HYBRYDOWE SYSTEMY I LOGIKI

Andrzej Indrzejczak

Katedra Logiki i Metodologii Nauk UŁ

Łódź, semestr letni 2010/2011

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

RS Gentzena (1934) – uwagi wstępne

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

RS Gentzena (1934) – uwagi wstępne

W pracy poświęconej DN wprowadza Gentzen pomocniczy rachunek RS, w którym używa również T-dowodów ale obiekty, na których operują reguły to sekwenty postaci:

$$\Gamma \Rightarrow \Delta,$$

gdzie Γ i Δ to skończone ciągi formuł.

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

RS Gentzena (1934) – uwagi wstępne

W pracy poświęconej DN wprowadza Gentzen pomocniczy rachunek RS, w którym używa również T-dowodów ale obiekty, na których operują reguły to sekwenty postaci:

$$\Gamma \Rightarrow \Delta,$$

gdzie Γ i Δ to skończone ciągi formuł.

Uwaga! sekwent jest tutaj wyrażeniem językowym a nie metajęzykowym (podobnie jak w DN Gentzena z 1936.)

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Sekwenty – przypadki szczególne

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Sekwenty – przypadki szczególne

Zarówno Γ jaki i Δ w sekwencie postaci $\Gamma \Rightarrow \Delta$ mogą być ciągami pustymi, wtedy:

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Sekwenty – przypadki szczególne

Zarówno Γ jaki i Δ w sekwencie postaci $\Gamma \Rightarrow \Delta$ mogą być ciągami pustymi, wtedy:

- Γ interpretujemy jako $\top$

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Sekwenty – przypadki szczególne

Zarówno Γ jaki i Δ w sekwencie postaci $\Gamma \Rightarrow \Delta$ mogą być ciągami pustymi, wtedy:

- Γ interpretujemy jako $\top$
- Δ interpretujemy jako $\bot$

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Sekwenty – przypadki szczególne

Zarówno Γ jaki i Δ w sekwencie postaci $\Gamma \Rightarrow \Delta$ mogą być ciągami pustymi, wtedy:

- Γ interpretujemy jako $\top$
- Δ interpretujemy jako $\bot$

Konsekwencje:

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Sekwenty – przypadki szczególne

Zarówno Γ jaki i Δ w sekwencie postaci $\Gamma \Rightarrow \Delta$ mogą być ciągami pustymi, wtedy:

- Γ interpretujemy jako $\top$
- Δ interpretujemy jako $\bot$

Konsekwencje:

- sekwent z pustym Γ i Δ jest wyrażeniem wewnętrznie sprzecznym: $\Rightarrow := \bot$

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Sekwenty – przypadki szczególne

Zarówno Γ jaki i Δ w sekwencie postaci $\Gamma \Rightarrow \Delta$ mogą być ciągami pustymi, wtedy:

- Γ interpretujemy jako $\top$
- Δ interpretujemy jako $\bot$

Konsekwencje:

- sekwent z pustym Γ i Δ jest wyrażeniem wewnętrznie sprzecznym: $\Rightarrow\ :=\ \bot$
- $\Gamma \Rightarrow$ oznacza, że elementy Γ tworzą zbiór sprzeczny

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

RS Gentzena (1934) – reguły strukturalne

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

RS Gentzena (1934) – reguły strukturalne

$(AX)\quad \varphi \Rightarrow \varphi$

$$(Cut)\quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}$$

$$(W\Rightarrow)\quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow W)\quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}$$

$$(C\Rightarrow)\quad \frac{\varphi, \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow C)\quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \varphi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}$$

$$(P\Rightarrow)\quad \frac{\Pi, \varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Pi, \psi, \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow P)\quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi, \varphi, \Pi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi, \Pi}$$

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

RS Gentzena (1934) – reguły logiczne

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

RS Gentzena (1934) – reguły logiczne

$(\neg\Rightarrow)\ \dfrac{\Gamma\Rightarrow\Delta,\varphi}{\neg\varphi,\Gamma\Rightarrow\Delta}$ $(\Rightarrow\neg)\ \dfrac{\varphi,\Gamma\Rightarrow\Delta}{\Gamma\Rightarrow\Delta,\neg\varphi}$

$(\wedge\Rightarrow)\ \dfrac{\varphi,\Gamma\Rightarrow\Delta}{\varphi\wedge\psi,\Gamma\Rightarrow\Delta}$ $(\wedge\Rightarrow)\ \dfrac{\psi,\Gamma\Rightarrow\Delta}{\varphi\wedge\psi,\Gamma\Rightarrow\Delta}$

$(\Rightarrow\wedge)\ \dfrac{\Gamma\Rightarrow\Delta,\varphi \quad \Gamma\Rightarrow\Delta,\psi}{\Gamma\Rightarrow\Delta,\varphi\wedge\psi}$ $(\vee\Rightarrow)\ \dfrac{\varphi,\Gamma\Rightarrow\Delta \quad \psi,\Gamma\Rightarrow\Delta}{\varphi\vee\psi,\Gamma\Rightarrow\Delta}$

$(\Rightarrow\vee)\ \dfrac{\Gamma\Rightarrow\Delta,\varphi}{\Gamma\Rightarrow\Delta,\varphi\vee\psi}$ $(\Rightarrow\vee)\ \dfrac{\Gamma\Rightarrow\Delta,\psi}{\Gamma\Rightarrow\Delta,\varphi\vee\psi}$

$(\rightarrow\Rightarrow)\ \dfrac{\Gamma\Rightarrow\Delta,\varphi \quad \psi,\Pi\Rightarrow\Sigma}{\varphi\rightarrow\psi,\Gamma,\Pi\Rightarrow\Delta,\Sigma}$ $(\Rightarrow\rightarrow)\ \dfrac{\varphi,\Gamma\Rightarrow\Delta,\psi}{\Gamma\Rightarrow\Delta,\varphi\rightarrow\psi}$

