ANDRZEJ INDRZEJCZAK

WPROWADZENIE DO RACHUNKU SEKWENTÓW
– ZAGADNIENIA METODOLOGICZNE, ZASTOSOWANIA

Planowana zawartość:

OD AUTORA

Rachunki sekwentowe to potężne narzędzie współczesnej teorii dowodu, które pozwala ujawnić wiele interesujących własności systemów logiki i teorii dedukcyjnych. Jednak w Polsce, kraju o wielkich tradycjach logicznych, znajomość tych systemów formalnych jest niewystarczająca. Przygotowywana przeze mnie praca to – w zamierzeniu – elementarne wprowadzenie, które ma przybliżyć polskiemu odbiorcy problematykę zastosowań rachunków sekwentowych.

Na następnych stronach można znaleźć wstępną (i niepełną) wersję pierwszego rozdziału. W nawiasach kwadratowych podane są informacje o przewidywanych uzupełnieniach. Mimo że materiał jest niekompletny, to zdecydowałem się umieścić go na stronie w przekonaniu, że nawet w takiej postaci może okazać się przydatny dla osób zainteresowanych problematyką teorii dowodu. W miarę postępów w pisaniu będę dokonywał uzupełnień tekstu na stronie. Będę wdzięczny za wszelkie uwagi krytyczne i sugestie dotyczące tekstu.

Rozdział 1

Metody Gentzena w KRZ

1.1 Rachunek sekwentów – geneza

Określenie *rachunek sekwentów* (RS) stosowane jest współcześnie w odniesieniu do obszernej grupy systemów dedukcyjnych o zbliżonym charakterze. Systemy takie często określa się też – ze względu na nazwisko autora – systemami Gentzena. Chociaż w konkretnych przypadkach mogą pojawić się wątpliwości natury klasyfikacyjnej, to systemy RS, zwłaszcza w klasycznej postaci, wyraźnie odróżniają się od systemów aksjomatycznych, dedukcji naturalnej, rezolucji, czy tablicowych. Systemy RS mają też znacznie dłuższą historię od innych popularnych rodzajów formalizacji, jak systemy rezolucji, czy systemy tablicowe. RS łączy zresztą z tymi rodzajami systemów dedukcyjnych bardzo bliski związek, co pokażemy dalej.

Systemy RS wywodzą się z badań Gentzena z lat 30-tych (Gentzen []) nad utworzeniem formalizmów alternatywnych do aksjomatycznych systemów. Badania te zaowocowały stworzeniem dwóch rodzajów takich systemów: dedukcji naturalnej i rachunku sekwentów. Poszukiwanie pierwszego było właściwym celem Gentzena, natomiast drugi rodzaj formalizacji był przez niego postrzegany jako pomocniczy i czysto techniczny środek dla udowodnienia równoważności systemu DN z systemem aksjomatycznym (dla logiki intuicjonistycznej i klasycznej). Jednak właśnie rachunek sekwentów i udowodnione przez Gentzena *twierdzenie o eliminacji cięcia* otworzyło drogę zarówno do konstrukcji pierwszych systemów automatycznego dowodzenia opracowanych przez Hintikkę[] i Betha [], jak i do rozwoju nowoczesnej teorii dowodu. Obecnie systemy RS znajduje zastosowanie przede wszystkim w rozważaniach teoretycznych z zakresu teorii dowodu, konstruowanie jednak nowych rachunków tego typu dla logik nieklasycznych ma również znaczenie praktyczne, np. dla automatycznego dowodzenia twierdzeń.

Nazwa RS pochodzi od podstawowych jednostek, na których zdefiniowane są reguły. Gentzen zapożyczył ten pomysł od Hertza[], ale dokonał jego daleko idącej modyfikacji. Poniżej zaprezentujemy oryginalny RS Gentzena nazwany przez niego LK (Lögische Kalkül) oraz jego podstawowe warianty wypracowane z myślą o specjalnych zastosowaniach.

1.2 Rachunek sekwentów LK Gentzena

Definicja 1 (Sekwent LK) Sekwent *to para uporządkowana skończonych ciągów (list) formuł rozdzielonych symbolem* $\Rightarrow$. *Dowolny sekwent jest więc obiektem o postaci* $\varphi_1, ..., \varphi_k \Rightarrow \psi_1, ..., \psi_n$, *z* $k \geq 0, n \geq 0$. *Ponieważ dla oznaczenia dowolnych ciągów formuł używać będziemy liter* $\Gamma, \Delta, \Theta, \Lambda, \Xi, \Pi, \Sigma$, *więc zapis* $\Gamma \Rightarrow \Delta$ *też oznacza sekwent.* Γ *to* poprzednik, *a* Δ *to* następnik *sekwentu. Zarówno poprzednik, jak i następnik sekwentu mogą być ciągami pustymi. Sekwenty, które zawierają tylko zmienne zdaniowe będziemy nazywali* sekwentami atomowymi.

Uwaga 1. Podając przykłady konkretnych sekwentów nie będziemy używali ostrych nawiasów dla zaznaczania ciągów formuł z poprzednika i następnika. Przykładowo, sekwent z $\Gamma := \langle p, q \vee r, \neg r\rangle$, $\Delta := \langle p \rightarrow \neg q, s \wedge r\rangle$ zapiszemy następująco: $p, q \vee r, \neg r \Rightarrow p \rightarrow \neg q, s \wedge r$. Zapis postaci $\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \varphi$ oznaczać będzie sekwent, którego poprzednik stanowi konkatenację ciągów Γ i Π, a natępnik to konkatenacja ciągu Δ i jednoelementowego ciągu $\langle\varphi\rangle$. Rezygnacja z użycia standardowych teoriomnogościowych oznaczeń sprzyja nie tylko uproszczeniu zapisu ale i jego większej uniwersalności, gdyż w wielu rozważanych dalej wariantach Γ i Δ nie będą oznaczały ciągów formuł ale multizbiory (zbiory z powtórzeniami) lub zwykłe zbiory formuł. W każdym przypadku będziemy stosować tę samą formę zapisu sekwentu zaznaczając jedynie jakiego typu obiektami są składniki sekwentów. I tak w przypadku gdy sekwenty będą zwykłymi zbiorami zapis postaci $\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \varphi$ oznaczać będzie sekwent, którego poprzednik to suma zbiorów Γ i Π, a natępnik to suma zbioru Δ i jednoelementowego zbioru $\{\varphi\}$. Na początek przyjrzymy się jednak oryginalnej postaci rachunku pochodzącej od Gentzena.

Uwaga 2. Zauważmy, że dopuszczenie pustych ciągów jako składników sekwentu powoduje, że za sekwenty należy uznać nie tylko obiekty o postaci $p, q \vee r, \neg r \Rightarrow$, czy $\Rightarrow p \rightarrow \neg q, s \wedge r$, ale nawet $\Rightarrow$. Sekwent z pustym poprzednikiem i następnikiem pełnił będzie zresztą – jak się przekonamy – ważną funkcję. Będziemy też stosowali zapis $\Gamma \Rightarrow$ i $\Rightarrow \Delta$ w przypadku schematów sekwentów z ustalonym pustym następnikiem lub poprzednikiem.

Definicja 2 (Rachunek sekwentów LK) *Rachunek składa się z jednego schematu sekwentu aksjomatycznego oraz zbioru reguł pozwalających na dedukcję nowego sekwentu (sekwentu-wniosku) z pary sekwentów lub pojedynczego sekwentu (sekwenty-przesłanki).*

Oto lista reguł podanych przez Gentzena, dająca adekwatną formalizację **KRZ**:

Reguły strukturalne

(AX) $\varphi \Rightarrow \varphi$

(Cut) $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}$

$(W\Rightarrow)$ $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ $\qquad$ $(\Rightarrow W)$ $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}$

$(C\Rightarrow)$ $\dfrac{\varphi, \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ $\qquad$ $(\Rightarrow C)$ $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \varphi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}$

$(P\Rightarrow)$ $\dfrac{\Pi, \varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Pi, \psi, \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ $\qquad$ $(\Rightarrow P)$ $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi, \varphi, \Pi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi, \Pi}$

Reguły logiczne

$(\neg\Rightarrow)$ $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}{\neg\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ $\qquad$ $(\Rightarrow\neg)$ $\dfrac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\varphi}$

$(\wedge\Rightarrow)$ $\dfrac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi\wedge\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ $\qquad$ $(\wedge\Rightarrow)$ $\dfrac{\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi\wedge\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$

$(\Rightarrow\wedge)$ $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi\wedge\psi}$ $\qquad$ $(\vee\Rightarrow)$ $\dfrac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi\vee\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$

$(\Rightarrow\vee)$ $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi\vee\psi}$ $\qquad$ $(\Rightarrow\vee)$ $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi\vee\psi}$

$(\rightarrow\Rightarrow)$ $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \psi, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\varphi\rightarrow\psi, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}$ $\qquad$ $(\Rightarrow\rightarrow)$ $\dfrac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi\rightarrow\psi}$

Reguły strukturalne dotyczą jedynie najogólniejszych operacji dokonywanych na elementach sekwentów, które są niezależne od kształtu formuł. Inaczej można powiedzieć, że reguły strukturalne tworzą teorię $\Rightarrow$. Reguły logiczne podają warunki wprowadzania stałych logicznych, a dokładniej formuły z taką stałą do sekwentu. Tworzą one teorię rozważanych stałych logicznych. Dla każdej stałej reguły logiczne pozwalają na jej wprowadzenie zarówno do poprzednika jak i do następnika sekwentu. Nazwy reguł logicznych odzwierciedlają tę ich funkcję. W regułach strukturalnych W oznacza osłabianie (weakening), C – kontrakcję, a P – permutację; (Cut) pochodzi stąd, że formuła φ występująca w obu przesłankach ulega niejako wycięciu w sekwencie-wniosku. Nazwa "osłabianie" może brzmieć dosyć zagadkowo, wyjaśnimy jej sens później. W dalszym ciągu mówiąc po prostu o zastosowaniach reguł strukturalnych bez precyzowania czy chodzi o reguły z następnika czy z poprzednika sekwentu, będziemy używali oznaczeń typu (W), (C), (P) lub określeń "osłabianie", itp.

Przykład:

$$\frac{p \wedge q, q \rightarrow r \Rightarrow \neg q, p \rightarrow r \qquad p \wedge q, q \rightarrow r \Rightarrow \neg q, \neg s}{p \wedge q, q \rightarrow r \Rightarrow \neg q, (p \rightarrow r) \wedge \neg s}$$

daje nam przykład zastosowania ($\Rightarrow \wedge$), natomiast

$$\frac{p \wedge q, q \rightarrow r \Rightarrow \neg q, p \rightarrow r, \neg r \qquad p \vee q, q \rightarrow r, q \wedge r \Rightarrow \neg(p \vee r), \neg s}{\neg r \rightarrow p \vee q, p \wedge q, q \rightarrow r, q \rightarrow r, q \wedge r \Rightarrow \neg q, p \rightarrow r, \neg(p \vee r), \neg s}$$

daje przykład zastosowania ($\rightarrow\Rightarrow$). Zauważmy, że w przypadku ($\Rightarrow \wedge$) mamy takie same ciągi $\Gamma := p \wedge q, q \rightarrow r$ i $\Delta := \neg q$ w obu przesłankach i we wniosku. Dla odmiany w przykładzie dla ($\rightarrow\Rightarrow$) mamy różne ciągi w przesłankach, natomiast we wniosku pojawia się konkatenacja tych ciągów, stąd np. $q \rightarrow r$, które jest ostatnim elementem Γ i pierwszym elementem Π we wniosku występuje dwukrotnie.

Dla precyzyjnej analizy dowodów w RS przydatne jest wyróżnienie pewnych elementów w zastosowaniu reguł.

