash \varphi \ / \ \Gamma \vdash \varphi \vee \psi \ \text{ i } \ \Gamma \vdash \psi \ / \ \Gamma \vdash \varphi \vee \psi \\
(\vee E_S) & \Gamma \vdash \varphi \vee \psi; \varphi, \Delta \vdash \chi; \psi, \Lambda \vdash \chi \ / \ \Gamma, \Delta, \Lambda \vdash \chi \\
(\rightarrow D_S) & \varphi, \Gamma \vdash \psi \ / \ \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \\
(\rightarrow E_S) & \Gamma \vdash \varphi; \Delta \vdash \varphi \rightarrow \psi \ / \ \Gamma, \Delta \vdash \psi \\
(\neg D_S) & \varphi, \Gamma \vdash \psi; \varphi, \Delta \vdash \neg\psi \ / \ \Gamma, \Delta \vdash \neg\varphi \\
(\neg E_S) & \Gamma \vdash \neg\neg\varphi \ / \ \Gamma \vdash \varphi
\end{array}
$$

SYSTEMY DN GENTZENA

Drugi system DN Gentzena – realizacja:

SYSTEMY DN GENTZENA

Drugi system DN Gentzena – realizacja:

- elementami dowodu są sekwenty a nie formuły – S-system (sekwent odpowiada regule wprowadzania założeń a reguły sekwentowe to reguły inferencji)

SYSTEMY DN GENTZENA

Drugi system DN Gentzena – realizacja:

- elementami dowodu są sekwenty a nie formuły – S-system (sekwent odpowiada regule wprowadzania założeń a reguły sekwentowe to reguły inferencji)
- eliminacja i dołączanie stałych tylko w następnikach sekwentów

SYSTEMY DN GENTZENA

Drugi system DN Gentzena – realizacja:

- elementami dowodu są sekwenty a nie formuły – S-system (sekwent odpowiada regule wprowadzania założeń a reguły sekwentowe to reguły inferencji)
- eliminacja i dołączanie stałych tylko w następnikach sekwentów
- regułom konstrukcji dowodu z F-systemu odpowiadają te reguły inferencji, w których zbiór założeń (poprzednik sekwentu) jest zmniejszany

SYSTEMY DN GENTZENA

Drugi system DN Gentzena – realizacja:

- elementami dowodu są sekwenty a nie formuły – S-system (sekwent odpowiada regule wprowadzania założeń a reguły sekwentowe to reguły inferencji)
- eliminacja i dołączanie stałych tylko w następnikach sekwentów
- regułom konstrukcji dowodu z F-systemu odpowiadają te reguły inferencji, w których zbiór założeń (poprzednik sekwentu) jest zmniejszany
- dowody w postaci drzew

SYSTEMY DN GENTZENA

Drugi system DN Gentzena – uwagi:

SYSTEMY DN GENTZENA

Drugi system DN Gentzena – uwagi:

Sekwentowy DN Gentzena to przeciwny biegun do systemów aksjomatycznych (tam: dużo sekwentów, mało reguł sekwentowych, a tu: mało sekwentów, dużo reguł).

SYSTEMY DN GENTZENA

Drugi system DN Gentzena – uwagi:

Sekwentowy DN Gentzena to przeciwny biegun do systemów aksjomatycznych (tam: dużo sekwentów, mało reguł sekwentowych, a tu: mało sekwentów, dużo reguł).
Możliwe są jeszcze inne kombinacje, np. systemy:

SYSTEMY DN GENTZENA

Drugi system DN Gentzena – uwagi:

Sekwentowy DN Gentzena to przeciwny biegun do systemów aksjomatycznych (tam: dużo sekwentów, mało reguł sekwentowych, a tu: mało sekwentów, dużo reguł).
Możliwe są jeszcze inne kombinacje, np. systemy:

- Suszki

SYSTEMY DN GENTZENA

Drugi system DN Gentzena – uwagi:

Sekwentowy DN Gentzena to przeciwny biegun do systemów aksjomatycznych (tam: dużo sekwentów, mało reguł sekwentowych, a tu: mało sekwentów, dużo reguł).
Możliwe są jeszcze inne kombinacje, np. systemy:

- Suszki
- Hasenjagera

SYSTEMY DN GENTZENA

Drugi system DN Gentzena – uwagi:

Sekwentowy DN Gentzena to przeciwny biegun do systemów aksjomatycznych (tam: dużo sekwentów, mało reguł sekwentowych, a tu: mało sekwentów, dużo reguł).
Możliwe są jeszcze inne kombinacje, np. systemy:

- Suszki
- Hasenjagera
- Riegera

SYSTEMY DN GENTZENA

Przykład dowodu:

SYSTEMY DN GENTZENA

Przykład dowodu:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{p \vdash p \qquad p \to q \vdash p \to q}{p, p \to q \vdash q} \qquad q \to r \vdash q \to r}{p, p \to q, q \to r \vdash r}}{p \to q, q \to r \vdash p \to r}}{p \to q \vdash (q \to r) \to (p \to r)}}{\vdash (p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))}$$

SYSTEMY DN W STYLU GENTZENA

Ewolucja S-systemu

SYSTEMY DN W STYLU GENTZENA

Ewolucja S-systemu

Ekonomizacja realizacji:

SYSTEMY DN W STYLU GENTZENA

Ewolucja S-systemu

Ekonomizacja realizacji:

1. Operowanie sekwentami pozwala bez ryzyka niepoprawnych inferencji zastąpić T-dowody przez L-dowody – Hermes, Ebbinghaus/Flum

SYSTEMY DN W STYLU GENTZENA

Ewolucja S-systemu

Ekonomizacja realizacji:

1. Operowanie sekwentami pozwala bez ryzyka niepoprawnych inferencji zastąpić T-dowody przez L-dowody – Hermes, Ebbinghaus/Flum
2. W L-systemie zamiast sekwentów można używać par formuła + zbiór numerów (wierszy) jej aktywnych założeń – Suppes

SYSTEMY DN W STYLU GENTZENA

Przykład dowodu w DN Suppesa:

SYSTEMY DN W STYLU GENTZENA

Przykład dowodu w DN Suppesa:

1	$\{1\}$	$p \to q$	z
2	$\{2\}$	$q \to r$	z
3	$\{3\}$	p	z
4	$\{1, 3\}$	q	$1, 3, \to E$
5	$\{1, 2, 3\}$	r	$2, 4, \to E$
6	$\{1, 2\}$	$p \to r$	$5, \to D$
7	$\{1\}$	$(q \to r) \to (p \to r)$	$6, \to D$
8	$\varnothing$	$(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$	$7, \to D$

SYSTEMY DN W STYLU GENTZENA

Zalety i wady DN Suppesa

SYSTEMY DN W STYLU GENTZENA

Zalety i wady DN Suppesa

- Pozwala na bardziej elastyczną konstrukcję dowodu niż L-systemy w stylu Jaśkowskiego.

SYSTEMY DN W STYLU GENTZENA

Zalety i wady DN Suppesa

- Pozwala na bardziej elastyczną konstrukcję dowodu niż L-systemy w stylu Jaśkowskiego.
- Trudniej go zaadoptować do formalizacji logik nieklasycznych

SYSTEMY DN DLA KRK

Reguły dla kwantyfikatorów

SYSTEMY DN DLA KRK

Reguły dla kwantyfikatorów

Dla eliminacji ∀ i dołączania ∃ stosuje się reguły inferencji postaci:

SYSTEMY DN DLA KRK

Reguły dla kwantyfikatorów

Dla eliminacji $\forall$ i dołączania $\exists$ stosuje się reguły inferencji postaci:

($\forall E$) $\quad \forall x\varphi \vdash \varphi[x/\tau]$, gdzie τ to dowolny term

($\exists D$) $\quad \varphi[x/\tau] \vdash \exists x\varphi$, gdzie τ to dowolny term

SYSTEMY DN DLA KRK

Reguły dla kwantyfikatorów

Dla eliminacji $\forall$ i dołączania $\exists$ stosuje się reguły inferencji postaci:

($\forall E$) $\forall x \varphi \vdash \varphi[x/\tau]$, gdzie τ to dowolny term

($\exists D$) $\varphi[x/\tau] \vdash \exists x \varphi$, gdzie τ to dowolny term

lub (w S-systemach)

SYSTEMY DN DLA KRK

Reguły dla kwantyfikatorów

Dla eliminacji $\forall$ i dołączania $\exists$ stosuje się reguły inferencji postaci:

($\forall E$) $\forall x\varphi \vdash \varphi[x/\tau]$, gdzie τ to dowolny term

($\exists D$) $\varphi[x/\tau] \vdash \exists x\varphi$, gdzie τ to dowolny term

lub (w S-systemach)

($\forall E_S$) $\Gamma \Rightarrow \forall x\varphi \vdash \Gamma \Rightarrow \varphi[x/\tau]$, gdzie τ to dowolny term

($\exists D_S$) $\Gamma \Rightarrow \varphi[x/\tau] \vdash \Gamma \Rightarrow \exists x\varphi$, gdzie τ to dowolny term

SYSTEMY DN DLA KRK

Reguły dla kwantyfikatorów

SYSTEMY DN DLA KRK

Reguły dla kwantyfikatorów

W systemach DN panuje duża rozmaitość rozwiązań jeżeli chodzi o pozostałe dwie reguły – dołączania $\forall$ i eliminacji $\exists$:

SYSTEMY DN DLA KRK

Reguły dla kwantyfikatorów

W systemach DN panuje duża rozmaitość rozwiązań jeżeli chodzi o pozostałe dwie reguły – dołączania $\forall$ i eliminacji $\exists$:

- $(\forall D)$ jako reguła inferencji, $(\exists E)$ jako reguła konstrukcji dowodu (Gentzen)

SYSTEMY DN DLA KRK

Reguły dla kwantyfikatorów

W systemach DN panuje duża rozmaitość rozwiązań jeżeli chodzi o pozostałe dwie reguły – dołączania $\forall$ i eliminacji $\exists$:

- $(\forall D)$ jako reguła inferencji, $(\exists E)$ jako reguła konstrukcji dowodu (Gentzen)
- $(\exists E)$ jako reguła inferencji, $(\forall D)$ jako reguła konstrukcji dowodu (Jaśkowski, Kalish/Montague)

SYSTEMY DN DLA KRK

Reguły dla kwantyfikatorów

W systemach DN panuje duża rozmaitość rozwiązań jeżeli chodzi o pozostałe dwie reguły – dołączania $\forall$ i eliminacji $\exists$:

- $(\forall D)$ jako reguła inferencji, $(\exists E)$ jako reguła konstrukcji dowodu (Gentzen)
- $(\exists E)$ jako reguła inferencji, $(\forall D)$ jako reguła konstrukcji dowodu (Jaśkowski, Kalish/Montague)
- obie reguły jako reguły inferencji (Quine, Słupecki/Borkowski)

SYSTEMY DN DLA KRK

Reguły dla kwantyfikatorów

W systemach DN panuje duża rozmaitość rozwiązań jeżeli chodzi o pozostałe dwie reguły – dołączania $\forall$ i eliminacji $\exists$:

- $(\forall D)$ jako reguła inferencji, $(\exists E)$ jako reguła konstrukcji dowodu (Gentzen)
- $(\exists E)$ jako reguła inferencji, $(\forall D)$ jako reguła konstrukcji dowodu (Jaśkowski, Kalish/Montague)
- obie reguły jako reguły inferencji (Quine, Słupecki/Borkowski)
- obie reguły jako reguły konstrukcji dowodu (Fitch, Thomas)