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

RS Gentzena (1934) – reguły dla kwantyfikatorów

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

RS Gentzena (1934) – reguły dla kwantyfikatorów

$(\forall\Rightarrow)\ \dfrac{\varphi[x/a], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ $\qquad (\Rightarrow\forall)^1\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi[x/a]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x\varphi}$

$(\exists\Rightarrow)^1\ \dfrac{\varphi[x/a], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ $\qquad (\Rightarrow\exists)\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi[x/a]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x\varphi}$

warunki poprawności:

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

RS Gentzena (1934) – reguły dla kwantyfikatorów

$(\forall\Rightarrow)\ \dfrac{\varphi[x/a], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ $\qquad (\Rightarrow\forall)^1\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi[x/a]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x\varphi}$

$(\exists\Rightarrow)^1\ \dfrac{\varphi[x/a], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ $\qquad (\Rightarrow\exists)\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi[x/a]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x\varphi}$

warunki poprawności:

1. gdzie a jest zmienną wolną nie występująca w Γ, Δ i φ.

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Uwagi o regule cięcia

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Uwagi o regule cięcia

Szczególne przypadki (Cut) reprezentują wiele ważnych reguł np.

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Uwagi o regule cięcia

Szczególne przypadki (Cut) reprezentują wiele ważnych reguł np.

- MP – $\Rightarrow \varphi; \varphi \Rightarrow \psi \ / \ \Rightarrow \psi$

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Uwagi o regule cięcia

Szczególne przypadki (Cut) reprezentują wiele ważnych reguł np.

- MP – $\Rightarrow \varphi; \varphi \Rightarrow \psi \ / \ \Rightarrow \psi$
- SH – $\chi \Rightarrow \varphi; \varphi \Rightarrow \psi \ / \ \chi \Rightarrow \psi$

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Uwagi o regule cięcia

Szczególne przypadki (Cut) reprezentują wiele ważnych reguł np.

- MP – $\Rightarrow \varphi; \varphi \Rightarrow \psi \ / \ \Rightarrow \psi$
- SH – $\chi \Rightarrow \varphi; \varphi \Rightarrow \psi \ / \ \chi \Rightarrow \psi$

Na poziomie ogólnym (Cut) wyraża przechodniość $\Rightarrow$,

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Uwagi o regule cięcia

Szczególne przypadki (Cut) reprezentują wiele ważnych reguł np.

- MP – $\Rightarrow \varphi; \varphi \Rightarrow \psi \ / \ \Rightarrow \psi$
- SH – $\chi \Rightarrow \varphi; \varphi \Rightarrow \psi \ / \ \chi \Rightarrow \psi$

Na poziomie ogólnym (Cut) wyraża przechodniość $\Rightarrow$,
a przy pewnej interpretacji także zasadę dwuwartościowości.

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Definicja dowodu w RS

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Definicja dowodu w RS

Dowodem tezy φ jest drzewo, którego każdy liść to sekwent aksjomatyczny, każde przejście do następnego węzła odpowiada zastosowaniu reguły sekwentowej a korzeń to sekwent $\Rightarrow \varphi$.

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Definicja dowodu w RS

Dowodem tezy φ jest drzewo, którego każdy liść to sekwent aksjomatyczny, każde przejście do następnego węzła odpowiada zastosowaniu reguły sekwentowej a korzeń to sekwent $\Rightarrow \varphi$.
Pojęcia dowodu w RS nie trzeba ograniczać do dowodu tezy. Dowolny sekwent $\Gamma \Rightarrow \Delta$ może mieć dowód w systemie; określenie przedmiotu takiego dowodu zależy od przyjętej interpretacji sekwentu (por dalej).

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

przykład dowodu tezy

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

przykład dowodu tezy

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \Rightarrow p \qquad q \Rightarrow q}{p, p \rightarrow q \Rightarrow q} \qquad r \Rightarrow r}{p, p \rightarrow q, q \rightarrow r \Rightarrow r}}{p \rightarrow q, q \rightarrow r \Rightarrow p \rightarrow r}}{p \rightarrow q \Rightarrow (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)}}{\Rightarrow (p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))}
$$

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Rodzaje dowodów w RS

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Rodzaje dowodów w RS

Za pomocą RS można też w różny sposób formalizować teorie aksjomatyczne, np.:

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Rodzaje dowodów w RS

Za pomocą RS można też w różny sposób formalizować teorie aksjomatyczne, np.:

- dodając $\Rightarrow \varphi$ dla każdego aksjomatu φ do zbioru sekwentów wyjściowych

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Rodzaje dowodów w RS

Za pomocą RS można też w różny sposób formalizować teorie aksjomatyczne, np.:

- dodając $\Rightarrow \varphi$ dla każdego aksjomatu φ do zbioru sekwentów wyjściowych
- traktując zbiór aksjomatów Γ jako kontekst dowodzonych twierdzeń; dowodzimy wtedy sekwentów postaci $\Gamma \Rightarrow \varphi$, gdzie φ jest tezą teorii Γ

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Rodzaje dowodów w RS

Za pomocą RS można też w różny sposób formalizować teorie aksjomatyczne, np.:

- dodając $\Rightarrow \varphi$ dla każdego aksjomatu φ do zbioru sekwentów wyjściowych
- traktując zbiór aksjomatów Γ jako kontekst dowodzonych twierdzeń; dowodzimy wtedy sekwentów postaci $\Gamma \Rightarrow \varphi$, gdzie φ jest tezą teorii Γ
- dodając do RS odpowiednie reguły, np. dla aksjomatu o postaci $\varphi \rightarrow \psi$ regułę postaci $\psi \Rightarrow \Delta \ / \ \varphi \Rightarrow \Delta$ a dla aksjomatu postaci φ regułę postaci $\varphi \Rightarrow \Delta \ / \ \Rightarrow \Delta$

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Dla dowolnego sekwentu $\Gamma \Rightarrow \Delta$, z $\Gamma = \{\varphi_1, ..., \varphi_i\}$, $\Delta = \{\psi_1, ..., \psi_k\}$, $i, k \geq 0$ podane niżej warunki są równoważne:

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Dla dowolnego sekwentu $\Gamma \Rightarrow \Delta$, z $\Gamma = \{\varphi_1, ..., \varphi_i\}$, $\Delta = \{\psi_1, ..., \psi_k\}$, i, $k \geq 0$ podane niżej warunki są równoważne:

1. $\vdash \varphi_1, ..., \varphi_i \Rightarrow \psi_1, ..., \psi_k$
2. $\vdash \varphi_1, ..., \varphi_i, \neg\psi_1, ..., \neg\psi_k \Rightarrow$
3. $\vdash\Rightarrow \neg\varphi_1, ..., \neg\varphi_i, \psi_1, ..., \psi_k$
4. $\vdash \varphi_1 \wedge .... \wedge \varphi_i \rightarrow \psi_1 \vee ... \vee \psi_k$
5. $\varphi_1, ..., \varphi_i \vdash \psi_1 \vee ... \vee \psi_k$

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Interpretacje sekwentu:

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Interpretacje sekwentu:

1. interpretacja sekwentu jako implikacji (p. 4) użyta przez Gentzena dla wykazania równoważności z systemem aksjomatycznym

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Interpretacje sekwentu:

1. interpretacja sekwentu jako implikacji (p. 4) użyta przez Gentzena dla wykazania równoważności z systemem aksjomatycznym
2. interpretacja $\Rightarrow$ jako zależności Δ od założeń (p. 5); prowadzi do skonstruowania S-systemu DN na bazie RS (Gentzen 1936)

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Interpretacje sekwentu:

1. interpretacja sekwentu jako implikacji (p. 4) użyta przez Gentzena dla wykazania równoważności z systemem aksjomatycznym
2. interpretacja $\Rightarrow$ jako zależności Δ od założeń (p. 5); prowadzi do skonstruowania S-systemu DN na bazie RS (Gentzen 1936)
3. interpretacja $\Rightarrow$ jako symbolu relacji inferencji (p. 5); prowadzi do skonstruowania F-systemu DN na bazie RS (Gentzen 1934)

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Ważne własności reguł sekwentowych:

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Ważne własności reguł sekwentowych:

- w. podformuł: każda formuła występująca w przesłankach występuje też we wniosku (nie spełnia (Cut))

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Ważne własności reguł sekwentowych:

- w. podformuł: każda formuła występująca w przesłankach występuje też we wniosku (nie spełnia (Cut))
- odwracalność: przesłanki są dedukowalne z wniosku (nie spełnia np. $(W \Rightarrow)$, $(\rightarrow\Rightarrow)$)

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Ważne własności reguł sekwentowych:

- w. podformuł: każda formuła występująca w przesłankach występuje też we wniosku (nie spełnia (Cut))
- odwracalność: przesłanki są dedukowalne z wniosku (nie spełnia np. $(W \Rightarrow)$, $(\rightarrow\Rightarrow)$)
- symetria: każda stała ma reguły wprowadzania do następnika i poprzednika sekwentu (i żadnych innych)

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Ważne własności reguł sekwentowych:

- w. podformuł: każda formuła występująca w przesłankach występuje też we wniosku (nie spełnia (Cut))
- odwracalność: przesłanki są dedukowalne z wniosku (nie spełnia np. $(W \Rightarrow)$, $(\rightarrow\Rightarrow)$)
- symetria: każda stała ma reguły wprowadzania do następnika i poprzednika sekwentu (i żadnych innych)
- separowalność: reguła logiczna dla danej stałej nie zawiera innych stałych

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Ważne własności reguł sekwentowych:

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Ważne własności reguł sekwentowych:

- wyłączność: stała występuje tylko w sekwencie-wniosku, co więcej, tylko raz

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Ważne własności reguł sekwentowych:

- wyłączność: stała występuje tylko w sekwencie-wniosku, co więcej, tylko raz
- niezależność: poprawność danej reguły nie jest zakłócona przez dodanie dalszych formuł do sekwentów-przesłanek i sekwentu-wniosku

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Ważne własności reguł sekwentowych:

- wyłączność: stała występuje tylko w sekwencie-wniosku, co więcej, tylko raz
- niezależność: poprawność danej reguły nie jest zakłócona przez dodanie dalszych formuł do sekwentów-przesłanek i sekwentu-wniosku

Znaczenie: RS pozwala na ufundowanie antyrealistycznej teorii znaczenia – znaczenie stałej jako warunki jej użycia (m.in. Dummett, Prawitz, Hacking, Sundholm).

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Podstawowe twierdzenie Gentzena:

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Podstawowe twierdzenie Gentzena:

Każdy dowód $\Gamma \Rightarrow \Delta$ w RS można przekształcić w dowód bez użycia (Cut).

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Podstawowe twierdzenie Gentzena:

Każdy dowód $\Gamma \Rightarrow \Delta$ w RS można przekształcić w dowód bez użycia (Cut).

Konsekwencje twierdzenia o eliminacji cięcia:

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Podstawowe twierdzenie Gentzena:

Każdy dowód $\Gamma \Rightarrow \Delta$ w RS można przekształcić w dowód bez użycia (Cut).

Konsekwencje twierdzenia o eliminacji cięcia:

- wszystkie reguły mają własność podformuł – system cut-free RS jest analityczny.

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Podstawowe twierdzenie Gentzena:

Każdy dowód $\Gamma \Rightarrow \Delta$ w RS można przekształcić w dowód bez użycia (Cut).

Konsekwencje twierdzenia o eliminacji cięcia:

- wszystkie reguły mają własność podformuł – system cut-free RS jest analityczny.
- dowód rozstrzygalności rachunku zdań w wersji klasycznej i intuicjonistycznej

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Podstawowe twierdzenie Gentzena:

Każdy dowód $\Gamma \Rightarrow \Delta$ w RS można przekształcić w dowód bez użycia (Cut).