Definicja 3 (Elementy reguł sekwentowych) *Formuła, która powstaje w wyniku zastosowania danej reguły logicznej to* formuła zasadnicza *tego sekwentu, formuła bądź formuły, które posłużyły do jej uzyskania, to* formuły poboczne *sekwentów-przesłanek, natomiast wszystkie pozostałe elementy zbiorów Γ i Δ, to* formuły parametryczne *(krótko parametry) w zastosowaniu danej reguły. W regułach strukturalnych wszystkie wyróżnione w schematach reguł formuły φ, ψ to formuły zasadnicze w zastosowaniu tych reguł.*

przykładowo: w podanym przykładzie zastosowania ($\rightarrow\Rightarrow$)$\neg r$ i $p \vee q$ to formuły poboczne przesłanek, a $\neg r \rightarrow p \vee q$ to formuła zasadnicza wniosku; pozostałe formuły to parametry.

Zorganizowane zastosowania reguł RS pozwalają budować dowody sekwentów. Intuicyjnie, *dowodem sekwentu w RS* jest drzewo binarne, którego każdy liść jest sekwentem aksjomatycznym, korzeń jest dowodzonym sekwentem, a poszczególne węzły są uzyskane w wyniku zastosowania wymienionych wyżej reguł. Precyzyjną definicję sformułujemy następująco:

Definicja 4 (Dowód sekwentu) *1. Każde jednoelementowe drzewo, którego węzeł jest sekwentem aksjomatycznym S jest* dowodem sekwentu *S.*

2. Jeżeli $\mathcal{D}$ jest dowodem sekwentu S, to drzewo uzyskane przez dopisanie sekwentu S' poniżej sekwentu S jest dowodem sekwentu S', pod warunkiem, że S jest podstawieniem przesłanki a S' jest podstawieniem wniosku jednej z reguł jednoprzesłankowych.

3. Jeżeli $\mathcal{D}$ jest dowodem sekwentu S a $\mathcal{D}'$ jest dowodem S', to drzewo uzyskane przez dopisanie sekwentu S" poniżej sekwentów S i S' jest dowodem sekwentu S", pod warunkiem, że S jest podstawieniem lewej przesłanki, *S' jest podstawieniem prawej przesłanki, a S" jest podstawieniem wniosku jednej z reguł dwuprzesłankowych.*

4. *Nic więcej nie jest dowodem sekwentu w RS.*

To, że sekwent $\Gamma \Rightarrow \Delta$ ma dowód będziemy zaznaczać pisząc $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$. W szczególności dowód sekwentu $\Rightarrow \varphi$ (pusty poprzednik, jednoelementowy następnik), to dowód tezy φ.

Podana definicja dowodu jest indukcyjna. Ma to ważne konsekwencje, gdyż do dowodów w RS można będzie stosować dowody przez indukcję.

[we wstępie omów 2 rodzaje indukcji po drzewach – por. Segerberg[]]

Zazwyczaj zapisuje się dowody w RS jako drzewa z korzeniem na dole, co oddaje strukturę zależności logicznych (procesu inferencji) od aksjomatów w dół do sekwentu dowodzonego. Jako przykład zaprezentujemy dowód tzw. sylogizmu Fregego, często występującego w roli jednego z aksjomatów **KRZ**.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$p \Rightarrow p$}
\AxiomC{$p \Rightarrow p$}
\AxiomC{$q \Rightarrow q$}
\LeftLabel{$(\rightarrow\Rightarrow)$}
\BinaryInfC{$p \rightarrow q, p \Rightarrow q$}
\AxiomC{$r \Rightarrow r$}
\RightLabel{$(\rightarrow\Rightarrow)$}
\BinaryInfC{$q \rightarrow r, p \rightarrow q, p \Rightarrow r$}
\RightLabel{$(\rightarrow\Rightarrow)$}
\BinaryInfC{$p \rightarrow (q \rightarrow r), p, p \rightarrow q, p \Rightarrow r$}
\RightLabel{$(P \Rightarrow)$}
\UnaryInfC{$p, p \rightarrow (q \rightarrow r), p \rightarrow q, p \Rightarrow r$}
\RightLabel{$(P \Rightarrow)$}
\UnaryInfC{$p, p \rightarrow (q \rightarrow r), p, p \rightarrow q \Rightarrow r$}
\RightLabel{$(P \Rightarrow)$}
\UnaryInfC{$p, p, p \rightarrow (q \rightarrow r), p \rightarrow q \Rightarrow r$}
\RightLabel{$(C \Rightarrow)$}
\UnaryInfC{$p, p \rightarrow (q \rightarrow r), p \rightarrow q \Rightarrow r$}
\RightLabel{$(\Rightarrow\rightarrow)$}
\UnaryInfC{$p \rightarrow (q \rightarrow r), p \rightarrow q \Rightarrow p \rightarrow r$}
\RightLabel{$(P \Rightarrow)$}
\UnaryInfC{$p \rightarrow q, p \rightarrow (q \rightarrow r) \Rightarrow p \rightarrow r$}
\RightLabel{$(\Rightarrow\rightarrow)$}
\UnaryInfC{$p \rightarrow (q \rightarrow r) \Rightarrow (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$}
\RightLabel{$(\Rightarrow\rightarrow)$}
\UnaryInfC{$\Rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$}
\end{prooftree}
$$

W przedstawionym dowodzie zwraca uwagę duża ilość zastosowań reguł strukturalnych. W dalszym ciągu zazwyczaj takie "oczywiste" kroki w dowodzie będziemy pomijać zaznaczając miejsce ich występowania za pomocą podwójnej kreski. Powyższy dowód w takiej skondensowanej formie będzie więc wyglądał następująco:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$p \Rightarrow p$}
\AxiomC{$p \Rightarrow p$}
\AxiomC{$q \Rightarrow q$}
\LeftLabel{$(\rightarrow\Rightarrow)$}
\BinaryInfC{$p \rightarrow q, p \Rightarrow q$}
\AxiomC{$r \Rightarrow r$}
\RightLabel{$(\rightarrow\Rightarrow)$}
\BinaryInfC{$q \rightarrow r, p \rightarrow q, p \Rightarrow r$}
\RightLabel{$(\rightarrow\Rightarrow)$}
\BinaryInfC{$p \rightarrow (q \rightarrow r), p, p \rightarrow q, p \Rightarrow r$}
\doubleLine
\RightLabel{$(\Rightarrow\rightarrow)$}
\UnaryInfC{$p \rightarrow (q \rightarrow r), p \rightarrow q \Rightarrow p \rightarrow r$}
\doubleLine
\RightLabel{$(\Rightarrow\rightarrow)$}
\UnaryInfC{$p \rightarrow (q \rightarrow r) \Rightarrow (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$}
\RightLabel{$(\Rightarrow\rightarrow)$}
\UnaryInfC{$\Rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$}
\end{prooftree}
$$

Poniższy lemat pozwala zauważyć pewne zależności między formułami w poprzedniku i następniku dowiedlnego sekwentu i zarazem uświadomić sobie pewne intuicje związane z pojęciem sekwentu.

Lemat 1 *Dla dowolnego sekwentu* $\Gamma \Rightarrow \Delta$, *z* $\Gamma = \varphi_1, ..., \varphi_i, \Delta = \psi_1, ..., \psi_k, i, k > 0$ *podane niżej 4 formy są równoważne:*

1. $\vdash \varphi_1, ..., \varphi_i \Rightarrow \psi_1, ..., \psi_k$
2. $\vdash \varphi_1, ..., \varphi_i, \neg\psi_1, ..., \neg\psi_k \Rightarrow$
3. $\vdash\Rightarrow \neg\varphi_1, ..., \neg\varphi_i, \psi_1, ..., \psi_k$
4. $\vdash \varphi_1 \wedge .... \wedge \varphi_i \Rightarrow \psi_1 \vee ... \vee \psi_k$

[dowód]

Ograniczenie się do sekwentów z jednoelementowym następnikiem pozwala dodatkowo ujawnić związek $\Rightarrow$ z implikacją, co oddaje poniższy:

Lemat 2 *Dla dowolnego sekwentu* $\varphi_1, ..., \varphi_i \Rightarrow \psi, i > 0$ *podane niżej 3 formy są równoważne:*

1. $\vdash \varphi_1, ..., \varphi_i \Rightarrow \psi$
2. $\vdash\Rightarrow \varphi_1 \to (\varphi_2 \to ..., (\varphi_i \to \psi)...)$
3. $\vdash\Rightarrow \varphi_1 \wedge .... \wedge \varphi_i \to \psi$

[dowód]

Dla dalszych rozważań nad dowodami w LK (lub innych wariantach RS) wygodnie jest wprowadzić dodatkową terminologię.

Definicja 5

1. *Ciąg sekwentów tworzy gałąź w dowodzie S wtw jego pierwszym elementem jest sekwent aksjomatyczny, a ostatnim jest S oraz każdy sekwent w tym ciągu oprócz ostatniego jest (jedną) przesłanką pewnej reguły, której wnioskiem jest kolejny sekwent z tego ciągu.*
2. *Sekwent S_1 jest nad sekwentem S_2 lub poprzedza S_2 (a S_2 jest pod S_1 lub następuje po S_1) w dowodzie wtw istnieje gałąź w tym dowodzie, która zawiera S_1 jako wcześniejszy a S_2 jako późniejszy element. Jeżeli między S_1 a S_2 nie ma żadnego innego sekwentu, to mówimy o* bezpośrednim *poprzedzaniu (następowaniu po).*
3. *Zastosowanie reguły R poprzedza lub jest nad zastosowaniem reguły R' (R' następuje po R lub jest pod R) w dowodzie wtw wniosek R jest nad wnioskiem R'. Jeżeli dodatkowo wniosek R jest przesłanką zastosowania R' to mamy bezpośrednie poprzedzanie (następowanie po).*

4. *Jeżeli S występuje w dowodzie $\mathcal{D}$, to zbiór zawierający S oraz wszystkie sekwenty, które są nad S w $\mathcal{D}$ jest poddowodem $\mathcal{D}$ (i dowodem S). Jeżeli $\mathcal{D}'$ jest poddowodem $\mathcal{D}$, to $\mathcal{D}$ jest jego dowodem nadrzędnym (naddowodem).*

Wprowadzimy też pewne uogólnienie pojęcia dowodu sekwentu S; drzewo, w którym niekoniecznie każdy liść jest sekwentem aksjomatycznym, ale które spełnia pozostałe dwa warunki definicji dowodu, to *dedukcja sekwentu* S. Niech $\mathcal{D}$ będzie dedukcją S, a X oznacza zbiór wszystkich liści drzewa $\mathcal{D}$, które nie są sekwentami aksjomatycznymi, wtedy $\mathcal{D}$ jest dedukcją S z X, co zaznaczamy $X \vdash$ S. W szczególności dedukcja z pustym X jest dowodem S. Z punktu widzenia zastosowania RS jako metody rozstrzygalnej szczególne znaczenie będą miały dedukcje z (nieaksjomatycznych) sekwentów atomowych i sposoby ich konstruowania. Oczywiście terminologia z poprzedniej definicji stosuje się też do dedukcji, z tym, że gałąź w dedukcji nie musi się zaczynać od sekwentu aksjomatycznego. W przypadku dedukcji mówimy też o poddedukcji, chociaż w szczególnych wypadkach poddedukcja może być poddowodem nawet jeżeli nadrzędna dedukcja nie jest dowodem.

1.3 Adekwatność LK-KRZ

Skąd wiemy, że przedstawiony zestaw reguł daje nam adekwatną formalizację klasycznego rachunku zdań?

Gentzen udowodnił adekwatność LK wykazując jego równoważność z aksjomatycznym ujęciem **KRZ**, udowodnił zatem twierdzenie:[1]

Twierdzenie 1 (Równoważność LK z H) $\vdash_H \varphi$ *wtw* $\vdash\Rightarrow \varphi$

Przyjmijmy wersję **KRZ** z regułą MP jako jedyną regułą inferencji oraz z następującą listą schematów aksjomatów.