SYSTEMY DN DLA KRK

Reguły dla kwantyfikatorów

SYSTEMY DN DLA KRK

Reguły dla kwantyfikatorów

Eliminacja $\exists$ jako reguła konstrukcji dowodu jest realizacją następującej reguły sekwentowej:

SYSTEMY DN DLA KRK

Reguły dla kwantyfikatorów

Eliminacja $\exists$ jako reguła konstrukcji dowodu jest realizacją następującej reguły sekwentowej:
$[\exists E^p]$ $\Gamma \vdash \exists x\varphi;\ \Delta, \varphi[x/a] \vdash \psi\ /\ \Gamma, \Delta \vdash \psi$, pod warunkiem, że a jest nową stałą w φ, ψ i zbiorze aktywnych założeń Γ, Δ

SYSTEMY DN DLA KRK

Reguły dla kwantyfikatorów

Eliminacja $\exists$ jako reguła konstrukcji dowodu jest realizacją następującej reguły sekwentowej:
$[\exists E^p]$ $\Gamma \vdash \exists x\varphi;\ \Delta, \varphi[x/a] \vdash \psi\ /\ \Gamma, \Delta \vdash \psi$, pod warunkiem, że a jest nową stałą w φ, ψ i zbiorze aktywnych założeń Γ, Δ

Realizacja tej reguły w T-systemie Gentzena wygląda następująco:

SYSTEMY DN DLA KRK

Reguły dla kwantyfikatorów

Eliminacja $\exists$ jako reguła konstrukcji dowodu jest realizacją następującej reguły sekwentowej:
$[\exists E^p]$ $\Gamma \vdash \exists x\varphi;\ \Delta, \varphi[x/a] \vdash \psi\ /\ \Gamma, \Delta \vdash \psi$, pod warunkiem, że a jest nową stałą w φ, ψ i zbiorze aktywnych założeń Γ, Δ

Realizacja tej reguły w T-systemie Gentzena wygląda następująco:

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \vdots\\ \exists x\varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\varphi[x/a]], \Delta\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\psi}$$

SYSTEMY DN DLA KRK

Reguły dla kwantyfikatorów

SYSTEMY DN DLA KRK

Reguły dla kwantyfikatorów

Dołączanie $\forall$ jako reguła konstrukcji dowodu jest realizacją następującej reguły sekwentowej:

SYSTEMY DN DLA KRK

Reguły dla kwantyfikatorów

Dołączanie $\forall$ jako reguła konstrukcji dowodu jest realizacją następującej reguły sekwentowej:
$[\forall D]$ $\Gamma \vdash \varphi$ / $\Gamma \vdash \forall x\varphi$, pod warunkiem, że x nie jest zmienną wolną w Γ

SYSTEMY DN DLA KRK

Reguły dla kwantyfikatorów

Dołączanie $\forall$ jako reguła konstrukcji dowodu jest realizacją następującej reguły sekwentowej:
$[\forall D]$ $\Gamma \vdash \varphi$ / $\Gamma \vdash \forall x\varphi$, pod warunkiem, że x nie jest zmienną wolną w Γ

Realizacja tej reguły w L-systemie Kalisha/Montague wygląda następująco:

SYSTEMY DN DLA KRK

Reguły dla kwantyfikatorów

Dołączanie $\forall$ jako reguła konstrukcji dowodu jest realizacją następującej reguły sekwentowej:
$[\forall D]$ $\Gamma \vdash \varphi$ / $\Gamma \vdash \forall x \varphi$, pod warunkiem, że x nie jest zmienną wolną w Γ

Realizacja tej reguły w L-systemie Kalisha/Montague wygląda następująco:

$$\begin{array}{l} \Gamma \\ \text{SHØW: } \forall x \varphi \\ \quad \boxed{\begin{array}{l} \Gamma' \\ \vdots \\ \varphi \end{array}} \end{array}$$

SYSTEMY DN DLA KRK

Reguły dla identyczności

SYSTEMY DN DLA KRK

Reguły dla identyczności

Najczęściej do systemu DN dołącza się aksjomat $\tau = \tau$ i regułę Leibniza:

SYSTEMY DN DLA KRK

Reguły dla identyczności

Najczęściej do systemu DN dołącza się aksjomat $\tau = \tau$ i regułę Leibniza:

$$(LL)\ \tau_1 = \tau_2,\ \varphi \ \vdash \ \varphi[\tau_1 // \tau_2]$$

SYSTEMY DN DLA KRK

Reguły dla identyczności

Najczęściej do systemu DN dołącza się aksjomat $\tau = \tau$ i regułę Leibniza:

$$(LL)\ \tau_1 = \tau_2,\ \varphi\ \vdash\ \varphi[\tau_1//\tau_2]$$

Możliwe jest także czysto regułowe rozwiązanie (np. Kalish/Montague):

SYSTEMY DN DLA KRK

Reguły dla identyczności

Najczęściej do systemu DN dołącza się aksjomat $\tau = \tau$ i regułę Leibniza:

(LL) $\tau_1 = \tau_2,\ \varphi \ \vdash \ \varphi[\tau_1//\tau_2]$

Możliwe jest także czysto regułowe rozwiązanie (np. Kalish/Montague):

$(ID1)$ $\forall x(x = \tau \to \varphi)\ /\ \varphi[x/\tau]$
$(ID2)$ $\varphi[x/\tau]\ /\ \forall x(x = \tau \to \varphi)$

SYSTEMY DN – PODSUMOWANIE

Podstawowe typy systemów DN:

SYSTEMY DN – PODSUMOWANIE

Podstawowe typy systemów DN:

- L- i F-systemy w tradycji Jaśkowskiego (dowód jako ciąg zagnieżdżonych poddowodów – ordered assumption approach)

SYSTEMY DN – PODSUMOWANIE

Podstawowe typy systemów DN:

- L- i F-systemy w tradycji Jaśkowskiego (dowód jako ciąg zagnieżdżonych poddowodów – ordered assumption approach)
- L- i S-systemy w tradycji Gentzen/Suppes (dowód jako ciąg sekwentów – recorded assumption approach)

SYSTEMY DN – PODSUMOWANIE

Podstawowe typy systemów DN:

- L- i F-systemy w tradycji Jaśkowskiego (dowód jako ciąg zagnieżdżonych poddowodów – ordered assumption approach)
- L- i S-systemy w tradycji Gentzen/Suppes (dowód jako ciąg sekwentów – recorded assumption approach)
- T- i F-systemy w tradycji Gentzena (dowód jako drzewo (wystąpień) formuł)

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

RS Gentzena (1934) – uwagi wstępne

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

RS Gentzena (1934) – uwagi wstępne

W pracy poświęconej DN wprowadza Gentzen pomocniczy rachunek RS, w którym używa również T-dowodów ale obiekty, na których operują reguły to sekwenty postaci:

$$\Gamma \Rightarrow \Delta,$$

gdzie Γ i Δ to skończone ciągi formuł.

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

RS Gentzena (1934) – uwagi wstępne

W pracy poświęconej DN wprowadza Gentzen pomocniczy rachunek RS, w którym używa również T-dowodów ale obiekty, na których operują reguły to sekwenty postaci:

$$\Gamma \Rightarrow \Delta,$$

gdzie Γ i Δ to skończone ciągi formuł.

Uwaga! sekwent jest tutaj wyrażeniem językowym a nie metajęzykowym (podobnie jak w DN Gentzena z 1936.)

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Sekwenty – przypadki szczególne

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Sekwenty – przypadki szczególne

Zarówno Γ jaki i Δ w sekwencie postaci $\Gamma \Rightarrow \Delta$ mogą być ciągami pustymi, wtedy:

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Sekwenty – przypadki szczególne

Zarówno Γ jaki i Δ w sekwencie postaci $\Gamma \Rightarrow \Delta$ mogą być ciągami pustymi, wtedy:

- Γ interpretujemy jako $\top$

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Sekwenty – przypadki szczególne

Zarówno Γ jaki i Δ w sekwencie postaci $\Gamma \Rightarrow \Delta$ mogą być ciągami pustymi, wtedy:

- Γ interpretujemy jako $\top$
- Δ interpretujemy jako $\bot$

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Sekwenty – przypadki szczególne

Zarówno Γ jaki i Δ w sekwencie postaci $\Gamma \Rightarrow \Delta$ mogą być ciągami pustymi, wtedy:

- Γ interpretujemy jako $\top$
- Δ interpretujemy jako $\bot$

Konsekwencje:

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Sekwenty – przypadki szczególne

Zarówno Γ jaki i Δ w sekwencie postaci $\Gamma \Rightarrow \Delta$ mogą być ciągami pustymi, wtedy:

- Γ interpretujemy jako $\top$
- Δ interpretujemy jako $\bot$

Konsekwencje:

- sekwent z pustym Γ i Δ jest wyrażeniem wewnętrznie sprzecznym: $\Rightarrow := \bot$

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Sekwenty – przypadki szczególne

Zarówno Γ jaki i Δ w sekwencie postaci $\Gamma \Rightarrow \Delta$ mogą być ciągami pustymi, wtedy:

- Γ interpretujemy jako $\top$
- Δ interpretujemy jako $\bot$

Konsekwencje:

- sekwent z pustym Γ i Δ jest wyrażeniem wewnętrznie sprzecznym: $\Rightarrow\ :=\ \bot$
- $\Gamma \Rightarrow$ oznacza, że elementy Γ tworzą zbiór sprzeczny

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

RS Gentzena (1934) – reguły strukturalne

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

RS Gentzena (1934) – reguły strukturalne

(AX) $\varphi \Rightarrow \varphi$

(Cut) $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}$

$(W\Rightarrow)$ $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ $\qquad$ $(\Rightarrow W)$ $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}$

$(C\Rightarrow)$ $\dfrac{\varphi, \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ $\qquad$ $(\Rightarrow C)$ $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \varphi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}$

$(P\Rightarrow)$ $\dfrac{\Pi, \varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Pi, \psi, \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ $\qquad$ $(\Rightarrow P)$ $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi, \varphi, \Pi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi, \Pi}$

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

RS Gentzena (1934) – reguły logiczne

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

RS Gentzena (1934) – reguły logiczne

$(\neg\Rightarrow)\quad \dfrac{\Gamma\Rightarrow\Delta,\varphi}{\neg\varphi,\Gamma\Rightarrow\Delta}$ $\qquad$ $(\Rightarrow\neg)\quad \dfrac{\varphi,\Gamma\Rightarrow\Delta}{\Gamma\Rightarrow\Delta,\neg\varphi}$

$(\wedge\Rightarrow)\quad \dfrac{\varphi,\Gamma\Rightarrow\Delta}{\varphi\wedge\psi,\Gamma\Rightarrow\Delta}$ $\qquad$ $(\wedge\Rightarrow)\quad \dfrac{\psi,\Gamma\Rightarrow\Delta}{\varphi\wedge\psi,\Gamma\Rightarrow\Delta}$

$(\Rightarrow\wedge)\quad \dfrac{\Gamma\Rightarrow\Delta,\varphi \qquad \Gamma\Rightarrow\Delta,\psi}{\Gamma\Rightarrow\Delta,\varphi\wedge\psi}$ $\qquad$ $(\vee\Rightarrow)\quad \dfrac{\varphi,\Gamma\Rightarrow\Delta \qquad \psi,\Gamma\Rightarrow\Delta}{\varphi\vee\psi,\Gamma\Rightarrow\Delta}$