Konsekwencje twierdzenia o eliminacji cięcia:

- wszystkie reguły mają własność podformuł – system cut-free RS jest analityczny.
- dowód rozstrzygalności rachunku zdań w wersji klasycznej i intuicjonistycznej
- dowód niesprzeczności logiki klasycznej i intuicjonistycznej

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Podstawowe twierdzenie Gentzena:

Każdy dowód $\Gamma \Rightarrow \Delta$ w RS można przekształcić w dowód bez użycia (Cut).

Konsekwencje twierdzenia o eliminacji cięcia:

- wszystkie reguły mają własność podformuł – system cut-free RS jest analityczny.
- dowód rozstrzygalności rachunku zdań w wersji klasycznej i intuicjonistycznej
- dowód niesprzeczności logiki klasycznej i intuicjonistycznej
- dowód niesprzeczności arytmetyki bez reguły indukcji

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Upraszczanie (cut-free) RS dla otrzymania procedury roztrzygalnej:

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Upraszczanie (cut-free) RS dla otrzymania procedury roztrzygalnej:

1. zastąpienie reguł Gentzena dla $(\Rightarrow \vee)$ i $(\wedge \Rightarrow)$ przez warianty Ketonena

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Upraszczanie (cut-free) RS dla otrzymania procedury roztrzygalnej:

1. zastąpienie reguł Gentzena dla $(\Rightarrow \vee)$ i $(\wedge \Rightarrow)$ przez warianty Ketonena
2. ujednolicenie formuł parametrycznych w $(\rightarrow\Rightarrow)$

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Upraszczanie (cut-free) RS dla otrzymania procedury roztrzygalnej:

1. zastąpienie reguł Gentzena dla $(\Rightarrow \vee)$ i $(\wedge \Rightarrow)$ przez warianty Ketonena
2. ujednolicenie formuł parametrycznych w $(\rightarrow\Rightarrow)$
3. zastąpienie ciągów formuł przez ich zbiory (eliminacja reguł kontrakcji i permutacji)

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Upraszczanie (cut-free) RS dla otrzymania procedury roztrzygalnej:

1. zastąpienie reguł Gentzena dla $(\Rightarrow \vee)$ i $(\wedge \Rightarrow)$ przez warianty Ketonena
2. ujednolicenie formuł parametrycznych w $(\rightarrow\Rightarrow)$
3. zastąpienie ciągów formuł przez ich zbiory (eliminacja reguł kontrakcji i permutacji)
4. uogólnienie aksjomatu do postaci $\Gamma \Rightarrow \Delta$ z $\Gamma \cap \Delta \neq \varnothing$

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Upraszczanie (cut-free) RS dla otrzymania procedury roztrzygalnej:

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Upraszczanie (cut-free) RS dla otrzymania procedury roztrzygalnej:

ad. 1, warianty Ketonena:

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Upraszczanie (cut-free) RS dla otrzymania procedury roztrzygalnej:

ad. 1, warianty Ketonena:

$$(\wedge\Rightarrow)\ \frac{\varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow\vee)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}$$

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Upraszczanie (cut-free) RS dla otrzymania procedury roztrzygalnej:

ad. 1, warianty Ketonena:

$$(\wedge\Rightarrow)\ \frac{\varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow\vee)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}$$

ad. 2, ujednolicenie formuł parametrycznych w $(\rightarrow\Rightarrow)$:

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Upraszczanie (cut-free) RS dla otrzymania procedury roztrzygalnej:

ad. 1, warianty Ketonena:

$$(\wedge\Rightarrow)\ \frac{\varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow\vee)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}$$

ad. 2, ujednolicenie formuł parametrycznych w $(\rightarrow\Rightarrow)$:

$$(\rightarrow\Rightarrow)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \rightarrow \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

przykład otwartego drzewa dowodowego

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

przykład otwartego drzewa dowodowego

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p, q \Rightarrow q, r}{p \Rightarrow q, q \to r} \qquad \dfrac{p \Rightarrow p, q \qquad r, p \Rightarrow q}{p \to r, p \Rightarrow q}}{(q \to r) \to (p \to r), p \Rightarrow q}}{(q \to r) \to (p \to r) \Rightarrow p \to q}}{\Rightarrow ((q \to r) \to (p \to r)) \to (p \to r)}$$

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Różne znaczenia analityczności:

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Różne znaczenia analityczności:

- Euklidesowe – dowód przez równoważnościowe przekształcenia

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Różne znaczenia analityczności:

- Euklidesowe – dowód przez równoważnościowe przekształcenia
- Kartezjańskie – rozwiązanie problemu sprowadzalne do rozwiązania podproblemów

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Różne znaczenia analityczności:

- Euklidesowe – dowód przez równoważnościowe przekształcenia
- Kartezjańskie – rozwiązanie problemu sprowadzalne do rozwiązania podproblemów
- teoriodowodowe – dowód jest prowadzony od tyłu (od twierdzenia do aksjomatów)

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Różne znaczenia analityczności:

- Euklidesowe – dowód przez równoważnościowe przekształcenia
- Kartezjańskie – rozwiązanie problemu sprowadzalne do rozwiązania podproblemów
- teoriodowodowe – dowód jest prowadzony od tyłu (od twierdzenia do aksjomatów)
- metodologiczne (w RS) – reguła cięcia jest eliminowalna

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Różne znaczenia analityczności:

- Euklidesowe – dowód przez równoważnościowe przekształcenia
- Kartezjańskie – rozwiązanie problemu sprowadzalne do rozwiązania podproblemów
- teoriodowodowe – dowód jest prowadzony od tyłu (od twierdzenia do aksjomatów)
- metodologiczne (w RS) – reguła cięcia jest eliminowalna
- met. (w RS, Tab) – wszystkie reguły systemu mają własność podformuł

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Różne znaczenia analityczności:

- Euklidesowe – dowód przez równoważnościowe przekształcenia
- Kartezjańskie – rozwiązanie problemu sprowadzalne do rozwiązania podproblemów
- teoriodowodowe – dowód jest prowadzony od tyłu (od twierdzenia do aksjomatów)
- metodologiczne (w RS) – reguła cięcia jest eliminowalna
- met. (w RS, Tab) – wszystkie reguły systemu mają własność podformuł
- met. (w Tab) – wszystkie reguły są regułami eliminacji

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Różne znaczenia analityczności:

- Euklidesowe – dowód przez równoważnościowe przekształcenia
- Kartezjańskie – rozwiązanie problemu sprowadzalne do rozwiązania podproblemów
- teoriodowodowe – dowód jest prowadzony od tyłu (od twierdzenia do aksjomatów)
- metodologiczne (w RS) – reguła cięcia jest eliminowalna
- met. (w RS, Tab) – wszystkie reguły systemu mają własność podformuł
- met. (w Tab) – wszystkie reguły są regułami eliminacji
- met. (w RS, DN) – stosowalność reguł jest ograniczona do wyznaczonego zbioru formuł (np. zbioru podformuł dowodzonej formuły)

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Zbieżność:

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Zbieżność:

System RS jest zbieżny wtw, jeżeli sekwent jest dowiedlny, to dowolne drzewo dowodowe z tym sekwentem jako korzeniem można poszerzyć tak, że uzyskamy dowód tego sekwentu.

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Zbieżność:

System RS jest zbieżny wtw, jeżeli sekwent jest dowiedlny, to dowolne drzewo dowodowe z tym sekwentem jako korzeniem można poszerzyć tak, że uzyskamy dowód tego sekwentu. Systemy zbieżne są wygodne z punktu widzenia automatycznego dowodzenia twierdzeń, gdyż nie zmuszają do uwzględniania możliwości powrotu (backtracking) do wcześniejszych etapów konstrukcji, jeżeli dokonaliśmy po drodze ,,złych" wyborów.

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Kolejne interpretacje sekwentu (w cut-free RS):

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Kolejne interpretacje sekwentu (w cut-free RS):

1. interpretacja sekwentu jako koniunkcji z pustym następnikiem (p. 2); reguły czytane odwrotnie (w terminach falsyfikowalności); drzewo dowodowe staje się formalnym zapisem sprawdzania niewprost

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Kolejne interpretacje sekwentu (w cut-free RS):

1. interpretacja sekwentu jako koniunkcji z pustym następnikiem (p. 2); reguły czytane odwrotnie (w terminach falsyfikowalności); drzewo dowodowe staje się formalnym zapisem sprawdzania niewprost
2. interpretacja sekwentu jako alternatywy z pustym poprzednikiem (p. 3); reguły czytane odwrotnie (w terminach weryfikowalności); drzewo dowodowe staje się formalnym zapisem procedury Posta (dzięki odwracalności wszystkich reguł)

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Kolejne interpretacje sekwentu (w cut-free RS):

1. interpretacja sekwentu jako koniunkcji z pustym następnikiem (p. 2); reguły czytane odwrotnie (w terminach falsyfikowalności); drzewo dowodowe staje się formalnym zapisem sprawdzania niewprost
2. interpretacja sekwentu jako alternatywy z pustym poprzednikiem (p. 3); reguły czytane odwrotnie (w terminach weryfikowalności); drzewo dowodowe staje się formalnym zapisem procedury Posta (dzięki odwracalności wszystkich reguł)

Uwaga! w interpretacji 1 odwracalność reguł nie jest konieczna – ma to wpływ na uogólnienia dla logik nieklasycznych.

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Związek RS z metodami tablicowymi:

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Związek RS z metodami tablicowymi:

Podane wyżej interpretacje prowadzą do dwóch uproszczeń:

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Związek RS z metodami tablicowymi:

Podane wyżej interpretacje prowadzą do dwóch uproszczeń:

- zastąpić sekwenty zbiorami formuł

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Związek RS z metodami tablicowymi:

Podane wyżej interpretacje prowadzą do dwóch uproszczeń:

- zastąpić sekwenty zbiorami formuł
- odwrócić kierunek dowodzenia (sprawdzania) – odwrócone T-drzewa

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

Związek RS z metodami tablicowymi:

Podane wyżej interpretacje prowadzą do dwóch uproszczeń:

- zastąpić sekwenty zbiorami formuł
- odwrócić kierunek dowodzenia (sprawdzania) – odwrócone T-drzewa

Interpretacja 1 (falsyfikowalność) prowadzi do systemu tablicowego Hintikki a 2 (weryfikowalność) do systemu Rasiowej/Sikorskiego.

SYSTEMY TABLICOWE

Związek RS z metodami tablicowymi:

SYSTEMY TABLICOWE

Związek RS z metodami tablicowymi:

Każdej regule RS dla $\wedge, \vee, \rightarrow$ odpowiada reguła Hintikki według wzorca:

SYSTEMY TABLICOWE

Związek RS z metodami tablicowymi:

Każdej regule RS dla $\wedge, \vee, \rightarrow$ odpowiada reguła Hintikki według wzorca:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma' \Rightarrow \Delta'} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\Gamma', \neg\Delta'}{\Gamma, \neg\Delta}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta \mid \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\Gamma'' \Rightarrow \Delta''} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\Gamma'', \neg\Delta''}{\Gamma, \neg\Delta \mid \Gamma', \neg\Delta'}$$

SYSTEMY TABLICOWE

Związek RS z metodami tablicowymi:

Każdej regule RS dla $\wedge, \vee, \rightarrow$ odpowiada reguła Hintikki według wzorca:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma' \Rightarrow \Delta'} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\Gamma', \neg\Delta'}{\Gamma, \neg\Delta}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta \mid \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\Gamma'' \Rightarrow \Delta''} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\Gamma'', \neg\Delta''}{\Gamma, \neg\Delta \mid \Gamma', \neg\Delta'}$$