1. $\varphi \to (\psi \to \varphi)$
2. $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$
3. $\varphi \wedge \psi \to \varphi$
4. $\varphi \wedge \psi \to \psi$
5. $\varphi \to (\psi \to \varphi \wedge \psi)$
6. $\varphi \to \varphi \vee \psi$
7. $\psi \to \varphi \vee \psi$

[1] Gentzen faktycznie udowodnił równoważność 3 systemów: LK, H i DN.

8. $(\varphi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \vee \psi \to \chi))$

9. $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$

Udowodnimy teraz jedną z implikacji składających się na powyższe twierdzenie:

Lemat 3 *Jeżeli* $\vdash_H \varphi$, *to* $\vdash \Rightarrow \varphi$

Dowód lematu wymaga skonstruowania w LK schematów dowodów wszystkich aksjomatów oraz wykazania, że każde zastosowanie MP w dowodzie w H daje się odtworzyć w LK. Dowody większości aksjomatów są łatwe i zachęcamy do ich samodzielnej konstrukcji. Dowód dla konkretnego podstawienia aksjomatu 2. podaliśmy w poprzednim paragrafie – wystarczy w nim zamienić każde wystąpienie p na φ, q na ψ a r na χ i otrzymamy ogólny schemat dowodu każdej instancji tego aksjomatu.

Pokażemy teraz schemat dowodu dla aksjomatu 8.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\varphi \Rightarrow \varphi$}
\AxiomC{$\chi \Rightarrow \chi$}
\LeftLabel{$(\to\Rightarrow)$}
\BinaryInfC{$\varphi \to \chi, \varphi \Rightarrow \chi$}
\doubleLine
\LeftLabel{$(W \Rightarrow)$}
\UnaryInfC{$\varphi, \psi \to \chi, \varphi \to \chi \Rightarrow \chi$}
\AxiomC{$\psi \Rightarrow \psi$}
\AxiomC{$\chi \Rightarrow \chi$}
\RightLabel{$(\to\Rightarrow)$}
\BinaryInfC{$\psi \to \chi, \psi \Rightarrow \chi$}
\doubleLine
\RightLabel{$(\Rightarrow W)$}
\UnaryInfC{$\psi, \psi \to \chi, \varphi \to \chi \Rightarrow \chi$}
\LeftLabel{$(\vee \Rightarrow)$}
\BinaryInfC{$\varphi \vee \psi, \psi \to \chi, \varphi \to \chi \Rightarrow \chi$}
\LeftLabel{$(\Rightarrow\to)$}
\UnaryInfC{$\psi \to \chi, \varphi \to \chi \Rightarrow \varphi \vee \psi \to \chi$}
\LeftLabel{$(\Rightarrow\to)$}
\UnaryInfC{$\varphi \to \chi \Rightarrow (\psi \to \chi) \to (\varphi \vee \psi \to \chi)$}
\LeftLabel{$(\Rightarrow\to)$}
\UnaryInfC{$\Rightarrow (\varphi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \vee \psi \to \chi))$}
\end{prooftree}
$$

Jeżeli chodzi o zastosowania MP, to w LK odpowiada im następująca figura dowodowa:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\mathcal{D}_2$}
\noLine
\UnaryInfC{$\Rightarrow \varphi$}
\AxiomC{$\mathcal{D}_1$}
\noLine
\UnaryInfC{$\Rightarrow \varphi \to \psi$}
\AxiomC{$\varphi \Rightarrow \varphi$}
\AxiomC{$\psi \Rightarrow \psi$}
\RightLabel{$(\to\Rightarrow)$}
\BinaryInfC{$\varphi \to \psi, \varphi \Rightarrow \psi$}
\RightLabel{(Cut)}
\BinaryInfC{$\varphi \Rightarrow \psi$}
\RightLabel{(Cut)}
\BinaryInfC{$\Rightarrow \psi$}
\end{prooftree}
$$

gdzie $\mathcal{D}_1$ i $\mathcal{D}_2$ to symulacje (w LK) dowodów w H obu tez stanowiących przesłanki zastosowania MP. ■

Aby udowodnić implikację w drugą stronę musiał jednak Gentzen dokonać jakiejś formy przekładu sekwentów na uboższy język aksjomatycznej formalizacji. Dowolny sekwent o postaci $\varphi_1, ..., \varphi_i \Rightarrow \psi_1, ..., \psi_k$ z $i > 0, k > 0$ należy zinterpretować jako formułę postaci $\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_i \to \psi_1 \vee ... \vee \psi_k$. W przypadku $i = 1$ lub $k = 1$ mamy do czynienia ze zredukowaną (jednoelementową) koniunkcją lub alternatywą. Łatwo zauważyć zbieżność tej interpretacji z wynikami podanymi w lematach 1 i 2. Pozostaje kwestia interpretacji sekwentów z pustym poprzednikiem lub następnikiem. Pusty poprzednik sekwentu interpretujemy jako $\top$ natomiast pusty następnik jako $\bot$, zatem sekwent $\Rightarrow \psi_1, ..., \psi_k$

interpretujemy jako $\top \rightarrow \psi_1 \vee ... \vee \psi_k$, lub – prościej – jako $\psi_1 \vee ... \vee \psi_k$, natomiast $\varphi_1, ..., \varphi_i \Rightarrow$ jako $\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_i \rightarrow \bot$ lub – w myśl defincji negacji – jako $\neg(\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_i)$. Sekwent z pustym poprzednikiem i następnikiem oznacza po prostu $\bot$, gdyż $\top \rightarrow \bot \leftrightarrow \neg\top \vee \bot \leftrightarrow \bot \vee \bot \leftrightarrow \bot$.

Dla wykazania, że $\vdash\Rightarrow \varphi$ implikuje $\vdash_H \varphi$ Gentzen udowodnił, że przekład każdej reguły LK daje nam regułę dowiedlną w systemie aksjomatycznym. Pominiemy ten syntaktyczny dowód, gdyż jest to ćwiczenie w aksjomatycznym dowodzeniu, co nie jest przedmiotem tej pracy. Zamiast tego udowodnimy semantyczny lemat o przystosowaniu LK, co wymaga z kolei uprzedniego zdefiniowania sposobu semantycznej interpretacji sekwentów. Można oczywiście odwołać się do podanego wyżej sposobu przekładu sekwentów na formuły, wygodniej jest jednak zrobić to bezpośrednio, wzmacniając semantykę przez podanie dodatkowego warunku prawdziwości sekwentów o postaci:

$v(\Gamma \Rightarrow \Delta) = 1$ wtw przynajmniej jedna formuła w poprzedniku jest fałszywa lub przynajmniej jedna w następniku jest prawdziwa.

W oczywisty sposób na sekwenty poszerza się inne ważne pojęcia semantyczne: tautologiczności, wynikania itp.

[rozwiń]

To, że sekwent jest tautologiczny będziemy zaznaczać w taki sam sposób jak w przypadku formuł poprzez użycie $\models$. Łatwo wykazać, że taki sposób semantycznej interpretacji sekwentu jest zgodny z syntaktyczną interpretacją zaproponowaną przez Gentzena. Ujmuje to poniższy lemat:

Fakt 1 $v(\varphi_1, ...\varphi_i \Rightarrow \psi_1, ...\psi_k) = 1$ *wtw* $v(\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_i \rightarrow \psi_1 \vee ... \vee \psi_k) = 1$

[Dowód]

Przy zadanej wyżej interpretacji możemy wykazać:

Lemat 4 *Każda reguła LK jest normalna*

Należy pokazać, że przy dowolnym wartościowaniu, jeżeli przesłanki reguły są prawdziwe, to wniosek też.

[dwa przykłady]

Lemat 5 (Przystosowanie) *Jeżeli* $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$*, to* $\models \Gamma \Rightarrow \Delta$

Dowód przez indukcję po długości dowodu $\Gamma \Rightarrow \Delta$. Dowód bazy jest oczywisty, gdyż każdy jednoelementowy dowód to sekwent aksjomatyczny, który jest tautologią. Pokazujemy, że dowód sekwentu $\Gamma \Rightarrow \Delta$ o długości n jest dowodem tautologii przy założeniu, że każdy dowód krótszy spełnia ten warunek. Ponieważ dowód każdej z przesłanek sekwentu $\Gamma \Rightarrow \Delta$ ma długość mniejszą od n, więc przesłanki podpadają pod założenie indukcyjne i są sekwentami tautologicznymi. Zgodnie z poprzednim lematem każda reguła LK jest normalna, więc wydedukowany sekwent też jest tautologiczny. ■

Ponieważ przedstawiona przez nas aksjomatyka **KRZ** jest pełna, więc lemat 3 implikuje pełność LK a to wraz z ostatnim lematem daje adekwatność LK względem **KRZ**. Niezależne od uzyskanego tutaj wyniku w dalszym ciągu podamy też bezpośrednie dowody pełności dla różnych wariantów RS, które zaprezentujemy w podrozdziale 1.5.

1.4 Warianty reguł i rachunków

Istnieje wiele wariantów RS, które są równoważne rachunkowi LK w sensie posiadania dokładnie takiego samego zbioru sekwentów dowiedlnych, ale wybór takiej lub innej wersji ma wpływ na posiadanie lub brak wielu istotnych własności, które będziemy w dalszym ciągu rozważać. Dlatego w tym paragrafie zbiorczo omówimy kilka najważniejszych modyfikacji i ich bezpośrednich konsekwencji.

Aby wykazać równoważność dwóch systemów RS i RS' musimy pokazać, że każda reguła RS jest regułą wyprowadzalną lub dopuszczalną w RS' i odwrotnie. Reguła $\frac{S_1, ..., S_n}{S}$ jest wyprowadzalna w RS wtedy, gdy w RS mamy dedukcję S z $S_1, ..., S_n$. Reguła $\frac{S_1, ..., S_n}{S}$ jest dopuszczalna w RS wtedy, gdy jeżeli w RS mamy dowody sekwentów $S_1, ..., S_n$, to mamy też dowód S. Oczywiście każda reguła wyprowadzalna jest regułą dopuszczalną, gdyż do dedukcji S z $S_1, ..., S_n$ wystarczy dodać dowód każdej z przesłanek (tj. dopisać go nad odpowiednim sekwentem S_i) i uzyskujemy w ten sposób dowód S. Zależność w drugą stronę nie zachodzi[2]. Wykazywanie dopuszczalności reguły, która nie jest w danym systemie wyprowadzalna wymaga zazwyczaj sporo wysiłku i pomysłowości i sprowadza się do wykazania, że każde zastosowanie takiej reguły w danym systemie można z dowodu wyeliminować, stąd często zamiast o dopuszczalności mówi się o eliminowalności takiej reguły z danego rachunku. W podrozdziale 1.6. zaprezentujemy dowody eliminowalności (Cut).

Wykazywanie wyprowadzalności reguł jest zadaniem znacznie prostszym; wymaga jedynie skonstruowania schematu dedukcji sekwentu wniosku z przesłanek przy użyciu reguł pierwotnych. Zabiegu takiego już wyżej dokonaliśmy (w dowodzie lematu 3) pokazując, że reguła MP jest w LK wyprowadzalna. W tym podrozdziale ograniczymy się do rozważania takich wariantów reguł LK, które są w nim wyprowadzalne, ale prowadzą do uzyskania nietrywialnych wariantów RS.

[2]Nie mylić ze strukturalną zupełnością aksjomatycznych formalizacji KRZ!

1.4.1 Aksjomaty uogólnione

W sformułowaniu reguł wielu wariantów RS wymaga się, aby każde podstawienie (AX) było sekwentem atomowym. Przy okazji dowodu wielu twierdzeń pokażemy potrzebę takiego obostrzenia, natomiat teraz wykażemy, że takie ograniczenie w stosunku do sekwentów aksjomatycznych nie powoduje osłabienia RS.