$(\Rightarrow\vee)\quad \dfrac{\Gamma\Rightarrow\Delta,\varphi}{\Gamma\Rightarrow\Delta,\varphi\vee\psi}$ $\qquad$ $(\Rightarrow\vee)\quad \dfrac{\Gamma\Rightarrow\Delta,\psi}{\Gamma\Rightarrow\Delta,\varphi\vee\psi}$

$(\rightarrow\Rightarrow)\quad \dfrac{\Gamma\Rightarrow\Delta,\varphi \qquad \psi,\Pi\Rightarrow\Sigma}{\varphi\rightarrow\psi,\Gamma,\Pi\Rightarrow\Delta,\Sigma}$ $\qquad$ $(\Rightarrow\rightarrow)\quad \dfrac{\varphi,\Gamma\Rightarrow\Delta,\psi}{\Gamma\Rightarrow\Delta,\varphi\rightarrow\psi}$

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

RS Gentzena (1934) – reguły dla kwantyfikatorów

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

RS Gentzena (1934) – reguły dla kwantyfikatorów

$(\forall\Rightarrow)\quad \dfrac{\varphi[x/a], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ $\qquad (\Rightarrow\forall)^1\quad \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi[x/a]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x\varphi}$

$(\exists\Rightarrow)^1\quad \dfrac{\varphi[x/a], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ $\qquad (\Rightarrow\exists)\quad \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi[x/a]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x\varphi}$

warunki poprawności:

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

RS Gentzena (1934) – reguły dla kwantyfikatorów

$$(\forall\Rightarrow)\quad \frac{\varphi[x/a], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad\qquad (\Rightarrow\forall)^1\quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi[x/a]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x\varphi}$$

$$(\exists\Rightarrow)^1\quad \frac{\varphi[x/a], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad\qquad (\Rightarrow\exists)\quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi[x/a]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x\varphi}$$

warunki poprawności:

1. gdzie a jest zmienną wolną nie występująca w Γ, Δ i φ.

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Uwagi o regule cięcia

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Uwagi o regule cięcia

Szczególne przypadki (Cut) reprezentują wiele ważnych reguł np.

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Uwagi o regule cięcia

Szczególne przypadki (Cut) reprezentują wiele ważnych reguł np.

- MP – $\Rightarrow \varphi; \varphi \Rightarrow \psi \ / \ \Rightarrow \psi$

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Uwagi o regule cięcia

Szczególne przypadki (Cut) reprezentują wiele ważnych reguł np.

- MP – $\Rightarrow \varphi; \varphi \Rightarrow \psi \ / \ \Rightarrow \psi$
- SH – $\chi \Rightarrow \varphi; \varphi \Rightarrow \psi \ / \ \chi \Rightarrow \psi$

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Uwagi o regule cięcia

Szczególne przypadki (Cut) reprezentują wiele ważnych reguł np.

- MP – $\Rightarrow \varphi; \varphi \Rightarrow \psi \ / \ \Rightarrow \psi$
- SH – $\chi \Rightarrow \varphi; \varphi \Rightarrow \psi \ / \ \chi \Rightarrow \psi$

Na poziomie ogólnym (Cut) wyraża przechodniość $\Rightarrow$,

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Uwagi o regule cięcia

Szczególne przypadki (Cut) reprezentują wiele ważnych reguł np.

- MP – $\Rightarrow \varphi; \varphi \Rightarrow \psi \ / \ \Rightarrow \psi$
- SH – $\chi \Rightarrow \varphi; \varphi \Rightarrow \psi \ / \ \chi \Rightarrow \psi$

Na poziomie ogólnym (Cut) wyraża przechodniość $\Rightarrow$,
a przy pewnej interpretacji także zasadę dwuwartościowości.

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Definicja dowodu w RS

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Definicja dowodu w RS

Dowodem tezy φ jest drzewo, którego każdy liść to sekwent aksjomatyczny, każde przejście do następnego węzła odpowiada zastosowaniu reguły sekwentowej a korzeń to sekwent $\Rightarrow \varphi$.

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Definicja dowodu w RS

Dowodem tezy φ jest drzewo, którego każdy liść to sekwent aksjomatyczny, każde przejście do następnego węzła odpowiada zastosowaniu reguły sekwentowej a korzeń to sekwent $\Rightarrow \varphi$.
Pojęcia dowodu w RS nie trzeba ograniczać do dowodu tezy. Dowolny sekwent $\Gamma \Rightarrow \Delta$ może mieć dowód w systemie; określenie przedmiotu takiego dowodu zależy od przyjętej interpretacji sekwentu (por dalej).

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

przykład dowodu tezy

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

przykład dowodu tezy

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \Rightarrow p \qquad q \Rightarrow q}{p, p \to q \Rightarrow q} \qquad r \Rightarrow r}{p, p \to q, q \to r \Rightarrow r}}{p \to q, q \to r \Rightarrow p \to r}}{p \to q \Rightarrow (q \to r) \to (p \to r)}}{\Rightarrow (p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))}}{}$$

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Rodzaje dowodów w RS

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Rodzaje dowodów w RS

Za pomocą RS można też w różny sposób formalizować teorie aksjomatyczne, np.:

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Rodzaje dowodów w RS

Za pomocą RS można też w różny sposób formalizować teorie aksjomatyczne, np.:

- dodając $\Rightarrow \varphi$ dla każdego aksjomatu φ do zbioru sekwentów wyjściowych

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Rodzaje dowodów w RS

Za pomocą RS można też w różny sposób formalizować teorie aksjomatyczne, np.:

- dodając $\Rightarrow \varphi$ dla każdego aksjomatu φ do zbioru sekwentów wyjściowych
- traktując zbiór aksjomatów Γ jako kontekst dowodzonych twierdzeń; dowodzimy wtedy sekwentów postaci $\Gamma \Rightarrow \varphi$, gdzie φ jest tezą teorii Γ

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Rodzaje dowodów w RS

Za pomocą RS można też w różny sposób formalizować teorie aksjomatyczne, np.:

- dodając $\Rightarrow \varphi$ dla każdego aksjomatu φ do zbioru sekwentów wyjściowych
- traktując zbiór aksjomatów Γ jako kontekst dowodzonych twierdzeń; dowodzimy wtedy sekwentów postaci $\Gamma \Rightarrow \varphi$, gdzie φ jest tezą teorii Γ
- dodając do RS odpowiednie reguły, np. dla aksjomatu o postaci $\varphi \rightarrow \psi$ regułę postaci $\psi \Rightarrow \Delta \ / \ \varphi \Rightarrow \Delta$ a dla aksjomatu postaci φ regułę postaci $\varphi \Rightarrow \Delta \ / \ \Rightarrow \Delta$

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Dla dowolnego sekwentu $\Gamma \Rightarrow \Delta$, z $\Gamma = \{\varphi_1, ..., \varphi_i\}$, $\Delta = \{\psi_1, ..., \psi_k\}$, i, $k \geq 0$ podane niżej warunki są równoważne:

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Dla dowolnego sekwentu $\Gamma \Rightarrow \Delta$, z $\Gamma = \{\varphi_1, ..., \varphi_i\}$, $\Delta = \{\psi_1, ..., \psi_k\}$, i, $k \geq 0$ podane niżej warunki są równoważne:

1. $\vdash \varphi_1, ..., \varphi_i \Rightarrow \psi_1, ..., \psi_k$
2. $\vdash \varphi_1, ..., \varphi_i, \neg\psi_1, ..., \neg\psi_k \Rightarrow$
3. $\vdash \Rightarrow \neg\varphi_1, ..., \neg\varphi_i, \psi_1, ..., \psi_k$
4. $\vdash \varphi_1 \wedge .... \wedge \varphi_i \rightarrow \psi_1 \vee ... \vee \psi_k$
5. $\varphi_1, ..., \varphi_i \vdash \psi_1 \vee ... \vee \psi_k$

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Interpretacje sekwentu:

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Interpretacje sekwentu:

1. interpretacja sekwentu jako implikacji (p. 4) użyta przez Gentzena dla wykazania równoważności z systemem aksjomatycznym

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Interpretacje sekwentu:

1. interpretacja sekwentu jako implikacji (p. 4) użyta przez Gentzena dla wykazania równoważności z systemem aksjomatycznym
2. interpretacja $\Rightarrow$ jako zależności Δ od założeń (p. 5); prowadzi do skonstruowania S-systemu DN na bazie RS (Gentzen 1936)

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Interpretacje sekwentu:

1. interpretacja sekwentu jako implikacji (p. 4) użyta przez Gentzena dla wykazania równoważności z systemem aksjomatycznym
2. interpretacja $\Rightarrow$ jako zależności Δ od założeń (p. 5); prowadzi do skonstruowania S-systemu DN na bazie RS (Gentzen 1936)
3. interpretacja $\Rightarrow$ jako symbolu relacji inferencji (p. 5); prowadzi do skonstruowania F-systemu DN na bazie RS (Gentzen 1934)

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Ważne własności reguł sekwentowych:

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Ważne własności reguł sekwentowych:

- w. podformuł: każda formuła występująca w przesłankach występuje też we wniosku (nie spełnia (Cut))

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Ważne własności reguł sekwentowych:

- w. podformuł: każda formuła występująca w przesłankach występuje też we wniosku (nie spełnia (Cut))
- odwracalność: przesłanki są dedukowalne z wniosku (nie spełnia np. $(W \Rightarrow)$, $(\rightarrow\Rightarrow)$)

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Ważne własności reguł sekwentowych:

- w. podformuł: każda formuła występująca w przesłankach występuje też we wniosku (nie spełnia (Cut))
- odwracalność: przesłanki są dedukowalne z wniosku (nie spełnia np. $(W \Rightarrow)$, $(\rightarrow\Rightarrow)$)
- symetria: każda stała ma reguły wprowadzania do następnika i poprzednika sekwentu (i żadnych innych)

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Ważne własności reguł sekwentowych:

- w. podformuł: każda formuła występująca w przesłankach występuje też we wniosku (nie spełnia (Cut))
- odwracalność: przesłanki są dedukowalne z wniosku (nie spełnia np. $(W \Rightarrow)$, $(\rightarrow\Rightarrow)$)
- symetria: każda stała ma reguły wprowadzania do następnika i poprzednika sekwentu (i żadnych innych)
- separowalność: reguła logiczna dla danej stałej nie zawiera innych stałych

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Ważne własności reguł sekwentowych:

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Ważne własności reguł sekwentowych:

- wyłączność: stała występuje tylko w sekwencie-wniosku, co więcej, tylko raz

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Ważne własności reguł sekwentowych:

- wyłączność: stała występuje tylko w sekwencie-wniosku, co więcej, tylko raz
- niezależność: poprawność danej reguły nie jest zakłócona przez dodanie dalszych formuł do sekwentów-przesłanek i sekwentu-wniosku

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Ważne własności reguł sekwentowych:

- wyłączność: stała występuje tylko w sekwencie-wniosku, co więcej, tylko raz
- niezależność: poprawność danej reguły nie jest zakłócona przez dodanie dalszych formuł do sekwentów-przesłanek i sekwentu-wniosku

Znaczenie: RS pozwala na ufundowanie antyrealistycznej teorii znaczenia – znaczenie stałej jako warunki jej użycia (m.in. Dummett, Prawitz, Hacking, Sundholm).