W systemie Rasiowej/Sikorskiego mamy odpowiedniki dualne. Oprócz tego w obu systemach mamy regułę eliminacji podwójnej negacji: $\Gamma, \neg\neg\varphi \ / \ \Gamma, \varphi$

SYSTEMY TABLICOWE

Związek RS z metodami tablicowymi:

Każdej regule RS dla $\wedge, \vee, \rightarrow$ odpowiada reguła Hintikki według wzorca:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma' \Rightarrow \Delta'} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\Gamma', \neg\Delta'}{\Gamma, \neg\Delta}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta \mid \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\Gamma'' \Rightarrow \Delta''} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\Gamma'', \neg\Delta''}{\Gamma, \neg\Delta \mid \Gamma', \neg\Delta'}$$

W systemie Rasiowej/Sikorskiego mamy odpowiedniki dualne. Oprócz tego w obu systemach mamy regułę eliminacji podwójnej negacji: $\Gamma, \neg\neg\varphi \ / \ \Gamma, \varphi$

SYSTEMY TABLICOWE

System Hintikki:

SYSTEMY TABLICOWE

System Hintikki:

składa się z następujących reguł:

$$(\alpha H) \quad \frac{\Gamma, \alpha}{\Gamma, \alpha_1, \alpha_2} \qquad\qquad (\beta H) \quad \frac{\Gamma, \beta}{\Gamma, \beta_1 \quad | \quad \Gamma, \beta_2}$$

SYSTEMY TABLICOWE

System Hintikki:

składa się z następujących reguł:

$$(\alpha H)\ \frac{\Gamma, \alpha}{\Gamma, \alpha_1, \alpha_2} \qquad (\beta H)\ \frac{\Gamma, \beta}{\Gamma, \beta_1 \mid \Gamma, \beta_2}$$

System Rasiowej/Sikorskiego składa się z następujących reguł:

$$(\alpha S)\ \frac{\Gamma, \alpha}{\Gamma, \alpha_1 \mid \Gamma, \alpha_2} \qquad (\beta S)\ \frac{\Gamma, \beta}{\Gamma, \beta_1, \beta_2}$$

SYSTEMY TABLICOWE

System Hintikki:

składa się z następujących reguł:

(αH) $\dfrac{\Gamma, \alpha}{\Gamma, \alpha_1, \alpha_2}$ $\quad$ (βH) $\dfrac{\Gamma, \beta}{\Gamma, \beta_1 \mid \Gamma, \beta_2}$

System Rasiowej/Sikorskiego składa się z następujących reguł:

(αS) $\dfrac{\Gamma, \alpha}{\Gamma, \alpha_1 \mid \Gamma, \alpha_2}$ $\quad$ (βS) $\dfrac{\Gamma, \beta}{\Gamma, \beta_1, \beta_2}$

Oba systemy zawierają regułę:

(NN) $\Gamma, \neg\neg\varphi \ / \ \Gamma, \varphi$

SYSTEMY TABLICOWE

Reguły dla kwantyfikatorów:

SYSTEMY TABLICOWE

Reguły dla kwantyfikatorów:

Aby utrzymać pełność KRK nie wystarczy przekształcenie reguł sekwentowych w reguły tablicowe Hintikki jak w przypadku spójników; potrzebne następujące reguły:

SYSTEMY TABLICOWE

Reguły dla kwantyfikatorów:

Aby utrzymać pełność KRK nie wystarczy przekształcenie reguł sekwentowych w reguły tablicowe Hintikki jak w przypadku spójników; potrzebne następujące reguły:

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi}{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[x/a]} \qquad \frac{\Gamma, \neg\forall x\varphi}{\Gamma, \neg\varphi[x/a]}^{1} \qquad \frac{\Gamma, \exists x\varphi}{\Gamma, \varphi[x/a]}^{1} \qquad \frac{\Gamma, \neg\exists x\varphi}{\Gamma, \neg\exists x\varphi, \neg\varphi[x/a]}$$

SYSTEMY TABLICOWE

Reguły dla kwantyfikatorów:

Aby utrzymać pełność KRK nie wystarczy przekształcenie reguł sekwentowych w reguły tablicowe Hintikki jak w przypadku spójników; potrzebne następujące reguły:

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi}{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[x/a]} \qquad \frac{\Gamma, \neg\forall x\varphi}{\Gamma, \neg\varphi[x/a]}\,^{1} \qquad \frac{\Gamma, \exists x\varphi}{\Gamma, \varphi[x/a]}\,^{1} \qquad \frac{\Gamma, \neg\exists x\varphi}{\Gamma, \neg\exists x\varphi, \neg\varphi[x/a]}$$

1. gdzie a jest zmienną wolną nie występującą w Γ i φ.

SYSTEMY TABLICOWE

Reguły dla kwantyfikatorów:

Aby utrzymać pełność KRK nie wystarczy przekształcenie reguł sekwentowych w reguły tablicowe Hintikki jak w przypadku spójników; potrzebne następujące reguły:

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi}{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[x/a]} \qquad \frac{\Gamma, \neg\forall x\varphi}{\Gamma, \neg\varphi[x/a]}\,^{1} \qquad \frac{\Gamma, \exists x\varphi}{\Gamma, \varphi[x/a]}\,^{1} \qquad \frac{\Gamma, \neg\exists x\varphi}{\Gamma, \neg\exists x\varphi, \neg\varphi[x/a]}$$

1. gdzie a jest zmienną wolną nie występująca w Γ i φ.

W systemie Rasiowej/Sikorskiego mamy odpowiedniki dualne.

SYSTEMY TABLICOWE

Reguły dla kwantyfikatorów:

Aby utrzymać pełność KRK nie wystarczy przekształcenie reguł sekwentowych w reguły tablicowe Hintikki jak w przypadku spójników; potrzebne następujące reguły:

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi}{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[x/a]} \qquad \frac{\Gamma, \neg\forall x\varphi}{\Gamma, \neg\varphi[x/a]}^{1} \qquad \frac{\Gamma, \exists x\varphi}{\Gamma, \varphi[x/a]}^{1} \qquad \frac{\Gamma, \neg\exists x\varphi}{\Gamma, \neg\exists x\varphi, \neg\varphi[x/a]}$$

1. gdzie a jest zmienną wolną nie występująca w Γ i φ.