Lemat 6 *Jeżeli w RS jedyne sekwenty aksjomatyczne są sekwentami atomowymi, to* $\vdash \varphi \Rightarrow \varphi$ *dla dowolnego* φ

Dowód przeprowadzimy przez indukcję po długości φ. Wystarczy zbudować schematy dowodów pokazujące, że $\varphi \Rightarrow \varphi$ dla φ o dowolnej strukturze można wydedukować z sekwentów $\psi \Rightarrow \psi$, gdzie ψ jest formułą krótszą od φ. Jeżeli $\varphi := \varphi \wedge \psi$, to można zbudować następujący schemat dowodu:

$$\dfrac{(\wedge\Rightarrow)\,\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi} \qquad \dfrac{\psi \Rightarrow \psi}{\varphi \wedge \psi \Rightarrow \psi}\,(\wedge\Rightarrow)}{\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi \wedge \psi}\,(\Rightarrow\wedge)$$

Z drugiej strony dla ułatwienia dowodu wielu twierdzeń wygodne jest dysponowanie uogólnioną wersją aksjomatów, w której na miejscu φ może występować dowolna formuła. Przykładowo korzystaliśmy z tego faktu w dowodzie lematu 1, gdyby aksjomaty w LK były ograniczone do atomowych, to wcześniej musielibyśmy i tak dowieść poprzedni lemat.

Zauważmy że dopuszczalną postać aksjomatów można uogólnić jeszcze bardziej poprzez zastosowanie do tak sekwentów aksjomatycznych reguł osłabiania i permutacji. Odnotujmy to jako

Lemat 7 *Jeżeli ciągi* Γ *i* Δ *mają przynajmniej po jednym wystąpieniu takiej samej formuły, to* $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$

Rozróżnijmy dla wygody możliwe formy aksjomatów: oryginalna forma Gentzena to (Ax_n), czyli sekwent nieatomowy, ale dwuelementowy. Jego ograniczenie do formuł atomowych, to (Ax_a), czyli sekwent dwuelementowy atomowy. Wersja uogólniona (lemat 8), to (UAx_n). W szczególności możemy też ograniczyć się do takiej warsji uogólnionej, gdzie sekwent aksjomatyczny $\Gamma \Rightarrow \Delta$ jest atomowy; oznaczmy ją jako (UAx_a), jest ona dowiedlna bezpośrednio z (Ax_a) przez osłabianie i permutację zastosowane do zmiennych zdaniowych. Jeżeli w grę będzie wchodziła dowolna postać aksjomatu, to będziemy po prostu używać skrótu (Ax). Ponieważ (Ax_a) jest szczególnym przypadkiem wszystkich pozostałych wersji, a one z niego dadzą się wydedukować, więc możemy stwierdzić:

Twierdzenie 2 *Wersje RS z dowolną formą aksjomatu są równoważne.*

1.4.2 Warianty reguł dwuprzesłankowych

Daleko ważniejsza różnica w konstrukcji przyjmowanych reguł dotyczy roli parametrów, czyli kontekstu danej reguły. Zauważmy, że w oryginalnym systemie Gentzena występuje istotna asymetria pomiędzy regułami $(\Rightarrow\wedge)$ i $(\vee\Rightarrow)$ z jednej strony, a (Cut) i $(\rightarrow\Rightarrow)$ z drugiej. W regułach dla $\wedge$ i $\vee$ obie przesłanki mają takie same listy parametrów jak wniosek; w pozostałych regułach 2-przesłankowych listy parametrów we wniosku to konkatenacja różnych list występujących w przesłankach. Łatwo zauważyć, że LK Gentzena można zmodyfikować na dwa różne sposoby dokonując ujednolicenia kształtu reguł. Obie reguły dla $\wedge$ i $\vee$ można zastąpić przez:

$$(\Rightarrow\wedge)\ \frac{\Gamma\Rightarrow\Delta,\varphi \qquad \Pi\Rightarrow\Sigma,\psi}{\Gamma,\Pi\Rightarrow\Delta,\Sigma,\varphi\wedge\psi} \qquad\qquad (\vee\Rightarrow)\ \frac{\varphi,\Gamma\Rightarrow\Delta \qquad \psi,\Pi\Rightarrow\Sigma}{\varphi\vee\psi,\Gamma,\Pi\Rightarrow\Delta,\Sigma}$$

W otrzymanej wersji RS wszystkie reguły 2-przesłankowe są stosowalne bez konieczności uzgodnienia list parametrów w przesłankach, ich zastosowania są zatem niezależne od kontekstu. Reguły takie określać będziemy jako *k-niezależne* (context-free, context-independent).

Z drugiej strony możemy (Cut) i $(\rightarrow\Rightarrow)$ zastąpić przez warianty, w których listy parametrów w obu przesłankach są identyczne jak we wniosku. Obie reguły wyglądają wtedy następująco:

$$(Cut)\ \frac{\Gamma\Rightarrow\Delta,\varphi \qquad \varphi,\Gamma\Rightarrow\Delta}{\Gamma,\Rightarrow\Delta} \qquad\qquad (\rightarrow\Rightarrow)\ \frac{\Gamma\Rightarrow\Delta,\varphi \qquad \psi,\Gamma\Rightarrow\Delta}{\varphi\rightarrow\psi,\Gamma\Rightarrow\Delta}$$

Reguły takie wymagają dla swojego zastosowania jednolitego kontekstu w obu przesłankach, dlatego będziemy je określać jako k-jednolite (context-sharing).

Łatwo wykazać, że reguły k-niezależne są wyprowadzalne z reguł k-jednolitych, przy użyciu osłabiania i permutacji. Natomiast reguły k-jednolite są wyprowadzalne z reguł k-niezależnych przy użyciu kontrakcji.

[Dowód]

To, że w systemie Gentzena występują oba rodzaje reguł wiązało się głównie z tym, że dokonał on równocześnie formalizacji logiki intuicjonistycznej (por. dalej). Poniżej pokażemy, że wybór któregoś rodzaju reguł ma istotne znaczenie, najpierw jednak rozważymy jeszcze jeden wariant reguł sekwentowych.

1.4.3 Reguły Ketonena

Występowanie dwóch reguł $(\Rightarrow\vee)$ i $(\wedge\Rightarrow)$ również wiązało się z kwestią formalizacji logiki intuicjonistycznej i w przypadku RS dla **KRZ** ujawnia pewne trudności. Po pierwsze, w wielu dowodach nie można uniknąć zastosowań kontrakcji.

Przykład

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \Rightarrow p}{q, p \Rightarrow p}\,(W \Rightarrow)}{p \Rightarrow q \rightarrow p}\,(\Rightarrow\rightarrow)}{p \Rightarrow (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)}\,(\Rightarrow \vee)}{p \Rightarrow (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p), q}\,(\Rightarrow W)}{\Rightarrow (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p), p \rightarrow q}\,(\Rightarrow\rightarrow)}{\Rightarrow (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p), (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)}\,(\Rightarrow \vee)}{\Rightarrow (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)}\,(\Rightarrow C)
$$

Taka konstrukcja reguł okazuje się jeszcze bardziej kłopotliwa w przypadku zastosowań RS jako procedury rozstrzygalnej, co omówimy dokładnie dalej. Z drugiej strony łatwo zauważyć, że sposób interpretacji poprzednika jako koniunkcji, a następnika jako alternatywy elementów pozwala uniknąć tych problemów i wprowadzić pojedyncze reguły, tak jak w przypadku implikacji. Reguły takie o postaci:

$$
(\wedge\Rightarrow)\quad \frac{\varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad\qquad (\Rightarrow\vee)\quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}
$$

jako pierwszy wprowadził Ketonen. W dowolnym systemie RS z kontrakcją i osłabianiem reguły Gentzena i Ketonena są równoważne. Aby dowieść wyprowadzalność wariantu Ketonena wystarczy do przesłanki dwukrotnie zastosować wariant Gentzena a następnie kontrakcję; aby dowieść wyprowadzalność wariantu Gentzena wystarczy do przesłanki zastosować osłabianie aby uzyskać brakującą formułę poboczną, a następnie użyć reguły Ketonena. Dowód powyższego sekwentu z użyciem wariantu Ketonena wygląda następująco:

Przykład

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{q \Rightarrow q}{p, q \Rightarrow q}\,(W \Rightarrow)}{q \Rightarrow p \rightarrow q}\,(\Rightarrow\rightarrow)}{q \Rightarrow p \rightarrow q, p}\,(\Rightarrow W)}{\Rightarrow p \rightarrow q, q \rightarrow p}\,(\Rightarrow\rightarrow)}{\Rightarrow (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)}\,(\Rightarrow \vee)
$$

Wprowadzając warianty Ketonena na miejsce reguł Gentzena uzyskujemy nie tylko uproszczenie w repertuarze reguł (tylko jedna zamiast dwóch) i prostsze dowody, ale także ważną własność zwaną odwracalnością, której omówieniu poświęcimy następny paragraf.

1.4.4 Odwracalność reguł

Rozróżnienie pomiędzy regułami k-jednolitymi i k-niezależnymi w przypadku reguł dwuprzesłankowych, oraz wariantami Gentzena i Ketonena dla reguł jednoprzesłankowych ma niebagatelne znaczenie. Oznaczmy system z regułami Ketonena i k-jednolitymi jako RS-K; zachodzi dla niego ważna własność, którą określimy jako odwracalność reguł. Sprowadza się ona do tego, że w regule odwracalnej przesłanki są dedukowalne z wniosku reguły.

Lemat 8 (o odwracalności reguł w RS-K) *W RS-K dla każdej reguły oprócz osłabiania, jeżeli wniosek ma dowód, to przesłanki też*

Pokażemy dowód dla obu reguł z $\wedge$:

przypadek $(\wedge \Rightarrow)$

$$\dfrac{\dfrac{(\Rightarrow\wedge)\ \dfrac{\varphi\Rightarrow\varphi \qquad \psi\Rightarrow\psi}{\varphi,\psi\Rightarrow\varphi\wedge\psi}}{\varphi,\psi,\Gamma\Rightarrow\Delta,\varphi\wedge\psi} \qquad \dfrac{\varphi\wedge\psi,\Gamma\Rightarrow\Delta}{\varphi\wedge\psi,\varphi,\psi,\Gamma\Rightarrow\Delta}}{\varphi,\psi,\Gamma\Rightarrow\Delta}\ (Cut)$$

przypadek $(\Rightarrow \wedge)$

$$\dfrac{(\Rightarrow P)\ \dfrac{(\Rightarrow W)\ \dfrac{\Gamma\Rightarrow\Delta,\varphi\wedge\psi}{\Gamma\Rightarrow\Delta,\varphi\wedge\psi,\varphi}}{\Gamma\Rightarrow\Delta,\varphi,\varphi\wedge\psi} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi\Rightarrow\varphi}{\psi,\varphi\Rightarrow\varphi}\ (W\Rightarrow)}{\varphi,\psi\Rightarrow\varphi}\ (P\Rightarrow)}{\varphi\wedge\psi\Rightarrow\varphi}\ (\wedge\Rightarrow)}{\varphi\wedge\psi,\Gamma\Rightarrow\Delta,\varphi}}{\Gamma\Rightarrow\Delta,\varphi}\ (Cut)$$

Analogicznie dla drugiej przesłanki $(\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi)$ w $(\Rightarrow \wedge)$. Dla innych reguł w podobny sposób. ■

Warto odnotować przy okazji dowodu poprzedniego lematu, dowiedlność kilku sekwentów, które będziemy dalej wykorzystywać. Pojawiają się one jako sekwenty wyprowadzalne z aksjomatów, a nie z przesłanek.