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Podstawowe twierdzenie Gentzena:

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Podstawowe twierdzenie Gentzena:

Każdy dowód $\Gamma \Rightarrow \Delta$ w RS można przekształcić w dowód bez użycia (Cut).

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Podstawowe twierdzenie Gentzena:

Każdy dowód $\Gamma \Rightarrow \Delta$ w RS można przekształcić w dowód bez użycia (Cut).

Konsekwencje twierdzenia o eliminacji cięcia:

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Podstawowe twierdzenie Gentzena:

Każdy dowód $\Gamma \Rightarrow \Delta$ w RS można przekształcić w dowód bez użycia (Cut).

Konsekwencje twierdzenia o eliminacji cięcia:

- wszystkie reguły mają własność podformuł – system cut-free RS jest analityczny.

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Podstawowe twierdzenie Gentzena:

Każdy dowód $\Gamma \Rightarrow \Delta$ w RS można przekształcić w dowód bez użycia (Cut).

Konsekwencje twierdzenia o eliminacji cięcia:

- wszystkie reguły mają własność podformuł – system cut-free RS jest analityczny.
- dowód rozstrzygalności rachunku zdań w wersji klasycznej i intuicjonistycznej

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Podstawowe twierdzenie Gentzena:

Każdy dowód $\Gamma \Rightarrow \Delta$ w RS można przekształcić w dowód bez użycia (Cut).

Konsekwencje twierdzenia o eliminacji cięcia:

- wszystkie reguły mają własność podformuł – system cut-free RS jest analityczny.
- dowód rozstrzygalności rachunku zdań w wersji klasycznej i intuicjonistycznej
- dowód niesprzeczności logiki klasycznej i intuicjonistycznej

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Podstawowe twierdzenie Gentzena:

Każdy dowód $\Gamma \Rightarrow \Delta$ w RS można przekształcić w dowód bez użycia (Cut).

Konsekwencje twierdzenia o eliminacji cięcia:

- wszystkie reguły mają własność podformuł – system cut-free RS jest analityczny.
- dowód rozstrzygalności rachunku zdań w wersji klasycznej i intuicjonistycznej
- dowód niesprzeczności logiki klasycznej i intuicjonistycznej
- dowód niesprzeczności arytmetyki bez reguły indukcji

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Różne znaczenia analityczności:

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Różne znaczenia analityczności:

- Euklidesowe – dowód przez równoważnościowe przekształcenia

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Różne znaczenia analityczności:

- Euklidesowe – dowód przez równoważnościowe przekształcenia
- Kartezjańskie – rozwiązanie problemu sprowadzalne do rozwiązania podproblemów

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Różne znaczenia analityczności:

- Euklidesowe – dowód przez równoważnościowe przekształcenia
- Kartezjańskie – rozwiązanie problemu sprowadzalne do rozwiązania podproblemów
- teoriodowodowe – dowód jest prowadzony od tyłu (od twierdzenia do aksjomatów)

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Różne znaczenia analityczności:

- Euklidesowe – dowód przez równoważnościowe przekształcenia
- Kartezjańskie – rozwiązanie problemu sprowadzalne do rozwiązania podproblemów
- teoriodowodowe – dowód jest prowadzony od tyłu (od twierdzenia do aksjomatów)
- metodologiczne (w RS) – reguła cięcia jest eliminowalna

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Różne znaczenia analityczności:

- Euklidesowe – dowód przez równoważnościowe przekształcenia
- Kartezjańskie – rozwiązanie problemu sprowadzalne do rozwiązania podproblemów
- teoriodowodowe – dowód jest prowadzony od tyłu (od twierdzenia do aksjomatów)
- metodologiczne (w RS) – reguła cięcia jest eliminowalna
- met. (w RS, Tab) – wszystkie reguły systemu mają własność podformuł

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Różne znaczenia analityczności:

- Euklidesowe – dowód przez równoważnościowe przekształcenia
- Kartezjańskie – rozwiązanie problemu sprowadzalne do rozwiązania podproblemów
- teoriodowodowe – dowód jest prowadzony od tyłu (od twierdzenia do aksjomatów)
- metodologiczne (w RS) – reguła cięcia jest eliminowalna
- met. (w RS, Tab) – wszystkie reguły systemu mają własność podformuł
- met. (w Tab) – wszystkie reguły są regułami eliminacji

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Różne znaczenia analityczności:

- Euklidesowe – dowód przez równoważnościowe przekształcenia
- Kartezjańskie – rozwiązanie problemu sprowadzalne do rozwiązania podproblemów
- teoriodowodowe – dowód jest prowadzony od tyłu (od twierdzenia do aksjomatów)
- metodologiczne (w RS) – reguła cięcia jest eliminowalna
- met. (w RS, Tab) – wszystkie reguły systemu mają własność podformuł
- met. (w Tab) – wszystkie reguły są regułami eliminacji
- met. (w RS, DN) – stosowalność reguł jest ograniczona do wyznaczonego zbioru formuł (np. zbioru podformuł dowodzonej formuły)

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Upraszczanie (cut-free) RS dla otrzymania procedury roztrzygalnej:

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Upraszczanie (cut-free) RS dla otrzymania procedury roztrzygalnej:

1. zastąpienie reguł Gentzena dla $(\Rightarrow \vee)$ i $(\wedge \Rightarrow)$ przez warianty Ketonena

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Upraszczanie (cut-free) RS dla otrzymania procedury roztrzygalnej:

1. zastąpienie reguł Gentzena dla $(\Rightarrow \vee)$ i $(\wedge \Rightarrow)$ przez warianty Ketonena
2. ujednolicenie formuł parametrycznych w $(\rightarrow\Rightarrow)$

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Upraszczanie (cut-free) RS dla otrzymania procedury roztrzygalnej:

1. zastąpienie reguł Gentzena dla $(\Rightarrow \vee)$ i $(\wedge \Rightarrow)$ przez warianty Ketonena
2. ujednolicenie formuł parametrycznych w $(\rightarrow\Rightarrow)$
3. zastąpienie ciągów formuł przez ich zbiory (eliminacja reguł kontrakcji i permutacji)

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Upraszczanie (cut-free) RS dla otrzymania procedury roztrzygalnej:

1. zastąpienie reguł Gentzena dla ($\Rightarrow \vee$) i ($\wedge \Rightarrow$) przez warianty Ketonena
2. ujednolicenie formuł parametrycznych w ($\rightarrow\Rightarrow$)
3. zastąpienie ciągów formuł przez ich zbiory (eliminacja reguł kontrakcji i permutacji)
4. uogólnienie aksjomatu do postaci $\Gamma \Rightarrow \Delta$ z $\Gamma \cap \Delta \neq \varnothing$

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Upraszczanie (cut-free) RS dla otrzymania procedury roztrzygalnej:

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Upraszczanie (cut-free) RS dla otrzymania procedury roztrzygalnej:

ad. 1, warianty Ketonena:

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Upraszczanie (cut-free) RS dla otrzymania procedury roztrzygalnej:

ad. 1, warianty Ketonena:

$$(\wedge\Rightarrow)\ \frac{\varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow\vee)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}$$

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Upraszczanie (cut-free) RS dla otrzymania procedury roztrzygalnej:

ad. 1, warianty Ketonena:

$$(\wedge\Rightarrow)\ \frac{\varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi\wedge\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow\vee)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi\vee\psi}$$

ad. 2, ujednolicenie formuł parametrycznych w $(\rightarrow\Rightarrow)$:

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Upraszczanie (cut-free) RS dla otrzymania procedury roztrzygalnej:

ad. 1, warianty Ketonena:

$$(\wedge\Rightarrow)\ \frac{\varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow\vee)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}$$

ad. 2, ujednolicenie formuł parametrycznych w $(\rightarrow\Rightarrow)$:

$$(\rightarrow\Rightarrow)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \rightarrow \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

przykład otwartego drzewa dowodowego

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

przykład otwartego drzewa dowodowego

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p, q \Rightarrow q, r}{p \Rightarrow q, q \to r} \qquad \dfrac{p \Rightarrow p, q \qquad r, p \Rightarrow q}{p \to r, p \Rightarrow q}}{(q \to r) \to (p \to r), p \Rightarrow q}}{(q \to r) \to (p \to r) \Rightarrow p \to q}}{\Rightarrow ((q \to r) \to (p \to r)) \to (p \to r)}$$

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Kolejne interpretacje sekwentu (w cut-free RS):

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Kolejne interpretacje sekwentu (w cut-free RS):

1. interpretacja sekwentu jako koniunkcji z pustym następnikiem (p. 2); reguły czytane odwrotnie (w terminach falsyfikowalności); drzewo dowodowe staje się formalnym zapisem sprawdzania niewprost

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Kolejne interpretacje sekwentu (w cut-free RS):

1. interpretacja sekwentu jako koniunkcji z pustym następnikiem (p. 2); reguły czytane odwrotnie (w terminach falsyfikowalności); drzewo dowodowe staje się formalnym zapisem sprawdzania niewprost
2. interpretacja sekwentu jako alternatywy z pustym poprzednikiem (p. 3); reguły czytane odwrotnie (w terminach weryfikowalności); drzewo dowodowe staje się formalnym zapisem procedury Posta (dzięki odwracalności wszystkich reguł)

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Kolejne interpretacje sekwentu (w cut-free RS):

1. interpretacja sekwentu jako koniunkcji z pustym następnikiem (p. 2); reguły czytane odwrotnie (w terminach falsyfikowalności); drzewo dowodowe staje się formalnym zapisem sprawdzania niewprost
2. interpretacja sekwentu jako alternatywy z pustym poprzednikiem (p. 3); reguły czytane odwrotnie (w terminach weryfikowalności); drzewo dowodowe staje się formalnym zapisem procedury Posta (dzięki odwracalności wszystkich reguł)

Uwaga! w interpretacji 1 odwracalność reguł nie jest konieczna – ma to wpływ na uogólnienia dla logik nieklasycznych.

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Związek RS z metodami tablicowymi:

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Związek RS z metodami tablicowymi:

Podane wyżej interpretacje prowadzą do dwóch uproszczeń:

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Związek RS z metodami tablicowymi:

Podane wyżej interpretacje prowadzą do dwóch uproszczeń:

- zastąpić sekwenty zbiorami formuł

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Związek RS z metodami tablicowymi:

Podane wyżej interpretacje prowadzą do dwóch uproszczeń:

- zastąpić sekwenty zbiorami formuł
- odwrócić kierunek dowodzenia (sprawdzania) – odwrócone T-drzewa

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Związek RS z metodami tablicowymi:

Podane wyżej interpretacje prowadzą do dwóch uproszczeń:

- zastąpić sekwenty zbiorami formuł
- odwrócić kierunek dowodzenia (sprawdzania) – odwrócone T-drzewa

Interpretacja 1 (falsyfikowalność) prowadzi do systemu tablicowego Hintikki a 2 (weryfikowalność) do systemu Rasiowej/Sikorskiego.