Fakt 2 *W RS dowiedlne są następujące sekwenty:*

- $\varphi \Rightarrow \neg\neg\varphi$
- $\neg\neg\varphi \Rightarrow \varphi$
- $\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi$
- $\varphi \wedge \psi \Rightarrow \psi$
- $\varphi, \psi \Rightarrow \varphi \wedge \psi$
- $\varphi \Rightarrow \varphi \vee \psi$
- $\psi \Rightarrow \varphi \vee \psi$
- $\varphi \vee \psi \Rightarrow \varphi, \psi$

- $\varphi \to \psi, \varphi \Rightarrow \psi$
- $\neg\psi, \varphi \to \psi \Rightarrow \neg\varphi$
- $\Rightarrow \varphi, \varphi \to \psi$
- $\psi \Rightarrow \varphi \to \psi$

Uważny czytelnik, który dowiódł wszystkie aksjomaty w lemacie 3 z pewnością mógł odnotować dowiedlność tych sekwentów już wtedy.

Oczywiście lemat o odwracalności można też dowieść w wersji semantycznej; pozostawiamy to czytelnikom. My korzystając z semantycznej interpretacji pokażemy czemu osłabianie, reguły k-niezależne i G-reguły nie są odwracalne.

Lemat 9 *W LK własność odwracalności nie zachodzi dla reguł:* $(W \Rightarrow), (\Rightarrow W), (Cut), (\to\Rightarrow), (\wedge \Rightarrow), (\Rightarrow \vee)$

[dowód]

[redundancja reguł; relacja konsekwencji Scotta]

1.4.5 Modyfikacje reguł strukturalnych

[1. eliminacja permutacji – multizbiory
2. eliminacja kontrakcji – zbiory
3. Wersja z (UAx) – eliminacja (W) i pełna odwracalność reguł
4. Warianty (Cut) – (Mix)
5. RS Galliera – ciągi ale bez reg. strukt.]

1.5 Pełność RS

Pokażemy obecnie jak można dla RS wykazać dowód o pełności korzystając ze standardowej metody Henkina opartej o wykorzystanie lematu Lindenbauma. Formalizm RS umożliwia eleganckie uogólnienie tej metody. Dowód przedstawimy dla wariantu RS z regułami Ketonena, k-jednolitymi, w którym poprzedniki i następniki sekwentów interpretowane są jako zbiory (tylko (W) jako reguły strukturalne). Oczywiście odpowiednie fragmenty dowodu łatwo zmienić tak aby pasowały do dowolnego innego wariantu RS.

Definicja 6 (Niesprzeczność par zbiorów formuł) (Γ, Δ) *jest niesprzeczna wtw* $\Gamma \Rightarrow \Delta \notin \mathbf{KRZ}$

Oto kilka prostych wniosków z podanej wyżej definicji.

Lemat 10 *Jeżeli* (Γ, Δ) *jest niesprzeczna, to:*

- $\Gamma \cap \Delta = \varnothing$
- (Γ', Δ') *jest niesprzeczna, dla dowolnego* $\Gamma' \subseteq \Gamma$ *i* $\Delta' \subseteq \Delta$

Dowód: W pierwszym wypadku jeżeli $\Gamma \cap \Delta \neq \varnothing$ to istnieje jakieś φ, należące do obu zbiorów. Ponieważ $\varphi \Rightarrow \varphi \in \mathbf{L}$, więc przez (W) mamy dowód $\Gamma \Rightarrow \Delta$, co przeczy założeniu. Podobnie w drugim przypadku, gdyby jakieś (Γ', Δ') było sprzeczne, to wtedy z $\Gamma' \Rightarrow \Delta'$ także wydedukujemy przez (W) $\Gamma \Rightarrow \Delta$. ■

Lemat 11 *Jeżeli* (Γ, Δ) *jest niesprzeczna, to:*

1. *jeżeli* $\varphi \in \Gamma$, *to* $\varphi \notin \Delta$
2. *jeżeli* $\varphi \in \Delta$, *to* $\varphi \notin \Gamma$
3. *jeżeli* $\neg\varphi \in \Gamma$, *to* $\varphi \notin \Gamma$
4. *jeżeli* $\neg\varphi \in \Delta$, *to* $\varphi \notin \Delta$
5. *jeżeli* $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$, *to* $\varphi \notin \Delta$ *i* $\psi \notin \Delta$
6. *jeżeli* $\varphi \wedge \psi \in \Delta$, *to* $\varphi \notin \Gamma$ *lub* $\psi \notin \Gamma$
7. *jeżeli* $\varphi \vee \psi \in \Gamma$, *to* $\varphi \notin \Delta$ *lub* $\psi \notin \Delta$
8. *jeżeli* $\varphi \vee \psi \in \Delta$, *to* $\varphi \notin \Gamma$ *i* $\psi \notin \Gamma$
9. *jeżeli* $\varphi \rightarrow \psi \in \Gamma$, *to* $\varphi \notin \Gamma$ *lub* $\psi \notin \Delta$
10. *jeżeli* $\varphi \rightarrow \psi \in \Delta$, *to* $\varphi \notin \Delta$ *i* $\psi \notin \Gamma$

Dowód: Pierwsze dwa przypadki, to bezpośrednia konsekwencja poprzedniego lematu. Dla ilustracji udowodnimy punkt 9 i 10. Dla 9. załóżmy niewprost, że $\varphi \rightarrow \psi \in \Gamma$ ale $\varphi \in \Gamma$ i $\psi \in \Delta$. Jednak $\varphi \rightarrow \psi, \varphi \Rightarrow \psi \in \mathbf{L}$, więc przez (W) dowiedziemy, że $\Gamma \Rightarrow \Delta \in \mathbf{L}$, co jest sprzeczne z założeniem lematu. Dla 10. zakładamy niewprost, że $\varphi \in \Delta$ lub $\psi \in \Gamma$ chociaż $\varphi \rightarrow \psi \in \Delta$. Zauważmy jednak, że zarówno $\Rightarrow \varphi \rightarrow \psi, \varphi$ jak i $\psi \Rightarrow \varphi \rightarrow \psi$ są dowiedlne (por. Fakt 2), więc w każdym wypadku przez (W) otrzymamy dowód $\Gamma \Rightarrow \Delta$ co przeczy założeniu lematu. ■

Lemat 12 *Jeżeli* (Γ, Δ) *jest niesprzeczna, to* $(\Gamma \cup \{\varphi\}, \Delta)$ *jest niesprzeczna lub* $(\Gamma, \Delta \cup \{\varphi\})$ *jest niesprzeczna, dla dowolnej formuły* φ

Dowód: Załóżmy niewprost, że oba zbiory są sprzeczne, wtedy zarówno $\Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta \in \mathbf{L}$ jak i $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \in \mathbf{L}$. Przez (Cut) otrzymamy $\Gamma \Rightarrow \Delta$, co przeczy założeniu. ■

Aby dowieść pełności metodą Henkina-Lindenbauma musimy uogólnić pojęcie zbioru maksymalnego na pary formuł.

Definicja 7 (Maksymalność par zbiorów formuł) (Γ, Δ) *jest maksymalna wtw* $\Gamma \cup \Delta = FOR$

Oczywiste konsekwencje definicji maksymalności dla par niesprzecznych podaje poniższy:

Lemat 13 *Jeżeli* (Γ, Δ) *jest niesprzeczna i maksymalna, to:*

1. *jeżeli* $\varphi \notin \Gamma$*, to* $\varphi \in \Delta$
2. *jeżeli* $\varphi \notin \Delta$*, to* $\varphi \in \Gamma$
3. *jeżeli* $\neg\varphi \notin \Gamma$*, to* $\varphi \in \Gamma$
4. *jeżeli* $\neg\varphi \notin \Delta$*, to* $\varphi \in \Delta$

Dowód: Dla 3. – gdyby zarówno $\neg\varphi \notin \Gamma$ jak i $\varphi \notin \Gamma$, to – z racji maksymalności – $\{\neg\varphi, \varphi\} \subseteq \Delta$. Ale $\Rightarrow \neg\varphi, \varphi \in \mathbf{L}$, co przeczy niesprzeczności (Γ, Δ). ■

Kolejny lemat to odpowiednik lematu Lindenbauma dla par zbiorów formuł.

Lemat 14 (Lindenbaum) *Jeżeli* (Γ, Δ) *jest niesprzeczna, to istnieje maksymalna i niesprzeczna* (Γ', Δ') *taka, że* $\Gamma \subseteq \Gamma'$ *i* $\Delta \subseteq \Delta'$

Dowód: Z racji przeliczalności FOR możemy uporządkować liniowo ten zbiór i kolejno dodawać każdą formułę do Γ lub Δ. Dokładniej, niech $\varphi_1, \varphi_2, ...$ będzie nieskończoną listą wszystkich formuł . Definiujemy nieskończony ciąg sekwentów $\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0$, $\Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2$, ... taki, że $\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0 := \Gamma \Rightarrow \Delta$, a dla każdego $i \geq 0$, $\Gamma_{i+1} \Rightarrow \Delta_{i+1} := \Gamma_i \Rightarrow \Delta_i, \varphi_{i+1}$, jeżeli $(\Gamma_i, \Delta_i \cup \{\varphi_{i+1}\})$ jest niesprzeczna; w przeciwnym wypadku $\Gamma_{i+1} \Rightarrow \Delta_{i+1} := \Gamma_i, \varphi_{i+1} \Rightarrow \Delta_i$.

Z lematu 12 i konstrukcji ciągu wynika, że na każdym etapie przynajmniej jedna z rozważanej pary sekwentów jest niesprzeczna, zatem każdy kolejny element ciągu sekwentów jest niesprzeczny.

Niech $\Gamma' = \bigcup \Gamma_i$, a $\Delta' = \bigcup \Delta_i$, dla $i < \omega$, jest oczywiste, że $\Gamma' \cup \Delta' = FOR$, (Γ', Δ') jest zatem maksymalna. Załóżmy niewprost, że (Γ', Δ') jest sprzeczna. Ponieważ każdy dowód jest skończony oznacza to, że istnieje skończona para (Π, Σ), taka, że $\Pi \subseteq \Gamma', \Sigma \subseteq \Delta'$ oraz $\Pi \Rightarrow \Sigma$ ma dowód. Z racji skończoności (Π, Σ) istnieje w konstrukcji ciągu sekwentów taki etap i, że $\Pi \subseteq \Gamma_i$ i $\Sigma \subseteq \Delta_i$, ale to oznacza, że $\Gamma_i \Rightarrow \Delta_i$ jest sprzeczna, wbrew temu, co dowiedliśmy wyżej. Z definicji konstrukcji ciągu mamy też, że $\Gamma \subseteq \Gamma'$ i $\Delta \subseteq \Delta'$. Zatem (Γ, Δ) można poszerzyć do niesprzecznej pary maksymalnej. ■

Lemat 15 (truth lemma) *Jeżeli* (Γ, Δ) *jest maksymalna, to istnieje model* $\mathfrak{M}$*, taki, że:*

- $\varphi \in \Gamma$ *wtw* $\mathfrak{M} \models \varphi$

- $\varphi \in \Delta$ *wtw* $\mathfrak{M} \not\models \varphi$

Dowód: Definujemy model przyjmując, że $\mathfrak{M} = \mathrm{Var}(\Gamma)$ i dowodzimy, że spełnia warunki przez indukcję po długości formuł. Baza wynika z definicji. Niech $\varphi := \neg\psi$:

a) jeżeli $\neg\psi \in \Gamma$, to – przez lemat 11, 3. – $\psi \notin \Gamma$, a przez lemat 13, 2. – $\psi \in \Delta$. Z założenia indukcyjnego $\mathfrak{M} \not\models \psi$, zatem $\mathfrak{M} \models \neg\psi$. Podobnie w drugą stronę.

[zakończ dowód]

Uwaga o alternatywnym podejściu. Można sformułować definicję zbioru maksymalnego w podany niżej sposób lub udowodnić taki lemat o własnościach zbioru maksymalnego; jest to przydatne później w dowodach truth lemma, nie powołujemy się wtedy w dowodzie na lemat 11 i lemat 13, ale na samą definicję zbioru maksymalnego (lub stosowny lemat).

Zbiór maksymalny ma następujące własności:

1. $\neg\varphi \in \Gamma$ wtw $\varphi \in \Delta$
2. $\neg\varphi \in \Delta$ wtw $\varphi \in \Gamma$
3. $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$ wtw $\varphi \in \Gamma$ i $\psi \in \Gamma$
4. $\varphi \wedge \psi \in \Delta$ wtw $\varphi \in \Delta$ lub $\psi \in \Delta$
5. $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ wtw $\varphi \in \Gamma$ lub $\psi \in \Gamma$
6. $\varphi \vee \psi \in \Delta$ wtw $\varphi \in \Delta$ i $\psi \in \Delta$
7. $\varphi \to \psi \in \Gamma$ wtw $\varphi \in \Delta$ lub $\psi \in \Gamma$
8. $\varphi \to \psi \in \Delta$ wtw $\varphi \in \Gamma$ i $\psi \in \Delta$

Wtedy dowód warunków w truth lemma wygląda tak:

[podaj przykłady]

Twierdzenie 3 (Pełność) *Jeżeli* $\models \Gamma \Rightarrow \Delta$, *to* $\Gamma \Rightarrow \Delta \in \mathbf{L}$

Dowód: Załóżmy, że $\Gamma \Rightarrow \Delta \notin \mathbf{L}$ co oznacza, że (Γ, Δ) jest niesprzeczna. Zgodnie z lematem 14 istnieje jej maksymalne poszerzenie (Γ', Δ') a zgodnie z lematem 15 istnieje dla tej pary model, taki, że wszystkie elementy Γ' (a zatem i Γ) są w nim spełnione, a wszystkie elementy Δ' (a zatem i Δ) są tam fałszywe. Ale wtedy nie jest prawdą, że $\models \Gamma \Rightarrow \Delta$. ■

1.6 Dowód o eliminacji cięcia

[Uwagi o znaczeniu i naturalności (Cut) oraz o kwestii jego eliminowalności]

1.6.1 Dowód Gentzena

Klasyczna wersja dowodu, przedstawiona przez Gentzena, zawiera potrójną indukcję: po ilości wystąpień cięcia w dowodzie, po długości cut-formuły (parametr ten określany jest przez Gentzena jako grade) i po ilości sekwentów zawierających cut-formułę i występujących nad sekwentem wnioskiem tego zastosowania (Cut). Ten ostatni parametr, rank, zdefiniujmy dokładniej:

Definicja 8 (Rank) *Niech φ będzie cut-formułą, a $\mathcal{B}$ dowolną gałęzią zawierającą lewą przesłankę (Cut). Rank($\mathcal{B}$) to ilość węzłów w tej gałęzi, w których występuje φ i które są nad wnioskiem (Cut). L-rank(φ) to maksymalna wartość rank($\mathcal{B}$), gdzie $\mathcal{B}$ to dowolna z gałęzi zawierających lewą przesłanką (Cut).*
R-rank(φ) definiujemy analogicznie ale dla prawej przesłanki.
Rank(φ)=L-rank(φ)+R-rank(φ).
Głębokość danego zastosowania (Cut) to rank jego cut-formuły.

Dowód będzie przeprowadzony dla oryginalnej wersji RS, jednak ze względu na obecność kontrakcji należy zastąpić (Cut) przez jego uogólnioną wersję – regułę (Mix), określaną także jako (multicut):

$$(Mix)\quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi^k \qquad \varphi^n, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}$$

gdzie $k > 0$ i $n > 0$, to ilość wystąpień cut-formuły w lewej i prawej przesłance. Dlaczego (Cut) zostaje wymienione na (Mix) wyjaśnimy w uwadze .. po przedstawieniu dowodu. Teraz pokażemy, że (Mix) jest równoważne (Cut).

Ponieważ cały dowód jest potrójną indukcją, wieęc warto przeanalizować jego ogólną strukturę, aby ilość detali nie przesłoniła nam jego sensu. Nadrzędna indukcja przebiega po ilości wystąpień (Mix) w dowodzie. Oczywiście w bazie udowadniamy nietrywialny przypadek, że (Mix) jest eliminowalny z każdego dowodu, w którym występuje jeden raz. Następnie wykazujemy, że (Mix) jest eliminowalny z dowodu, w którym występuje $n > 1$, przy założeniu, że jest eliminowalny z każdego dowodu o mniejszej ilości wystąpień (Mix). Cała reszta dowodu przebiega w obrębie dowodu bazy tej pierwszej indukcji. Z tego względu, i ponieważ dowód kroku indukcyjnego jest – jak zobaczymy – dość trywialny, eliminacja cięcia jest w literaturze często prezentowana jako indukcja podwójna zastosowana do każdego dowodu, w którym (Mix) występuje tylko raz.

Nadrzędna indukcja przebiega tutaj po długości cut-formuły – w bazie wykazujemy, że jeśli jest to zmienna, to z dowodu można wyeliminować to (jedyne) wystąpienie (Mix). W kroku indukcyjnym zakładamy, że (Mix) jest eliminowalne w każdym przypadku, gdy długość cut-formuły jest mniejsza od $n > 1$ i wykazujemy, że dowód z (Mix) na cut-formule o długości n można zastąpić przez dowód, w którym każdy (Mix) jest na cut-formule krótszej (a zatem eliminowalny na mocy założenia indukcyjnego). Tym razem to dowód kroku indukcyjnego a nie bazy wymaga przeprowadzenia kolejnej indukcji – po głębokości (Mix). W bazie dowodzimy, że ilekroć rank=2 (w obu przesłankach cut-formuła pojawiła się po raz pierwszy, to można ten dowód zastąpić przez dowody z cut-formułami o mniejszej długości. Dowód kroku indukcyjnego sprowadza się do wykazania, że (Mix), w którym (lewy lub prawy) rank > 1, można zastąpić przez (Mix) o niższej głębokości, który – z założenia indukcyjnego – jest redukowalny.

Schematycznie można więc dowód eliminacji cięcia przedstawić następująco:

I. Indukcja po ilości (Mix)

1.1. Baza: W dowodzie z jednym (Mix), jest on eliminowalny

II. Indukcja po długości cut-formuły

2.1. Baza: (Mix) na formule atomowej jest eliminowalny

2.2. Krok indukcyjny: Jeżeli (Mix) na cut-formule o długości $k < n$ jest eliminowalny, to jest też eliminowalny na cut-formule o długości n

III. Indukcja po głębokości cut-formuły

3.1. Baza: (Mix) na cut-formule o długości n i o rank=2 jest zastępowalny przez (Mix) na cut-formułach o długości $k < n$

3.2. Krok indukcyjny: Jeżeli (Mix) na cut-formule o długości n ma rank > 2, to można go zastąpić przez (Mix) o niższej głębokości

Wniosek z 3.1., 3.2: (Mix) o dowolnej głębokości na cut-formule o długości n można zastąpić przez zastosowania (Mix) na cut-formułach o długości mniejszej

Wniosek z 2.1., 2.2: (Mix) na cut-formule o dowolnej długości jest eliminowalny

1.2. Krok indukcyjny: Jeżeli (Mix) jest eliminowalny w dowodzie, w którym występuje $k < n$ razy, to jest eliminowalny w dowodzie, w którym występuje n razy

Wniosek z 1.1., 1.2: (Mix) jest eliminowalne w każdym dowodzie

[dokładny dowód]

Ilustracja punktu 3.1. Przypadek gdy cut-formuła := $\varphi \wedge \psi$

fragment dowodu o postaci:

$$\dfrac{(\Rightarrow\wedge)\dfrac{\Gamma\Rightarrow\Delta,\varphi \qquad \Pi\Rightarrow\Sigma,\psi}{\Gamma,\Pi\Rightarrow\Delta,\Sigma,\varphi\wedge\psi} \qquad \dfrac{\varphi,\psi,\Lambda\Rightarrow\Xi}{\varphi\wedge\psi,\Lambda\Rightarrow\Xi}(\wedge\Rightarrow)}{\Gamma,\Pi,\Lambda\Rightarrow\Delta,\Sigma,\Xi}(Cut)$$

zostaje zastąpiony przez:

$$\dfrac{\Pi\Rightarrow\Sigma,\psi \qquad \dfrac{\Gamma\Rightarrow\Delta,\varphi \qquad \varphi,\psi,\Lambda\Rightarrow\Xi}{\psi,\Gamma,\Lambda\Rightarrow\Delta,\Xi}(Cut)}{\Gamma,\Pi,\Lambda\Rightarrow\Delta,\Sigma,\Xi}(Cut)$$

[1. Dowód Dragalina z bezpośrednią eliminacją cut
2. Dowody oparte na globalnych transformacjach dowodu: Curry, Buss]

1.7 Konsekwencje eliminacji cięcia

Dlaczego eliminacja cięcia jest tak ważna? Wykazanie że RS bez tej reguły jest systemem równie silnym niesie dla **KRZ**, a także dla innych logik, dla których zachodzi, szereg interesujących konsekwencji. Do najważniejszych należą m.in.: niesprzeczność, rozstrzygalność, konserwatywność, separowalność i zachodzenie twierdzenia o interpolacji.

Większość wymienionych przez nas konsekwencji eliminacji cięcia jest pochodną tzw. *własność podformuł*, którą posiadają wszystkie rozważane przez nas reguły RS oprócz (Cut). W asność ta powoduje, że RS (bez (Cut)) jest systemem analitycznym. Określenia te są używane w różnych znaczeniach, toteż należy je dokładniej wyjaśnić.

1.7.1 Własność podformuł

Określenie własność podformuł jest zazwyczaj używane w odniesieniu do systemów tablicowych, w których wnioski reguł składają się z podformuł przesłanek, względnie z podformuł i ich negacji. W RS mamy niejako odwrotność takiej charakterystyki; reguła posiada tę własność wtedy gdy w sekwentach-przesłankach występują tylko podformuły formuł z sekwentu-wniosku. Łatwo zauważyć, że wszystkie reguły RS oprócz (Cut) posiadają tę własność, wobec tego powiemy, że cały system (tj. RS bez (Cut)) posiada własność podformuł. Na koniec przyjmijmy, że dowód sekwentu S posiada własność podformuł wtedy gdy wszystkie sekwenty w nim występujące składają się tylko z podformuł S. Zauważmy, że jeżeli system RS ma własność podformuł, to i każdy dowód w tym systemie ją posiada, ale nie odwrotnie – wyjaśnimy to poniżej.

1.7.2 Analityczność

Termin *analityczny* używany jest w badaniach nad systemami dowodzenia twierdzeń co najmniej dwojako. W jednym ze znaczeń przeciwstawia się systemy analityczne, jako te w których reguły pozwalają tylko rozbijać formuły na ich części składowe, systemom syntetycznym, w których reguły przeciwnie, pozwalają składać formuły z podformuł. Z tego punktu widzenia systemy tablicowe byłyby systemami analitycznymi, natomiast RS bez (Cut) byłby systemem syntetycznym. Jednak jeżeli za podstawę kwalifikacji systemów przyjąć nie definicję reguł i dowodu w RS, ale sam fakt posiadania własności podformuł, to RS bez (Cut) jest również systemem analitycznym. Jest to uzasadnione zarówno odwracalnością reguł jak i powszechną praktyką konstruowania dowodów w RS. Otóż w praktyce dowód najczęściej konstruuje się "od dołu" zaczynając od sekwentu dowodzonego i systematycznie poszukując dla niego możliwych przesłanek. System RS, który posiada własność podformuł będziemy określać jako *ściśle analityczny.*

Na marginesie warto zauważyć, że często w pracach dotyczących sekwentowych formalizacji, utożsamia się analityczność w tym sensie, z zachodzeniem twierdzenia o eliminacji cięcia. Nie jest to uzasadnione; jest wiele systemów dla logik nieklasycznych, w których cięcie jest eliminowalne, ale nie są one analityczne w tym znaczeniu, gdyż nieusuwalne są inne reguły, które własności podformuł nie spełniają[3].