SYSTEMY TABLICOWE

Związek RS z metodami tablicowymi:

SYSTEMY TABLICOWE

Związek RS z metodami tablicowymi:

Każdej regule RS dla $\wedge, \vee, \rightarrow$ odpowiada reguła Hintikki według wzorca:

SYSTEMY TABLICOWE

Związek RS z metodami tablicowymi:

Każdej regule RS dla $\wedge, \vee, \rightarrow$ odpowiada reguła Hintikki według wzorca:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma' \Rightarrow \Delta'} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\Gamma', \neg\Delta'}{\Gamma, \neg\Delta}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta \mid \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\Gamma'' \Rightarrow \Delta''} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\Gamma'', \neg\Delta''}{\Gamma, \neg\Delta \mid \Gamma', \neg\Delta'}$$

SYSTEMY TABLICOWE

Związek RS z metodami tablicowymi:

Każdej regule RS dla $\wedge, \vee, \rightarrow$ odpowiada reguła Hintikki według wzorca:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma' \Rightarrow \Delta'} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\Gamma', \neg\Delta'}{\Gamma, \neg\Delta}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta \mid \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\Gamma'' \Rightarrow \Delta''} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\Gamma'', \neg\Delta''}{\Gamma, \neg\Delta \mid \Gamma', \neg\Delta'}$$

W systemie Rasiowej/Sikorskiego mamy odpowiedniki dualne. Oprócz tego w obu systemach mamy regułę eliminacji podwójnej negacji: $\Gamma, \neg\neg\varphi \ / \ \Gamma, \varphi$

SYSTEMY TABLICOWE

Związek RS z metodami tablicowymi:

Każdej regule RS dla $\wedge, \vee, \rightarrow$ odpowiada reguła Hintikki według wzorca:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma' \Rightarrow \Delta'} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\Gamma', \neg\Delta'}{\Gamma, \neg\Delta}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta \mid \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\Gamma'' \Rightarrow \Delta''} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\Gamma'', \neg\Delta''}{\Gamma, \neg\Delta \mid \Gamma', \neg\Delta'}$$

W systemie Rasiowej/Sikorskiego mamy odpowiedniki dualne. Oprócz tego w obu systemach mamy regułę eliminacji podwójnej negacji: $\Gamma, \neg\neg\varphi \; / \; \Gamma, \varphi$

SYSTEMY TABLICOWE

Reguły dla kwantyfikatorów:

SYSTEMY TABLICOWE

Reguły dla kwantyfikatorów:

Aby utrzymać pełność KRK nie wystarczy przekształcenie reguł sekwentowych w reguły tablicowe Hintikki jak w przypadku spójników; potrzebne następujące reguły:

SYSTEMY TABLICOWE

Reguły dla kwantyfikatorów:

Aby utrzymać pełność KRK nie wystarczy przekształcenie reguł sekwentowych w reguły tablicowe Hintikki jak w przypadku spójników; potrzebne następujące reguły:

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi}{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[x/a]} \qquad \frac{\Gamma, \neg\forall x\varphi}{\Gamma, \neg\varphi[x/a]}^{1} \qquad \frac{\Gamma, \exists x\varphi}{\Gamma, \varphi[x/a]}^{1} \qquad \frac{\Gamma, \neg\exists x\varphi}{\Gamma, \neg\exists x\varphi, \neg\varphi[x/a]}$$

SYSTEMY TABLICOWE

Reguły dla kwantyfikatorów:

Aby utrzymać pełność KRK nie wystarczy przekształcenie reguł sekwentowych w reguły tablicowe Hintikki jak w przypadku spójników; potrzebne następujące reguły:

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi}{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[x/a]} \qquad \frac{\Gamma, \neg\forall x\varphi}{\Gamma, \neg\varphi[x/a]}^{1} \qquad \frac{\Gamma, \exists x\varphi}{\Gamma, \varphi[x/a]}^{1} \qquad \frac{\Gamma, \neg\exists x\varphi}{\Gamma, \neg\exists x\varphi, \neg\varphi[x/a]}$$

1. gdzie a jest zmienną wolną nie występującą w Γ i φ.

SYSTEMY TABLICOWE

Reguły dla kwantyfikatorów:

Aby utrzymać pełność KRK nie wystarczy przekształcenie reguł sekwentowych w reguły tablicowe Hintikki jak w przypadku spójników; potrzebne następujące reguły:

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi}{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[x/a]} \qquad \frac{\Gamma, \neg\forall x\varphi}{\Gamma, \neg\varphi[x/a]}^{1} \qquad \frac{\Gamma, \exists x\varphi}{\Gamma, \varphi[x/a]}^{1} \qquad \frac{\Gamma, \neg\exists x\varphi}{\Gamma, \neg\exists x\varphi, \neg\varphi[x/a]}$$

1. gdzie a jest zmienną wolną nie występującą w Γ i φ.

W systemie Rasiowej/Sikorskiego mamy odpowiedniki dualne.

SYSTEMY TABLICOWE

Reguły dla kwantyfikatorów:

Aby utrzymać pełność KRK nie wystarczy przekształcenie reguł sekwentowych w reguły tablicowe Hintikki jak w przypadku spójników; potrzebne następujące reguły:

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi}{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[x/a]} \qquad \frac{\Gamma, \neg\forall x\varphi}{\Gamma, \neg\varphi[x/a]}\,^{1} \qquad \frac{\Gamma, \exists x\varphi}{\Gamma, \varphi[x/a]}\,^{1} \qquad \frac{\Gamma, \neg\exists x\varphi}{\Gamma, \neg\exists x\varphi, \neg\varphi[x/a]}$$

1. gdzie a jest zmienną wolną nie występująca w Γ i φ.
W systemie Rasiowej/Sikorskiego mamy odpowiedniki dualne.

$\Gamma \vdash \varphi$ w systemie tablicowym, gdy istnieje (odwrócone drzewo), którego każdy liść to zbiór formuł zawierający parę wyrażeń sprzecznych a korzeń to zbiór $\Gamma, \neg\varphi$ (w systemie Hintikki) lub $\neg\Gamma, \varphi$ (w systemie Rasiowej/Sikorskiego)

SYSTEMY TABLICOWE

Dalsza ewolucja systemów tablicowych:

SYSTEMY TABLICOWE

Dalsza ewolucja systemów tablicowych:

Praktyczne uproszczenia – wyeliminować kłopotliwe przepisywanie formuł parametrycznych, co prowadzi do F-systemów tablicowych:

SYSTEMY TABLICOWE

Dalsza ewolucja systemów tablicowych:

Praktyczne uproszczenia – wyeliminować kłopotliwe przepisywanie formuł parametrycznych, co prowadzi do F-systemów tablicowych:

- diagramy Betha – dwukolumnowe tablice

SYSTEMY TABLICOWE

Dalsza ewolucja systemów tablicowych:

Praktyczne uproszczenia – wyeliminować kłopotliwe przepisywanie formuł parametrycznych, co prowadzi do F-systemów tablicowych:

- diagramy Betha – dwukolumnowe tablice
- Lis, Smullyann – formuły z indeksami oznaczającymi ich status

SYSTEMY TABLICOWE

Dalsza ewolucja systemów tablicowych:

Praktyczne uproszczenia – wyeliminować kłopotliwe przepisywanie formuł parametrycznych, co prowadzi do F-systemów tablicowych:

- diagramy Betha – dwukolumnowe tablice
- Lis, Smullyann – formuły z indeksami oznaczającymi ich status

Dygresja – inny nurt ewolucji RS: system sekwentowy Hermesa jako próba łączenia RS i DN

SYSTEMY TABLICOWE

Związek z postaciami normalnymi dla KRZ:

SYSTEMY TABLICOWE

Związek z postaciami normalnymi dla KRZ:

- system Hintikki odpowiada sprowadzeniu $\neg\varphi$ do jej alternatywno-koniunkcyjnej postaci

SYSTEMY TABLICOWE

Związek z postaciami normalnymi dla KRZ:

- system Hintikki odpowiada sprowadzeniu $\neg\varphi$ do jej alternatywno-koniunkcyjnej postaci
- system Rasiowej/Sikorskiego odpowiada metodzie Posta (sprowadzeniu φ do jej koniunkcyjno-alternatywnej postaci)

SYSTEMY TABLICOWE

Związek z postaciami normalnymi dla KRZ:

- system Hintikki odpowiada sprowadzeniu $\neg\varphi$ do jej alternatywno-koniunkcyjnej postaci
- system Rasiowej/Sikorskiego odpowiada metodzie Posta (sprowadzeniu φ do jej koniunkcyjno-alternatywnej postaci)

Możliwe są jeszcze dwa sposoby:

SYSTEMY TABLICOWE

Związek z postaciami normalnymi dla KRZ:

- system Hintikki odpowiada sprowadzeniu $\neg\varphi$ do jej alternatywno-koniunkcyjnej postaci
- system Rasiowej/Sikorskiego odpowiada metodzie Posta (sprowadzeniu φ do jej koniunkcyjno-alternatywnej postaci)

Możliwe są jeszcze dwa sposoby:

- sprowadzenie φ do jej alternatywno-koniunkcyjnej postaci

SYSTEMY TABLICOWE

Związek z postaciami normalnymi dla KRZ:

- system Hintikki odpowiada sprowadzeniu $\neg\varphi$ do jej alternatywno-koniunkcyjnej postaci
- system Rasiowej/Sikorskiego odpowiada metodzie Posta (sprowadzeniu φ do jej koniunkcyjno-alternatywnej postaci)

Możliwe są jeszcze dwa sposoby:

- sprowadzenie φ do jej alternatywno-koniunkcyjnej postaci $\Longrightarrow$ metoda koneksji (jeden z wariantów)

SYSTEMY TABLICOWE

Związek z postaciami normalnymi dla KRZ:

- system Hintikki odpowiada sprowadzeniu $\neg\varphi$ do jej alternatywno-koniunkcyjnej postaci
- system Rasiowej/Sikorskiego odpowiada metodzie Posta (sprowadzeniu φ do jej koniunkcyjno-alternatywnej postaci)

Możliwe są jeszcze dwa sposoby:

- sprowadzenie φ do jej alternatywno-koniunkcyjnej postaci $\Longrightarrow$ metoda koneksji (jeden z wariantów)
- sprowadzenie $\neg\varphi$ do jej koniunkcyjno-alternatywnej postaci

SYSTEMY TABLICOWE

Związek z postaciami normalnymi dla KRZ:

- system Hintikki odpowiada sprowadzeniu $\neg\varphi$ do jej alternatywno-koniunkcyjnej postaci
- system Rasiowej/Sikorskiego odpowiada metodzie Posta (sprowadzeniu φ do jej koniunkcyjno-alternatywnej postaci)

Możliwe są jeszcze dwa sposoby:

- sprowadzenie φ do jej alternatywno-koniunkcyjnej postaci $\Longrightarrow$ metoda koneksji (jeden z wariantów)
- sprowadzenie $\neg\varphi$ do jej koniunkcyjno-alternatywnej postaci $\Longrightarrow$ metoda rezolucji

REZOLUCJA

J. A. Robinson 1965

REZOLUCJA

J. A. Robinson 1965

Podstawowe pojęcia:

REZOLUCJA

J. A. Robinson 1965

Podstawowe pojęcia:

- literał to formuła atomowa (l. pozytywny) lub jej negacja (l. negatywny)

REZOLUCJA

J. A. Robinson 1965

Podstawowe pojęcia:

- literał to formuła atomowa (l. pozytywny) lub jej negacja (l. negatywny)
- para literałów, z których jeden jest atomem a drugi jego negacją to literały komplementarne

REZOLUCJA

J. A. Robinson 1965

Podstawowe pojęcia:

- literał to formuła atomowa (l. pozytywny) lub jej negacja (l. negatywny)
- para literałów, z których jeden jest atomem a drugi jego negacją to literały komplementarne
- klauzula to alternatywa literałów (również jednoelementowa lub pusta)

REZOLUCJA

J. A. Robinson 1965

Podstawowe pojęcia:

- literał to formuła atomowa (l. pozytywny) lub jej negacja (l. negatywny)
- para literałów, z których jeden jest atomem a drugi jego negacją to literały komplementarne
- klauzula to alternatywa literałów (również jednoelementowa lub pusta)
- $\perp$ (lub $\square$) to klauzula pusta

REZOLUCJA

J. A. Robinson 1965

Podstawowe pojęcia:

- literał to formuła atomowa (l. pozytywny) lub jej negacja (l. negatywny)
- para literałów, z których jeden jest atomem a drugi jego negacją to literały komplementarne
- klauzula to alternatywa literałów (również jednoelementowa lub pusta)
- $\perp$ (lub $\square$) to klauzula pusta
- klauzule dzielimy na pozytywne, negatywne i mieszane

REZOLUCJA

J. A. Robinson 1965

Podstawowe pojęcia:

- literał to formuła atomowa (l. pozytywny) lub jej negacja (l. negatywny)
- para literałów, z których jeden jest atomem a drugi jego negacją to literały komplementarne
- klauzula to alternatywa literałów (również jednoelementowa lub pusta)
- $\perp$ (lub $\square$) to klauzula pusta
- klauzule dzielimy na pozytywne, negatywne i mieszane
- klauzula Horna zawiera co najwyżej jeden literał pozytywny

REZOLUCJA

Reguła rezolucji:

REZOLUCJA

Reguła rezolucji:

$$\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_k \vee \chi,\ \psi_1 \vee \ldots \vee \psi_n \vee \neg\chi \ \vdash\ \varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_k \vee \psi_1 \vee \ldots \vee \psi_n$$

gdzie φ_i, ψ_i to literały (dla każdego $i \leq k, n$) a χ to atom; wniosek to rezolwenta.

REZOLUCJA

Reguła rezolucji:

$$\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_k \vee \chi,\ \psi_1 \vee \ldots \vee \psi_n \vee \neg\chi \ \vdash\ \varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_k \vee \psi_1 \vee \ldots \vee \psi_n$$

gdzie φ_i, ψ_i to literały (dla każdego $i \leq k, n$) a χ to atom; wniosek to rezolwenta.

Przykłady zastosowania:

REZOLUCJA

Reguła rezolucji:

$$\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_k \vee \chi,\ \psi_1 \vee \ldots \vee \psi_n \vee \neg\chi \ \vdash\ \varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_k \vee \psi_1 \vee \ldots \vee \psi_n$$

gdzie φ_i, ψ_i to literały (dla każdego $i \leq k, n$) a χ to atom; wniosek to rezolwenta.

Przykłady zastosowania:

- $p \vee \neg q,\ p \vee q \vee \neg r \vee s \ \vdash\ p \vee p \vee \neg r \vee s$

REZOLUCJA

Reguła rezolucji:

$$\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_k \vee \chi,\ \psi_1 \vee \ldots \vee \psi_n \vee \neg\chi \ \vdash \ \varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_k \vee \psi_1 \vee \ldots \vee \psi_n$$

gdzie φ_i, ψ_i to literały (dla każdego $i \leq k, n$) a χ to atom; wniosek to rezolwenta.

Przykłady zastosowania:

- $p \vee \neg q,\ p \vee q \vee \neg r \vee s \ \vdash \ p \vee p \vee \neg r \vee s$
- $Rxy,\ \neg Rxy \ \vdash \ \bot$

REZOLUCJA

Reguła rezolucji:

$$\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_k \vee \chi,\ \psi_1 \vee \ldots \vee \psi_n \vee \neg\chi \ \vdash\ \varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_k \vee \psi_1 \vee \ldots \vee \psi_n$$

gdzie φ_i, ψ_i to literały (dla każdego $i \leq k, n$) a χ to atom; wniosek to rezolwenta.

Przykłady zastosowania:

- $p \vee \neg q,\ p \vee q \vee \neg r \vee s \ \vdash\ p \vee p \vee \neg r \vee s$
- $Rxy,\ \neg Rxy \ \vdash\ \bot$

Uwaga: Reguła rezolucji jest specjalnym przypadkiem reguły cięcia.

REZOLUCJA

Pojęcie dowodu:

REZOLUCJA

Pojęcie dowodu:

- Dedukcja rezolucyjna ze zbioru klauzul Γ to ciąg klauzul, którego każdy element należy do Γ lub jest rezolwentą dwóch poprzedzających go elementów.

REZOLUCJA

Pojęcie dowodu:

- Dedukcja rezolucyjna ze zbioru klauzul Γ to ciąg klauzul, którego każdy element należy do Γ lub jest rezolwentą dwóch poprzedzających go elementów.
- Klauzula C jest dedukowalna ze zbioru klauzul Γ ($\Gamma \vdash C$) wtw istnieje dedukcja rezolucyjna ze zbioru klauzul Γ, którego ostatnim elementem jest C

REZOLUCJA

Pojęcie dowodu:

- Dedukcja rezolucyjna ze zbioru klauzul Γ to ciąg klauzul, którego każdy element należy do Γ lub jest rezolwentą dwóch poprzedzających go elementów.
- Klauzula C jest dedukowalna ze zbioru klauzul Γ ($\Gamma \vdash C$) wtw istnieje dedukcja rezolucyjna ze zbioru klauzul Γ, którego ostatnim elementem jest C
- $\Gamma \vdash \perp$ to refutacja Γ

REZOLUCJA

Zastosowanie do KRZ:

REZOLUCJA

Zastosowanie do KRZ:

Aby sprawdzić czy w KRZ $\Gamma \models \varphi$ należy:

REZOLUCJA

Zastosowanie do KRZ:

Aby sprawdzić czy w KRZ $\Gamma \models \varphi$ należy:

- Sprowadzić Γ i $\neg\varphi$ do postaci normalnej KA

REZOLUCJA

Zastosowanie do KRZ:

Aby sprawdzić czy w KRZ $\Gamma \models \varphi$ należy:

- Sprowadzić Γ i $\neg\varphi$ do postaci normalnej KA
- Pozbyć się koniunkcji otrzymując zbiór klauzul $Cl(\Gamma, \neg\varphi)$

REZOLUCJA

Zastosowanie do KRZ:

Aby sprawdzić czy w KRZ $\Gamma \models \varphi$ należy:

- Sprowadzić Γ i $\neg\varphi$ do postaci normalnej KA
- Pozbyć się koniunkcji otrzymując zbiór klauzul $Cl(\Gamma, \neg\varphi)$
- Przeprowadzić dedukcję rezolucyjną ze zbioru klauzul $Cl(\Gamma, \neg\varphi)$

REZOLUCJA

Zastosowanie do KRZ:

Aby sprawdzić czy w KRZ $\Gamma \models \varphi$ należy:

- Sprowadzić Γ i $\neg\varphi$ do postaci normalnej KA
- Pozbyć się koniunkcji otrzymując zbiór klauzul $Cl(\Gamma, \neg\varphi)$
- Przeprowadzić dedukcję rezolucyjną ze zbioru klauzul $Cl(\Gamma, \neg\varphi)$

Twierdzenie: $\Gamma \models \varphi$ wtw istnieje refutacja $Cl(\Gamma, \neg\varphi)$

REZOLUCJA

Zastosowanie do KRZ:

Aby sprawdzić czy w KRZ $\Gamma \models \varphi$ należy:

- Sprowadzić Γ i $\neg\varphi$ do postaci normalnej KA
- Pozbyć się koniunkcji otrzymując zbiór klauzul $Cl(\Gamma, \neg\varphi)$
- Przeprowadzić dedukcję rezolucyjną ze zbioru klauzul $Cl(\Gamma, \neg\varphi)$

Twierdzenie: $\Gamma \models \varphi$ wtw istnieje refutacja $Cl(\Gamma, \neg\varphi)$

Uwaga: Metoda rezolucji pomimo stosowania (Cut) jest analityczna!

REZOLUCJA

Przykład dowodu SH:

REZOLUCJA

Przykład dowodu SH:

$Cl(\neg \mathrm{SH}) = \{\neg p \vee q, \neg q \vee r, p, \neg r\}$

REZOLUCJA

Przykład dowodu SH:

$$Cl(\neg \text{SH}) = \{\neg p \vee q, \neg q \vee r, p, \neg r\}$$

1	$\neg p \vee q$	
2	$\neg q \vee r$	
3	p	
4	$\neg r$	
5	q	1, 3
6	$\neg q$	2, 4
7	$\perp$	5, 6

KONEKSJA

Andrews 1981, Bibel 1993

KONEKSJA

Andrews 1981, Bibel 1993

Metoda dualna do rezolucji:

KONEKSJA

Andrews 1981, Bibel 1993

Metoda dualna do rezolucji:

Aby sprawdzić czy w KRZ $\Gamma \models \varphi$ należy:

KONEKSJA

Andrews 1981, Bibel 1993

Metoda dualna do rezolucji:

Aby sprawdzić czy w KRZ $\Gamma \models \varphi$ należy:

- Sprowadzić Γ i φ do postaci normalnej AK

KONEKSJA

Andrews 1981, Bibel 1993

Metoda dualna do rezolucji:

Aby sprawdzić czy w KRZ $\Gamma \models \varphi$ należy:

- Sprowadzić Γ i φ do postaci normalnej AK
- Przekształcić tę formułę w 2-wymiarową matrycę

KONEKSJA

Andrews 1981, Bibel 1993

Metoda dualna do rezolucji:

Aby sprawdzić czy w KRZ $\Gamma \models \varphi$ należy:

- Sprowadzić Γ i φ do postaci normalnej AK
- Przekształcić tę formułę w 2-wymiarową matrycę
- Sprawdzić wszystkie ścieżki w matrycy

KONEKSJA

Andrews 1981, Bibel 1993

Metoda dualna do rezolucji:

Aby sprawdzić czy w KRZ $\Gamma \models \varphi$ należy:

- Sprowadzić Γ i φ do postaci normalnej AK
- Przekształcić tę formułę w 2-wymiarową matrycę
- Sprawdzić wszystkie ścieżki w matrycy

Twierdzenie: $\Gamma \models \varphi$ wtw każda ścieżka w matrycy zawiera literały komplementarne

KONEKSJA

Andrews 1981, Bibel 1993

Metoda dualna do rezolucji:

Aby sprawdzić czy w KRZ $\Gamma \models \varphi$ należy:

- Sprowadzić Γ i φ do postaci normalnej AK
- Przekształcić tę formułę w 2-wymiarową matrycę
- Sprawdzić wszystkie ścieżki w matrycy

Twierdzenie: $\Gamma \models \varphi$ wtw każda ścieżka w matrycy zawiera literały komplementarne

Uwaga: Metoda koneksji też zawiera ukryte zastosowania (Cut) ale jest analityczna!