Z drugiej strony analityczność można rozumieć szerzej, tak że ani własność podformuł ani nawet eliminacja cięcia nie jest wymagana. Wystarczy, że wszystkie dowody konstruowane w systemie mają własność podformuł. Generalnie analityczność oznacza po prostu eliminację indeterminizmu w poszukiwaniu kolejnych kroków konstrukcji dowodu. System ściśle analityczny dobrze spełnia tę rolę, ale nie jest niezbędny; wybory ograniczone do podformuł tego sekwentu, którego dowód usiłujemy skonstruować też gwarantują ograniczenie przestrzeni poszukiwań. Zauważmy, że nawet (Cut) można ograniczyć do takich zastosowań.

[przykład]

Każde zastosowanie reguły, w którym przesłanki zawierają tylko podformuły dowodzonego sekwentu określać będziemy jako analityczne zastosowanie tej reguły, natomiast system, w którym każda reguła jest stosowana analitycznie (czyli każdy dowód spełnia własność podformuł) określimy jako system *analityczny.* Oczywiście każdy system ściśle analityczny jest systemem analitycznym; dowolny system analiyuczny ale nie ściśle analityczny określać będziemy jako system *słabo analityczny.*

[3]Por. dalej np. *Display Calculus* [], czy RS Mintsa [] dla **S5**

1.8 Rozstrzygalność KRZ

Rozważania nad (silną) analitycznością RS bez (Cut) w naturalny sposób prowadzą do problematyki rozstrzygalności.

[Ogólne rozważania nad problematyką rozstrzygalności – niekonstruktywne a konstruktywne dowody rozstrzygalności, warunki, które musi spełniać system aby umożliwić zdefiniowanie procedury rozstrzygalnej]

Przy okazji udowadniania rozstrzygalności dla **KRZ** przy użyciu RS pokażemy że z punktu widzenia automatyzacji procesu dowodzenia i jego efektywności nie jest sprawą obojętną jakiej wersji RS użyjemy. Dlatego najpierw zademonstrujemy procedurę dla LK bez (Cut) a potem pokażemy, jakie korzyści można uzyskać przy zastąpieniu LK przez inne wersje RS.

Niezależnie od stosowanej wersji RS zasadniczy schemat pozostaje ten sam. Dlatego zanim formalnie zdefiniujemy procedury rozstrzygalne dla **KRZ** oparte na różnych wersjach RS i skupimy się na szczegółach, opiszmy krótko jej istotę. Zaczynamy od dowodzonego sekwentu i konstruujemy drzewo dowodowe stosując reguły w porządku odwrotnym, od sekwentu-wniosku do sekwentów-przesłanek. Ponieważ na każdym kroku ilość wyborów jest ograniczona (skończona ilość formuł złożonych w sekwencie-wniosku) więc mamy tutaj do czynienia z ograniczonym niezdeterminowaniem procedury, który łatwo przekształcić w algorytm deterministyczny, np. narzucając porządek wyboru zawsze od lewej ku prawej. Pokażemy, że w **KRZ** daje to zawsze drzewo skończone, które jest bądź dowodem (każda gałąź zakończona liściem, który jest sekwentem aksjomatycznym) bądź umożliwia falsyfikację sprawdzanego sekwentu (co najmniej jedna gałąź zakończona sekwentem atomowym, ale nie aksjomatycznym).

Powyżej użyliśmy określenia "drzewo dowodowe", gdyż efekt stosowania takiej procedury nie musi dać dowodu. Dla potrzeb stosowania RS jako procedury rozstrzygalnej warto wprowadzić formalnie pojęcie drzewa dowodowego sekwentu S, które ułatwi precyzyjne ujęcie etapów poszukiwania dowodu dla sekwentu S oraz wykazywanie odpowiednich własności procedury. Definicja ta zgodna jest z tym, że w praktyce dowód najczęściej konstruuje się "od dołu" zaczynając od sekwentu dowodzonego i systematycznie poszukując dla niego możliwych przesłanek.

Definicja 9 (Drzewo dowodowe sekwentu S) 1. *Każde jednoelementowe drzewo, którego węzeł jest sekwentem S jest* drzewem dowodowym sekwentu S.

2. *Jeżeli S' jest nieatomowym liściem w drzewie dowodowym sekwentu S, to drzewo uzyskane przez dopisanie sekwentu T powyżej sekwentu S' jest drzewem dowodowym sekwentu S, pod warunkiem, że T jest podstawieniem przesłanki a S' jest podstawieniem wniosku jednej z reguł jednoprzesłankowych.*

3. *Jeżeli S' jest nieatomowym liściem w drzewie dowodowym sekwentu S, to drzewo uzyskane przez dopisanie sekwentów T i T' powyżej sekwentu S' jest drzewem dowodowym sekwentu S, pod warunkiem, że T jest podstawieniem lewej przesłanki, T' jest podstawieniem prawej przesłanki, a S' jest podstawieniem wniosku jednej z reguł dwuprzesłankowych.*

4. *Nic więcej nie jest drzewem dowodowym sekwentu S.*

Warto porównać tę definicję z definicją dowodu (i dedukcji) sekwentu. Obie są indukcyjnymi definicjami szczególnego rodzaju drzew, jednak budowanymi w różny sposób. Definicja dowodu zaczyna od liści i pokazuje jak dojść do korzenia, natomiast definicja drzewa dowodowego zaczyna od korzenia i pokazuje jak dojść do liści. Definicja taka jest przydatniejsza jako podstawa dla stosowania indukcji wstępującej po gałęziach konstruowanego drzewa. Zależność między dwoma ujęciami oddaje poniższy:

Lemat 16 *$\mathcal{D}$ jest dedukcją S z X wtw $\mathcal{D}$ jest drzewem dowodowym sekwentu S, w którym X jest podzbiorem zbioru liści.*

[dowód]

Szczególnie ważne są takie drzewa dowodowe, których już nie da się poszerzyć, nazwijmy je kompletnymi.

Definicja 10 (drzewo dowodowe kompletne) *Jest to drzewo dowodowe, w którym każdy liść jest sekwentem atomowym*

Dla drzew dowodowych zachodzi ważny:

Lemat 17 *Każde drzewo dowodowe sekwentu S można poszerzyć do drzewa kompletnego*

[dowód – definicja algorytmu dla LK]

Prostą konsekwencją powyższego lematu jest:

Lemat 18 *Każde kompletne drzewo dowodowe sekwentu S jest dowodem S albo dedukcją S z niepustego zbioru atomowych sekwentów X.*

1.8.1 Zbieżność

Pojęcie zbieżności (ang. confluency) systemu ma sens tylko na gruncie takich formalizacji, które pozwalają na definiowanie algorytmów poszukiwania dowodu. Dla RS można tą własność zdefinować następująco:

Definicja 11 *System RS jest zbieżny wtw, jeżeli sekwent jest dowiedlny, to dowolne drzewo dowodowe z tym sekwentem jako korzeniem można poszerzyć tak, że uzyskamy dowód tego sekwentu.*

Innymi słowy, bez względu na to, w jakiej kolejności zastosujemy reguły, próbując konstrukcji dowodu od końca, to i tak w rezultacie otrzymamy dowód, o ile sprawdzany sekwent jest dowiedlny. Systemy zbieżne są wygodne z punktu widzenia automatycznego dowodzenia twierdzeń, gdyż nie zmuszają do uwzględniania możliwości powrotu (backtracking) do wcześniejszych etapów konstrukcji, jeżeli dokonaliśmy po drodze "złych" wyborów, zatem mniej obciążają pamięć programu. Z punktu widzenia rezultatu w systemach zbieżnych nie ma złych wyborów, choć takie a nie inne wybory mogą mieć niebanalny wpływ na rozmiary otrzymanego dowodu.

Łatwo zauważyć, że w procesie poszukiwania dowodu dla LK możemy być zmuszeni do wielokrotnych powrotów i zaczynania poszukiwań dowodu od nowa. Przyczyną braku zbieżności LK jest występowanie kontrakcji, osłabiania, G-reguły ($\Rightarrow \vee$) i ($\wedge \Rightarrow$) oraz k-niezależna reguła ($\rightarrow\Rightarrow$).

[zilustruj przykładami]

Problemów takich możemy uniknąć jeżeli procedurę oprzemy na wariancie RS-K, czyli z regułami Ketonena i k-jednolitymi. Można wtedy dowieść:

Lemat 19 (zbieżność) *Jeżeli S jest dowiedlne w RS-K, to każde drzewo dowodowe sekwentu S można poszerzyć do dowodu S w RS-K*

[dowód]

[kwestie efektywności – obliczanie przestrzeni poszukiwania dowodu]

1.9 Dowód analityczny pełności

Zaprezentowane w poprzednim podrozdziale procedury rozstrzygalne pokazują, że do problemu adekwatności RS bez (Cut) ożna podejść w sposób bezpośredni, tzn. zbudować konstruktywny dowód pełności. Twierdzenie o pełności będzie bezpośrednią konsekwencją następującego lematu:

Lemat 20 *Jeżeli istnieje dedukcją S z niepustego zbioru atomowych sekwentów X, to S jest sekwentem falsyfikowalnym.*

Dla potrzeb wykazania pełności analitycznej wersji RS wprost (tj. bez odwoływania się do twierdzenia o pełności dla wersji z (Cut) i do faktu jej eliminowalności), potrzebujemy nowego pojęcie, które jest osłabieniem pojęcia maksymalności. Chodzi o pojęcie nasycania w dół albo saturacji. Można je wprowadzić na dwa sposoby:

a) bezpośredni:

Definicja 12 (Γ, Δ) *jest (w dół) nasycony wtw:*

1. *jeżeli* $\neg\varphi \in \Gamma$*, to* $\varphi \in \Delta$
2. *jeżeli* $\neg\varphi \in \Delta$*, to* $\varphi \in \Gamma$
3. *jeżeli* $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$*, to* $\varphi \in \Gamma$ *i* $\psi \in \Gamma$
4. *jeżeli* $\varphi \wedge \psi \in \Delta$*, to* $\varphi \in \Delta$ *lub* $\psi \in \Delta$
5. *jeżeli* $\varphi \vee \psi \in \Gamma$*, to* $\varphi \in \Gamma$ *lub* $\psi \in \Gamma$
6. *jeżeli* $\varphi \vee \psi \in \Delta$*, to* $\varphi \in \Delta$ *i* $\psi \in \Delta$
7. *jeżeli* $\varphi \rightarrow \psi \in \Gamma$*, to* $\varphi \in \Delta$ *lub* $\psi \in \Gamma$
8. *jeżeli* $\varphi \rightarrow \psi \in \Delta$*, to* $\varphi \in \Gamma$ *i* $\psi \in \Delta$

Uwaga. Niektórzy dodają warunek niesprzeczności do definicji saturacji, ma to wpływ na prostsze sformułowanie twierdzeń o istnieniu modelu, ale w przypadku, gdy chcemy definiować algorytmy szukania dowodu poprzez saturację, to lepiej tego nie przesądzać, bo przecież nie wiemy z góry, czy sprawdzany sekwent jest dowiedlny czy nie.

b) pośrednio (np. Goré []) można zdefiniować nasycanie poprzez pojęcie domknięcia na zastosowanie reguły

Definicja 13 (Γ, Δ) *jest (w dół) nasycony wtw: jest niesprzeczna i* $\Gamma \Rightarrow \Delta$ *jest domknięty na ka.zdą regułę*

Oczywiście najpierw trzeba zdefiniować pojęcie domknięcia sekwentu na daną regułę, np. w taki sposób:

Definicja 14 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ *jest domknięty na regułę*
a) jednoprzesłankową wtw, jeżeli formuła zasadnicza tej reguły należy do sekwentu, to formuły poboczne też należą.
b) dwuprzesłankową wtw, jeżeli formuła zasadnicza tej reguły należy do sekwentu, to co najmniej jedna formuła poboczna też należy.

Lemat 21 (Saturacja) *Jeżeli* $\Gamma \Rightarrow \Delta \notin \mathbf{L}$*, to istnieje nasycone* (Π, Σ)*, takie, że:*
a) $(\Pi, \Sigma) \subseteq SF(\Gamma, \Delta)$
b) $\Pi \Rightarrow \Sigma \notin \mathbf{L}$ *(jest niesprzeczny)*

gdzie $SF(\Gamma, \Delta)$ oznacza zbiór wszystkich podformuł występujących w formułach z $\Gamma \cup \Delta$.

Lemat ten można dowieść na dwa sposoby:

a) definiujemy algorytm szukania dowodu i pokazujemy, że jeżeli weźmiemy w uzyskanym drzewie dowolną otwartą gałąź, to para uogólnionych sum formuł ze wszystkich sekwentów tej gałęzi daje taką parę. Trzeba wykazać że taka para jest nasycona i że spełnia warunek a), natomiast warunek b) jest spełniony z definicji (otwarta gałąź). Algorytm podany w poprzednim podrozdziale spełnia te warunki.

[pokaż]

b) Definiujemy algorytm nasycania a wykazać należy, że otrzymana para spełnia warunek a) i b). Zademonstrujemy tę metodę poniżej jednak najpierw musimy wykazać lemat o odwracalności reguł gdyż odwołamy się do niego w dowodzie. Uwaga, nie możemy wykorzystać lematu o odwracalności reguł podanego w podrozdziale o wariantach reguł, gdyż tamten dowód wykorzystywał (Cut), my natomiast chcemy się odwołać do faktu, że reguły rachunku bez cut też tę własność posiadają.

Lemat 22 (o odwracalności reguł (invertibility lemma)) *Dla każdej reguły, jeżeli wniosek ma dowód, to przesłanki też*

Dowód indukcyjny po długości dowodu sekwentu-wniosku.

Baza: Dowód ma długość 1, zatem jest to uogólniony (Ax). Niech to będzie np. $\Gamma, p \Rightarrow p, \Delta, \varphi \wedge \psi$, wtedy obie przesłanki mają postać $\Gamma, p \Rightarrow p, \Delta, \varphi$ i $\Gamma, p \Rightarrow p, \Delta, \psi$ i obie są dowiedlne. Analogicznie dla innych przypadków.

Założenie indukcyjne mówi, że lemat zachodzi dla dowolnego dowodu wniosku o długości $< n$. Pokazujemy, że zajdzie również gdy dowód ma długość n.

Rozważmy przypadek $(\wedge \Rightarrow)$. Mamy zatem dowód $\mathcal{D}$ długości n zakończony sekwentem $\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$. Jeżeli ostatnia reguła to $(\wedge \Rightarrow)$ z $\varphi \wedge \psi$ jako formułą zasadniczą, to wtedy po obcięciu ostatniego sekwentu z $\mathcal{D}$ mamy dowód $\varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ (długości $n-1$). Jeżeli nie, to $\varphi \wedge \psi$ było formułą parametryczną; przykładowo, jeżeli otatnio zastosowana reguła była 2-przesłankowa, to $\mathcal{D}$ kończy się $\dfrac{\varphi \wedge \psi, \Gamma' \Rightarrow \Delta' \qquad \varphi \wedge \psi, \Gamma'' \Rightarrow \Delta''}{\varphi \wedge \psi, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}$. Ponieważ dowody obu przesłanek mają długość krótszą niż n, to podpadają pod założenie indukcyjne. Zatem mamy dowody sekwentów $\varphi, \psi, \Gamma' \Rightarrow \Delta'$ i $\varphi, \psi, \Gamma'' \Rightarrow \Delta''$. Ale wtedy za pomocą tej samej reguły 2-przesłankowej, która kończyła $\mathcal{D}$ wydedukujemy z nich sekwent $\varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$, czyli przesłankę rozważanego sekwentu. ■

Możemy teraz powrócić do dowodu lematu o nasycaniu.

Definiujemy rekurencyjnie skończony ciąg sekwentów: $\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0$, ... , $\Gamma_n \Rightarrow \Delta_n$.

a) $\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0 := \Gamma \Rightarrow \Delta$, jeżeli nie da się zastosować żadna reguła logiczna, to jest to poszukiwany przez nas sekwent nasycony.

b) Rozważmy przejście od i do $i+1$, niech $\Gamma_i \Rightarrow \Delta_i$ będzie sekwentem otrzymanym w etapie i, który jest niesprzeczny. Jeżeli nie da się zastosować żadna reguła logiczna, to jest to poszukiwany przez nas niesprzeczny sekwent nasycony.

W przeciwnym wypadku wybierz formułę ze względu, na którą (Γ_i, Δ_i) nie jest domknięty. Niech to będzie np. $\varphi \wedge \psi \in \Delta_i$, zatem $\Gamma_i \Rightarrow \Delta_i := \Gamma_i \Rightarrow \Delta_i', \varphi \wedge \psi$ i w grę wchodzi zastosowanie reguły $(\Rightarrow \wedge)$ z przesłanek $\Gamma_i \Rightarrow \Delta_i', \varphi$ i $\Gamma_i \Rightarrow \Delta_i', \psi$. Co najmniej jedna z nich nie ma dowodu, gdyż inaczej, wbrew założeniu, dowiedlny jest $\Gamma_i \Rightarrow \Delta_i$. Wybierz tę przesłankę, która nie ma dowodu – niech to będzie, np. $\Gamma_i \Rightarrow \Delta_i', \varphi$ i zdefiniuj $\Gamma_{i+1} \Rightarrow \Delta_{i+1} := \Gamma_i \Rightarrow \Delta_i', \varphi, \varphi \wedge \psi$.

Zauważmy, że $\Gamma_i \subseteq \Gamma_{i+1}$ i $\Delta_i \subseteq \Delta_{i+1}$, a ponadto $\Gamma_{i+1} \Rightarrow \Delta_{i+1}$ jest domknięta na jedną formułę więcej $(\varphi \wedge \psi)$ niż $\Gamma_i \Rightarrow \Delta_i'$.

Należy jeszcze wykazać, że $\Gamma_{i+1} \Rightarrow \Delta_{i+1}$ też jest niesprzeczne. Załóżmy niewprost, że $\Gamma_{i+1} \Rightarrow \Delta_{i+1}$ ma dowód, wtedy – przez lemat o odwracalności – dowód mają obie przesłanki tego sekwentu, ze względu na regułę $(\Rightarrow \wedge)$, czyli dowód ma $\Gamma_i \Rightarrow \Delta_i', \varphi, \varphi$, skąd przez kontrakcję mamy dowód $\Gamma_i \Rightarrow \Delta_i', \varphi$, wbrew założeniu o jego niesprzeczności.

Powtarzamy tę procedurę aż uzyskamy sekwent nasycony. Jest to proces skończony, gdyż każdy kolejny element ciągu zmniejsza ilość formuł, na które $\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0$ jest niedomknięty. Warunek a) lematu jest spełniony poprzez konstrukcję ciągu, a b) jest spełniony, gdyż jak wykazaliśmy, każdy kolejny element ciągu dziedziczy niesprzeczność z elementu poprzedzającego.

Lemat 23 (truth lemma – wersja analityczna) *Jeżeli* (Γ, Δ) *jest nasycony i niesprzeczny, to istnieje model* $\mathfrak{M}$*, taki, że:*

- *jeżeli* $\varphi \in \Gamma$*, to* $\mathfrak{M} \models \varphi$
- *jeżeli* $\varphi \in \Delta$*, to* $\mathfrak{M} \not\models \varphi$

Dowód: Definujemy model przyjmując, że $\mathfrak{M} = \mathrm{Var}(\Gamma)$ i dowodzimy, że spełnia warunki przez indukcję po długości formuł. Baza wynika z definicji. Niech $\varphi := \neg\psi$:

[zakończ dowód]

W łatwy sposób można dodatkowo przeprowadzić dowód implikacji w drugą stronę.

Lemat 24 *Jeżeli* $\Gamma \Rightarrow \Delta$ *ma model falsyfikujący, to może być poszerzona do niesprzecznego nasyconego sekwentu* $\Pi \Rightarrow \Sigma$*.*

Niech $\mathfrak{M}$ będzie modelem falsyfikującym $\Gamma \Rightarrow \Delta$. Przyjmijmy, że $\Pi = \{\varphi : \mathfrak{M} \models \varphi\}$, a $\Sigma = \{\varphi : \mathfrak{M} \not\models \varphi\}$. Jest oczywiste, że $\Pi \cap \Sigma = \varnothing$ oraz, że $\Gamma \subseteq \Pi$ i $\Delta \subseteq \Sigma$. Porównując warunki nasycenia z definicją relacji spełniania $\models$ widzimy, że (Π, Σ) musi spełniać te warunki, zatem jest nasycony i niesprzeczny. ■

Zatem mamy twierdzenie:

Twierdzenie 4 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ *ma model falsyfikujący, wtw może być poszerzona do niesprzecznego nasyconego sekwentu.*

1.9.1 Pełność RS z analitycznym (Cut)

Na koniec pokażemy, że można też zbudować konstruktywny dowód pełności oparty na analitycznym cięciu. Oto szkic:

Załóżmy, że $\Gamma \Rightarrow \Delta \notin \mathbf{L}$, zatem (Γ, Δ) jest niesprzeczna. Tworzymy skończoną listę $\varphi_1, ...\varphi_n$ wszystkich podformuł $\Gamma \cup \Delta$ i definiujemy ciąg sekwentów $\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0$, ... , $\Gamma_n \Rightarrow \Delta_n$, taki, że $\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0 := \Gamma \Rightarrow \Delta$, a $\Gamma_{i+1} \Rightarrow \Delta_{i+1} := \Gamma_i \Rightarrow \Delta_i, \varphi_{i+1}$, jeżeli $(\Gamma_i, \Delta_i \cup \{\varphi_{i+1}\}$ jest niesprzeczna; w przeciwnym wypadku $\Gamma_{i+1} \Rightarrow \Delta_{i+1} := \Gamma_i, \varphi_{i+1} \Rightarrow \Delta_i$.

Z lematu 12 i konstrukcji ciągu wynika, że każdy jego element, a w szczególności $\Gamma_n \Rightarrow \Delta_n$ jest niesprzeczy. Wystarczy wykazać, że ten sekwent jest też nasycony, a wtedy – przez lemat 23 mamy istnienie modelu falsyfikującego $\Gamma_n \Rightarrow \Delta_n$, a zarazem $\Gamma \Rightarrow \Delta$.

Aby wykazać nasycenie $\Gamma_n \Rightarrow \Delta_n$ wystarczy odwołać się w dowodzie każdego warunku do faktu jego niesprzeczności i odpowiedniego warunku z lematu 11. Przykładowo:

a) załóżmy, że $\varphi \wedge \psi \in \Gamma_n$, wtedy – poprzez lemat 11 war. 5 mamy, że $\varphi \notin \Delta_n$ i $\psi \notin \Delta_n$, ale zarówno φ jak i ψ – jako podformuły $\Gamma \cup \Delta$ muszą się w $\Gamma_n \Rightarrow \Delta_n$ znajdować, zatem obie należą do Γ_n.

Oczywiście procedura rozstrzygalności dla **KRZ** oparta na powyższym dowodzie nie jest równie efektywna jak procedury zaprezentowane wcześniej i oparte na RS ściśle analitycznym. Istnieją jednak rozstrzygalne logiki nieklasyczne dla których istnieją tylko systemy słabo analityczne, a wtedy procedury oparte na analitycznych zastosowaniach (Cut) są konieczne dla dowiedzenia ich rozstrzygalności w konstruktywny sposób.

1.10 Inne konsekwencje eliminacji cięcia

[definicje i dowody niesprzeczności, separowalności, konserwatywności, tw. o interpolacji – metoda Maehary]

1.11 RS a inne systemy dedukcyjne

[Porównanie RS z dedukcją naturalną, systemami tablicowymi i rezolucją. Wykazanie, że RS można potraktować jako ogólną ramę teoretyczną dla wydefiniowania innych klas systemów]