KONEKSJA

Przykład dowodu SH:

KONEKSJA

Przykład dowodu SH:

Postać AK z SH $= (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg r) \vee \neg p \vee r$

KONEKSJA

Przykład dowodu SH:

Postać AK z SH $= (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg r) \vee \neg p \vee r$

Matryca SH:

KONEKSJA

Przykład dowodu SH:

Postać AK z SH $= (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg r) \vee \neg p \vee r$

Matryca SH:

$$\begin{array}{llll} p & q & \neg p & r \\ \neg q & \neg r & & \end{array}$$

KONEKSJA

Przykład dowodu SH:

Postać AK z SH $= (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg r) \vee \neg p \vee r$

Matryca SH:

$$\begin{array}{llll} p & q & \neg p & r \\ \neg q & \neg r & & \end{array}$$

Ścieżki w matrycy:

KONEKSJA

Przykład dowodu SH:

Postać AK z SH $= (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg r) \vee \neg p \vee r$

Matryca SH:

$$\begin{array}{llll} p & q & \neg p & r \\ \neg q & \neg r & & \end{array}$$

Ścieżki w matrycy:

- $p, q, \neg p, r$

KONEKSJA

Przykład dowodu SH:

Postać AK z SH $= (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg r) \vee \neg p \vee r$

Matryca SH:

$$\begin{array}{llll} p & q & \neg p & r \\ \neg q & \neg r & & \end{array}$$

Ścieżki w matrycy:

- $p, q, \neg p, r$
- $p, \neg r, \neg p, r$

KONEKSJA

Przykład dowodu SH:

Postać AK z SH $= (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg r) \vee \neg p \vee r$

Matryca SH:

$$\begin{array}{llll} p & q & \neg p & r \\ \neg q & \neg r & & \end{array}$$

Ścieżki w matrycy:

- $p, q, \neg p, r$
- $p, \neg r, \neg p, r$
- $\neg q, q, \neg p, r$

KONEKSJA

Przykład dowodu SH:

Postać AK z SH $= (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg r) \vee \neg p \vee r$

Matryca SH:

$$\begin{array}{llll} p & q & \neg p & r \\ \neg q & \neg r & & \end{array}$$

Ścieżki w matrycy:

- $p, q, \neg p, r$
- $p, \neg r, \neg p, r$
- $\neg q, q, \neg p, r$
- $\neg q, \neg r, \neg p, r$

REZOLUCJA I KONEKSJA

Zalety:

REZOLUCJA I KONEKSJA

Zalety:

- Formalna prostota systemu

REZOLUCJA I KONEKSJA

Zalety:

- Formalna prostota systemu
- Ogromna ilość wypracowanych strategii szukania dowodu i realizujących je w praktyce programów automatycznego dowodzenia twierdzeń (por. dalej)

REZOLUCJA I KONEKSJA

Wady:

REZOLUCJA I KONEKSJA

Wady:

1. Konieczność sprowadzania do postaci normalnych

REZOLUCJA I KONEKSJA

Wady:

1. Konieczność sprowadzania do postaci normalnych
2. Utrata struktury analizowanego problemu

REZOLUCJA I KONEKSJA

Wady:

1. Konieczność sprowadzania do postaci normalnych
2. Utrata struktury analizowanego problemu
3. Dowody mało czytelne dla człowieka

REZOLUCJA I KONEKSJA

Wady:

1. Konieczność sprowadzania do postaci normalnych
2. Utrata struktury analizowanego problemu
3. Dowody mało czytelne dla człowieka

ad 1. dla wielu logik brak dobrze zdefiniowanych postaci normalnych;

REZOLUCJA I KONEKSJA

Wady:

1. Konieczność sprowadzania do postaci normalnych
2. Utrata struktury analizowanego problemu
3. Dowody mało czytelne dla człowieka

ad 1. dla wielu logik brak dobrze zdefiniowanych postaci normalnych;
nawet w KRZ etap sprowadzania problemu do postaci normalnej może zasadniczo spowolnić rozwiązanie.

REZOLUCJA I KONEKSJA

Wady:

1. Konieczność sprowadzania do postaci normalnych
2. Utrata struktury analizowanego problemu
3. Dowody mało czytelne dla człowieka

ad 1. dla wielu logik brak dobrze zdefiniowanych postaci normalnych;
nawet w KRZ etap sprowadzania problemu do postaci normalnej może zasadniczo spowolnić rozwiązanie.
Stąd różne wersje bezklauzulowych systemów rezolucji (Fitting, Stachniak) i systemów koneksji sprowadzających problem bezpośrednio do jego matrycy.

ODRZUCANIE

Łukasiewicz 1939

Reguły i wyrażenia odrzucone w KRZ:

ODRZUCANIE

Łukasiewicz 1939

Reguły i wyrażenia odrzucone w KRZ:

$\dashv \varphi$ oznacza, że φ jest odrzucone (nie jest tezą)

ODRZUCANIE

Łukasiewicz 1939

Reguły i wyrażenia odrzucone w KRZ:

$\dashv \varphi$ oznacza, że φ jest odrzucone (nie jest tezą)

- $\vdash \varphi \rightarrow \psi, \dashv \psi \ / \ \dashv \varphi$

ODRZUCANIE

Łukasiewicz 1939

Reguły i wyrażenia odrzucone w KRZ:

$\dashv \varphi$ oznacza, że φ jest odrzucone (nie jest tezą)

- $\vdash \varphi \to \psi, \dashv \psi \; / \; \dashv \varphi$
- $\dashv \sigma(\varphi) \; / \; \dashv \varphi$, gdzie σ oznacza dowolne podstawienie
- $\dashv p$

RDN

Łączenie różnych systemów dedukcyjnych:

RDN

Łączenie różnych systemów dedukcyjnych:

Motywacje: uzyskać system, który pozwala optymalnie wykorzystać zalety rozmaitych metod i zminimalizować ich wady.

RDN

Łączenie różnych systemów dedukcyjnych:

Motywacje: uzyskać system, który pozwala optymalnie wykorzystać zalety rozmaitych metod i zminimalizować ich wady.

Jedno z możliwych rozwiązań – RDN (Rezolucja + DN)
Indrzejczak 2002

RDN

Łączenie różnych systemów dedukcyjnych:

Motywacje: uzyskać system, który pozwala optymalnie wykorzystać zalety rozmaitych metod i zminimalizować ich wady.

Jedno z możliwych rozwiązań – RDN (Rezolucja + DN) Indrzejczak 2002

- Rezolucja – prostota struktury systemu, efektywność dowodzenia, podatność na automatyzację

RDN

Łączenie różnych systemów dedukcyjnych:

Motywacje: uzyskać system, który pozwala optymalnie wykorzystać zalety rozmaitych metod i zminimalizować ich wady.

Jedno z możliwych rozwiązań – RDN (Rezolucja + DN)
Indrzejczak 2002

- Rezolucja – prostota struktury systemu, efektywność dowodzenia, podatność na automatyzację
- DN – naturalność dowodzenia, czytelność wyniku, bogactwo strategii szukania dowodu

RDN

Pojęcia wstępne:

RDN

Pojęcia wstępne:

Skrótowa notacja:

RDN

Pojęcia wstępne:

Skrótowa notacja:

α	α_1	α_2	β	β_1	β_2
$\varphi \wedge \psi$	φ	ψ	$\neg(\varphi \wedge \psi)$	$\neg\varphi$	$\neg\psi$
$\neg(\varphi \vee \psi)$	$\neg\varphi$	$\neg\psi$	$\varphi \vee \psi$	φ	ψ
$\neg(\varphi \rightarrow \psi)$	φ	$\neg\psi$	$\varphi \rightarrow \psi$	$\neg\varphi$	ψ

RDN

Pojęcia wstępne:

Skrótowa notacja:

α	α_1	α_2	β	β_1	β_2
$\varphi \wedge \psi$	φ	ψ	$\neg(\varphi \wedge \psi)$	$\neg\varphi$	$\neg\psi$
$\neg(\varphi \vee \psi)$	$\neg\varphi$	$\neg\psi$	$\varphi \vee \psi$	φ	ψ
$\neg(\varphi \rightarrow \psi)$	φ	$\neg\psi$	$\varphi \rightarrow \psi$	$\neg\varphi$	ψ

Uogólniona klauzula to dowolny skończony zbiór formuł (klauzula pusta to $\perp$)

RDN

Reguły inferencji dla KRZ na uogólnionych klauzulach:

RDN

Reguły inferencji dla KRZ na uogólnionych klauzulach:

(W)	$\Gamma \;/\; \Gamma, \varphi$
(Rez)	$\Gamma, \varphi \;;\; \Gamma, \neg\varphi \;//\; \Gamma$
(NN)	$\Gamma, \neg\neg\varphi \;//\; \Gamma, \varphi$
(α)	$\Gamma, \alpha \;//\; \Gamma, \alpha_1 \;;\; \Gamma, \alpha_2$
(β)	$\Gamma, \beta \;//\; \Gamma, \beta_1, \beta_2$

RDN

Reguły inferencji dla KRZ na uogólnionych klauzulach:

(W)	$\Gamma \;/\; \Gamma, \varphi$
(Rez)	$\Gamma, \varphi \;;\; \Gamma, \neg\varphi \;//\; \Gamma$
(NN)	$\Gamma, \neg\neg\varphi \;//\; \Gamma, \varphi$
(α)	$\Gamma, \alpha \;//\; \Gamma, \alpha_1 \;;\; \Gamma, \alpha_2$
(β)	$\Gamma, \beta \;//\; \Gamma, \beta_1, \beta_2$

Uwaga: można uprościć w dowodach stosowanie reguł dwuprzesłankowych dopuszczając różne klauzule w przesłankach.

RDN

Co to daje?

RDN

Co to daje?

Przykład prostego dowodu:

RDN

Co to daje?

Przykład prostego dowodu:

1	DØW: $p \vee (q \wedge r) \to (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$[8, \to D]$
2	$p \vee (q \wedge r)$	z
3	$p, q \wedge r$	$(2, \beta)$
4	p, q	$(3, \alpha)$
5	p, r	$(3, \alpha)$
6	$p \vee q$	$(4, \beta)$
7	$p \vee r$	$(5, \beta)$
8	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$(6, 7, \alpha)$

RDN

Co to daje?

Przykład prostego dowodu:

1	DØW: $p \vee (q \wedge r) \rightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$[8, \rightarrow D]$
2	$p \vee (q \wedge r)$	z
3	$p, q \wedge r$	$(2, \beta)$
4	p, q	$(3, \alpha)$
5	p, r	$(3, \alpha)$
6	$p \vee q$	$(4, \beta)$
7	$p \vee r$	$(5, \beta)$
8	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$(6, 7, \alpha)$

Uwaga 1: Proszę porównać go z dowodem w "zwykłym" DN

RDN

Co to daje?

Przykład prostego dowodu:

1	DØW: $p \vee (q \wedge r) \rightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$[8, \rightarrow D]$
2	$p \vee (q \wedge r)$	z
3	$p, q \wedge r$	$(2, \beta)$
4	p, q	$(3, \alpha)$
5	p, r	$(3, \alpha)$
6	$p \vee q$	$(4, \beta)$
7	$p \vee r$	$(5, \beta)$
8	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$(6, 7, \alpha)$

Uwaga 1: Proszę porównać go z dowodem w "zwykłym" DN
Uwaga 2: Po odwróceniu kolejności kroków mamy dowód implikacji odwrotnej!

RDN

Reguły konstrukcji dowodu:

RDN

Reguły konstrukcji dowodu:

W RDN można wszystkie standardowe reguły sprowadzić do jednej reguły – subsumpcji:

RDN

Reguły konstrukcji dowodu:

W RDN można wszystkie standardowe reguły sprowadzić do jednej reguły – subsumpcji:

[Sub] jeżeli $X; -\varphi_1; \ldots; -\varphi_i \vdash \Delta$, to $X \vdash \Gamma$, gdzie:

RDN

Reguły konstrukcji dowodu:

W RDN można wszystkie standardowe reguły sprowadzić do jednej reguły – subsumpcji:

[Sub] jeżeli $X; -\varphi_1; \ldots ; -\varphi_i \vdash \Delta$, to $X \vdash \Gamma$, gdzie:

- X to zbiór klauzul

RDN

Reguły konstrukcji dowodu:

W RDN można wszystkie standardowe reguły sprowadzić do jednej reguły – subsumpcji:

[Sub] jeżeli $X; -\varphi_1; \ldots; -\varphi_i \vdash \Delta$, to $X \vdash \Gamma$, gdzie:

- X to zbiór klauzul
- Γ jest niepustą klauzulą

RDN

Reguły konstrukcji dowodu:

W RDN można wszystkie standardowe reguły sprowadzić do jednej reguły – subsumpcji:

[Sub] jeżeli $X; -\varphi_1; \ldots; -\varphi_i \vdash \Delta$, to $X \vdash \Gamma$, gdzie:

- X to zbiór klauzul
- Γ jest niepustą klauzulą
- $\Delta \subseteq \Gamma$

RDN

Reguły konstrukcji dowodu:

W RDN można wszystkie standardowe reguły sprowadzić do jednej reguły – subsumpcji:

[Sub] jeżeli $X; -\varphi_1; \ldots; -\varphi_i \vdash \Delta$, to $X \vdash \Gamma$, gdzie:

- X to zbiór klauzul
- Γ jest niepustą klauzulą
- $\Delta \subseteq \Gamma$
- $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_i\} \subseteq \Gamma$, $i \geq 0$.

RDN

Reguły konstrukcji dowodu:

RDN

Reguły konstrukcji dowodu:

Schemat zastosowania [Sub]:

RDN

Reguły konstrukcji dowodu:

Schemat zastosowania [Sub]:

$$
\begin{array}{lll}
 & X & \\
k & \text{DØW:} & \Gamma \\
k+1 & & \boxed{\begin{array}{c} -\varphi_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ -\varphi_i \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta \end{array}} \\
\cdot & & \\
\cdot & & \\
k+i & & \\
\cdot & & \\
\cdot & & \\
n & &
\end{array}
$$

RDN

Reguły konstrukcji dowodu:

Schemat zastosowania [Sub]:

$$
\begin{array}{lll}
 & X & \\
k & \text{DØW:} & \Gamma \\
k+1 & & -\varphi_1 \\
. & & . \\
. & & . \\
k+i & & -\varphi_i \\
. & & . \\
. & & . \\
n & & \Delta
\end{array}
$$

Dowód $\varphi_1, ..., \varphi_n \vdash \psi$ w RDN sprowadza się do dowodu klauzuli $\neg\varphi_1, ..., \neg\varphi_n, \psi$

RDN

Przykład dowodu:

RDN

Przykład dowodu:

wykaż, że $p \rightarrow (q \rightarrow r), \neg(p \rightarrow r) \vdash p \wedge \neg q$.

RDN

Przykład dowodu:

wykaż, że $p \to (q \to r), \neg(p \to r) \vdash p \land \neg q$.

1	DØW: $\neg(p \to (q \to r)), p \to r, p \land \neg q$	$[10, Sub]$
2	$p \to (q \to r)$	z
3	$\neg(p \to r)$	z
4	$\neg p, q \to r$	$(2, \beta)$
5	$\neg p, \neg q, r$	$(4, \beta)$
6	p	$(3, \alpha)$
7	$\neg r$	$(3, \alpha)$
8	$\neg q, r$	$(5, 6, Rez)$
9	$\neg q$	$(7, 8, Rez)$
10	$p \land \neg q$	$(6, 9, \alpha)$

RDN

Uwagi końcowe:

RDN

Uwagi końcowe:

- RDN pozwala w wielu wypadkach na dowody krótsze od dowodów w DN czy w REZ

RDN

Uwagi końcowe:

- RDN pozwala w wielu wypadkach na dowody krótsze od dowodów w DN czy w REZ
- w przeciwieństwie do standardowego DN można w nim dla każdej tezy zbudować dowód nie zawierający poddowodów

RDN

Uwagi końcowe:

- RDN pozwala w wielu wypadkach na dowody krótsze od dowodów w DN czy w REZ
- w przeciwieństwie do standardowego DN można w nim dla każdej tezy zbudować dowód nie zawierający poddowodów
- w przeciwieństwie do standardowego DN pozwala także na falsyfikację formuł nietautologicznych i niepoprawnych rozumowań

RDN

Uwagi końcowe:

- RDN pozwala w wielu wypadkach na dowody krótsze od dowodów w DN czy w REZ
- w przeciwieństwie do standardowego DN można w nim dla każdej tezy zbudować dowód nie zawierający poddowodów
- w przeciwieństwie do standardowego DN pozwala także na falsyfikację formuł nietautologicznych i niepoprawnych rozumowań
- można na jego bazie zbudować analityczną procedurę szukania dowodu

RDN

Uwagi końcowe:

- RDN pozwala w wielu wypadkach na dowody krótsze od dowodów w DN czy w REZ
- w przeciwieństwie do standardowego DN można w nim dla każdej tezy zbudować dowód nie zawierający poddowodów
- w przeciwieństwie do standardowego DN pozwala także na falsyfikację formuł nietautologicznych i niepoprawnych rozumowań
- można na jego bazie zbudować analityczną procedurę szukania dowodu
- poszerzenie na KRK i na wiele logik nieklasycznych jest stosunkowo łatwe

BIBLIOGRAFIA

BETH E., *Semantic Entailment and Formal Derivability*, Mededelingen der Kon. Ned. Akad. v. Wet. 18 13, 1955.

BETH E. W., *The Foundations of Mathematics* North Holland, Amsterdam 1959.

BORKOWSKI L., J. SŁUPECKI, *A Logical System based on rules and its applications in teaching Mathematical Logic*, Studia Logica 1958, 7: 71–113.

CHANG, C.,L. and R.,C.,T., LEE, *Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving*, Academic Press, Orlando 1973.

COPI I. M., *Symbolic Logic*, The Macmillan Company, New York 1954.

CORCORAN, J. 'Aristotle's Natural Deduction System', in: J. Corcoran (ed.), **Ancient Logic and its Modern Interpretations**, Reidel, Dordrecht 1972.

BIBLIOGRAFIA

FITCH, F., *Symbolic Logic*, Ronald Press Co, New York 1952.

FITTING, M., *First-Order Logic and Automated Theorem Proving*, Springer, Berlin 1996.

GALLIER, J.,H., *Logic for Computer Science*, Harper and Row, New York 1986.

GENTZEN G., *Über die Existenz unabhängiger Axiomensysteme zu unendlichen Satzsystemen*, Mathematische Annalen 1932, 107:329–350.

GENTZEN G., *Untersuchungen über das Logische Schliessen*, Mathematische Zeitschrift 1934, 39: 176–210; 39: 405–431.

GENTZEN G., *Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie*, Mathematische Annalen 1936, 112: 493–565.

BIBLIOGRAFIA

Handbook of Tableau Methods, M. D'Agostino i in. (eds.), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1999.

HERBRAND J., abstract in: Comptes Rendus des Seances de l'Academie des Sciences 1928, vol. 186, 1275 Paris.

HERBRAND J., *Recherches sur la theorie de la demonstration*, 1930, Travaux de la Societe des Sciences et des Lettres de Varsovie, Classe III, Sciences Mathematiques et Physiques, Warsovie.

HERMES H., *Einführung in die Mathematische Logik*, Teubner, Stuttgart 1963.

HERTZ P., *Über Axiomensysteme für beliebige Satzsysteme*, Mathematische Annalen 1929, 101: 457–514.

HINTIKKA J., *Form and Content in Quantification Theory*, Acta Philosophica Fennica 1995, 8: 8–55.

BIBLIOGRAFIA

INDRZEJCZAK, A., ‘Jaśkowski and Gentzen Approaches to Natural Deduction and Related Systems‘ in: K. Kijania-Placek and J. Woleński (eds.), **The Lvov-Warsw School and Contemporary Philosophy**, pp. 253–264, Kluwer, Dordrecht 1998.

INDRZEJCZAK, .A., ‘Resolution based Natural Deduction‘, *Bulletin of the Section of Logic* 31(3):159–170, 2002.

INDRZEJCZAK, .A., *Natural Deduction, Modal Logic and Hybrid Systems*, Springer Verlag, Berlin 2009

JAŚKOWSKI, S., ‘Teoria dedukcji oparta na dyrektywach założeniowych‘ in: Księga Pamiątkowa I Polskiego Zjazdu Matematycznego, 1929 Uniwersytet Jagielloński, Kraków.

JAŚKOWSKI, S., ‘On the Rules of Suppositions in Formal Logic‘ *Studia Logica* 1:5–32, 1934.

BIBLIOGRAFIA

KALISH, D., and R. MONTAGUE, ‘Remarks on Descriptions and Natural Deduction‘, *Archiv. für Mathematische Logik und Grundlagen Forschung* 3:50–64, 65–73, 1957.

KALISH, D., and R. MONTAGUE, *Logic, Techniques of Formal Reasoning*, Harcourt, Brace and World, New York 1964.

KLEENE S. C., *Introduction to Metamathematics* North Holland, Amsterdam 1952.

KNEALE W., M. KNEALE, *The Development of Logic*, Clarendon Press, Oxford 1962.

LIS, Z., ‘Wynikanie semantyczne a wynikanie formalne‘ *Studia Logica* 10:39–60, 1960.

LOVELAND D. W., *Automated Theorem Proving: a Logical Basis*, North Holland, Amsterdam 1978.

BIBLIOGRAFIA

ŁUKASIEWICZ J. *Aristotle's Syllogistic from the Standpoint of Modern Logic*, Clarendon Press, Oxford 1951.

NEGRI, S., and J. von PLATO, *Structural Proof Theory*, Cambridge University Press, Cambridge 2001.

PELLETIER F. J. *A Brief History of Natural Deduction*, History and Philosophy of logic 1999, 20: 1–31.

PLATO VON J., 'Gentzen's prof of normalization for ND', *The Bulletin of Symbolic Logic* 14(2):240–257, 2008.

PRAWITZ, D. *Natural Deduction*, Almqvist and Wiksell, Stockholm 1965.

QUINE W. Van O., *Methods of Logic*, Colt, New York 1950.

RASIOWA H., R. SIKORSKI, *The Mathematics of Metamathematics*, PWN, Warszawa 1963.

BIBLIOGRAFIA

SCHÜTTE K., *Proof Theory*, Springer, Berlin 1977.
SMULLYAN, R., *First-Order Logic*, Springer, Berlin 1968.
SUPPES P., *Introduction to Logic*, Van Nostrand, Princeton 1957.
SUSZKO R., *W sprawie logiki bez aksjomatów*, Kwartalnik Filozoficzny 1948, 17(3/4): 199–205.
SZABO M. E. *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*, North-Holland, Amsterdam 1969.
TARSKI A., Fundamentale Begriffe der Methodologie der deduktiven Wissenschaften, Monatschefte für Mathematik und Physik 1930, 37:361–404.
THOMASON R., *Symbolic Logic*, Macmillan, New York 1970.
WÓJCICKI, R. *Theory of Logical Calculi*, Kluwer, Dordrecht 1988.