W systemie Rasiowej/Sikorskiego mamy odpowiedniki dualne.

$\Gamma \vdash \varphi$ w systemie tablicowym, gdy istnieje (odwrócone drzewo), którego każdy liść to zbiór formuł zawierający parę wyrażeń sprzecznych a korzeń to zbiór $\Gamma, \neg\varphi$ (w systemie Hintikki) lub $\neg\Gamma, \varphi$ (w systemie Rasiowej/Sikorskiego)

SYSTEMY TABLICOWE

Dalsza ewolucja systemów tablicowych:

SYSTEMY TABLICOWE

Dalsza ewolucja systemów tablicowych:

Praktyczne uproszczenia – wyeliminować kłopotliwe przepisywanie formuł parametrycznych, co prowadzi do F-systemów tablicowych:

SYSTEMY TABLICOWE

Dalsza ewolucja systemów tablicowych:

Praktyczne uproszczenia – wyeliminować kłopotliwe przepisywanie formuł parametrycznych, co prowadzi do F-systemów tablicowych:

- diagramy Betha – dwukolumnowe tablice

SYSTEMY TABLICOWE

Dalsza ewolucja systemów tablicowych:

Praktyczne uproszczenia – wyeliminować kłopotliwe przepisywanie formuł parametrycznych, co prowadzi do F-systemów tablicowych:

- diagramy Betha – dwukolumnowe tablice
- Lis, Smullyann – formuły z indeksami oznaczającymi ich status

SYSTEMY TABLICOWE

Dalsza ewolucja systemów tablicowych:

Praktyczne uproszczenia – wyeliminować kłopotliwe przepisywanie formuł parametrycznych, co prowadzi do F-systemów tablicowych:

- diagramy Betha – dwukolumnowe tablice
- Lis, Smullyann – formuły z indeksami oznaczającymi ich status

Dygresja – inny nurt ewolucji RS: system sekwentowy Hermesa jako próba łączenia RS i DN

SYSTEMY TABLICOWE

Analityczność systemów tablicowych

SYSTEMY TABLICOWE

Analityczność systemów tablicowych

Systemy tablicowe dla KRK są z definicji cut-free i mają własność podformuł ale można wprowadzić do nich cut jako regułę wtórną.

SYSTEMY TABLICOWE

Analityczność systemów tablicowych

Systemy tablicowe dla KRK są z definicji cut-free i mają własność podformuł ale można wprowadzić do nich cut jako regułę wtórną. Cięcie dla systemów ST zdefiniowanych na zbiorach formuł wygląda następująco (tzw. regresywny cut):

SYSTEMY TABLICOWE

Analityczność systemów tablicowych

Systemy tablicowe dla KRK są z definicji cut-free i mają własność podformuł ale można wprowadzić do nich cut jako regułę wtórną. Cięcie dla systemów ST zdefiniowanych na zbiorach formuł wygląda następująco (tzw. regresywny cut):

$$(R - Cut) \quad \frac{\Gamma}{\Gamma, \varphi \quad | \quad \Gamma, -\varphi}$$

SYSTEMY TABLICOWE

Analityczność systemów tablicowych

Systemy tablicowe dla KRK są z definicji cut-free i mają własność podformuł ale można wprowadzić do nich cut jako regułę wtórną. Cięcie dla systemów ST zdefiniowanych na zbiorach formuł wygląda następująco (tzw. regresywny cut):

$$(R - Cut) \quad \frac{\Gamma}{\Gamma, \varphi \quad | \quad \Gamma, -\varphi}$$

W systemie Smullyana cięcie jest rozgałęziająca regułą bezprzesłankową.

SYSTEMY TABLICOWE

Związek z postaciami normalnymi dla KRZ:

SYSTEMY TABLICOWE

Związek z postaciami normalnymi dla KRZ:

- system Hintikki odpowiada sprowadzeniu $\neg\varphi$ do jej alternatywno-koniunkcyjnej postaci

SYSTEMY TABLICOWE

Związek z postaciami normalnymi dla KRZ:

- system Hintikki odpowiada sprowadzeniu $\neg\varphi$ do jej alternatywno-koniunkcyjnej postaci
- system Rasiowej/Sikorskiego odpowiada metodzie Posta (sprowadzeniu φ do jej koniunkcyjno-alternatywnej postaci)

SYSTEMY TABLICOWE

Związek z postaciami normalnymi dla KRZ:

- system Hintikki odpowiada sprowadzeniu $\neg\varphi$ do jej alternatywno-koniunkcyjnej postaci
- system Rasiowej/Sikorskiego odpowiada metodzie Posta (sprowadzeniu φ do jej koniunkcyjno-alternatywnej postaci)

Możliwe są jeszcze dwa sposoby:

SYSTEMY TABLICOWE

Związek z postaciami normalnymi dla KRZ:

- system Hintikki odpowiada sprowadzeniu $\neg\varphi$ do jej alternatywno-koniunkcyjnej postaci
- system Rasiowej/Sikorskiego odpowiada metodzie Posta (sprowadzeniu φ do jej koniunkcyjno-alternatywnej postaci)

Możliwe są jeszcze dwa sposoby:

- sprowadzenie φ do jej alternatywno-koniunkcyjnej postaci

SYSTEMY TABLICOWE

Związek z postaciami normalnymi dla KRZ:

- system Hintikki odpowiada sprowadzeniu $\neg\varphi$ do jej alternatywno-koniunkcyjnej postaci
- system Rasiowej/Sikorskiego odpowiada metodzie Posta (sprowadzeniu φ do jej koniunkcyjno-alternatywnej postaci)

Możliwe są jeszcze dwa sposoby:

- sprowadzenie φ do jej alternatywno-koniunkcyjnej postaci $\Longrightarrow$ metoda koneksji (jeden z wariantów)

SYSTEMY TABLICOWE

Związek z postaciami normalnymi dla KRZ:

- system Hintikki odpowiada sprowadzeniu $\neg\varphi$ do jej alternatywno-koniunkcyjnej postaci
- system Rasiowej/Sikorskiego odpowiada metodzie Posta (sprowadzeniu φ do jej koniunkcyjno-alternatywnej postaci)

Możliwe są jeszcze dwa sposoby:

- sprowadzenie φ do jej alternatywno-koniunkcyjnej postaci $\Longrightarrow$ metoda koneksji (jeden z wariantów)
- sprowadzenie $\neg\varphi$ do jej koniunkcyjno-alternatywnej postaci

SYSTEMY TABLICOWE

Związek z postaciami normalnymi dla KRZ:

- system Hintikki odpowiada sprowadzeniu $\neg\varphi$ do jej alternatywno-koniunkcyjnej postaci
- system Rasiowej/Sikorskiego odpowiada metodzie Posta (sprowadzeniu φ do jej koniunkcyjno-alternatywnej postaci)

Możliwe są jeszcze dwa sposoby:

- sprowadzenie φ do jej alternatywno-koniunkcyjnej postaci $\Longrightarrow$ metoda koneksji (jeden z wariantów)
- sprowadzenie $\neg\varphi$ do jej koniunkcyjno-alternatywnej postaci $\Longrightarrow$ metoda rezolucji

REZOLUCJA

J. A. Robinson 1965

REZOLUCJA

J. A. Robinson 1965

Podstawowe pojęcia:

REZOLUCJA

J. A. Robinson 1965

Podstawowe pojęcia:

- literał to formuła atomowa (l. pozytywny) lub jej negacja (l. negatywny)

REZOLUCJA

J. A. Robinson 1965

Podstawowe pojęcia:

- literał to formuła atomowa (l. pozytywny) lub jej negacja (l. negatywny)
- para literałów, z których jeden jest atomem a drugi jego negacją to literały komplementarne

REZOLUCJA

J. A. Robinson 1965

Podstawowe pojęcia:

- literał to formuła atomowa (l. pozytywny) lub jej negacja (l. negatywny)
- para literałów, z których jeden jest atomem a drugi jego negacją to literały komplementarne
- klauzula to alternatywa literałów (również jednoelementowa lub pusta)

REZOLUCJA

J. A. Robinson 1965

Podstawowe pojęcia:

- literał to formuła atomowa (l. pozytywny) lub jej negacja (l. negatywny)
- para literałów, z których jeden jest atomem a drugi jego negacją to literały komplementarne
- klauzula to alternatywa literałów (również jednoelementowa lub pusta)
- $\perp$ (lub $\Box$) to klauzula pusta

REZOLUCJA

J. A. Robinson 1965

Podstawowe pojęcia:

- literał to formuła atomowa (l. pozytywny) lub jej negacja (l. negatywny)
- para literałów, z których jeden jest atomem a drugi jego negacją to literały komplementarne
- klauzula to alternatywa literałów (również jednoelementowa lub pusta)
- $\perp$ (lub $\Box$) to klauzula pusta
- klauzule dzielimy na pozytywne, negatywne i mieszane

REZOLUCJA

J. A. Robinson 1965

Podstawowe pojęcia:

- literał to formuła atomowa (l. pozytywny) lub jej negacja (l. negatywny)
- para literałów, z których jeden jest atomem a drugi jego negacją to literały komplementarne
- klauzula to alternatywa literałów (również jednoelementowa lub pusta)
- $\perp$ (lub $\Box$) to klauzula pusta
- klauzule dzielimy na pozytywne, negatywne i mieszane
- klauzula Horna zawiera co najwyżej jeden literał pozytywny

REZOLUCJA

Reguła rezolucji:

REZOLUCJA

Reguła rezolucji:

$$\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_k \vee \chi, \; \psi_1 \vee \ldots \vee \psi_n \vee \neg\chi \; \vdash \; \varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_k \vee \psi_1 \vee \ldots \vee \psi_n$$

gdzie φ_i, ψ_i to literały (dla każdego $i \leq k, n$) a χ to atom; wniosek to rezolwenta.

REZOLUCJA

Reguła rezolucji:

$$\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_k \vee \chi, \ \psi_1 \vee \ldots \vee \psi_n \vee \neg\chi \ \vdash \ \varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_k \vee \psi_1 \vee \ldots \vee \psi_n$$

gdzie φ_i, ψ_i to literały (dla każdego $i \leq k, n$) a χ to atom; wniosek to rezolwenta.

Przykłady zastosowania:

REZOLUCJA

Reguła rezolucji:

$$\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_k \vee \chi,\ \psi_1 \vee \ldots \vee \psi_n \vee \neg\chi \ \vdash\ \varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_k \vee \psi_1 \vee \ldots \vee \psi_n$$

gdzie φ_i, ψ_i to literały (dla każdego $i \leq k, n$) a χ to atom; wniosek to rezolwenta.

Przykłady zastosowania:

- $p \vee \neg q,\ p \vee q \vee \neg r \vee s \ \vdash\ p \vee p \vee \neg r \vee s$

REZOLUCJA

Reguła rezolucji:

$$\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_k \vee \chi,\ \psi_1 \vee \ldots \vee \psi_n \vee \neg\chi \ \vdash\ \varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_k \vee \psi_1 \vee \ldots \vee \psi_n$$

gdzie φ_i, ψ_i to literały (dla każdego $i \leq k, n$) a χ to atom; wniosek to rezolwenta.

Przykłady zastosowania:

- $p \vee \neg q,\ p \vee q \vee \neg r \vee s \ \vdash\ p \vee p \vee \neg r \vee s$
- $Rxy,\ \neg Rxy \ \vdash\ \bot$

REZOLUCJA

Reguła rezolucji:

$$\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_k \vee \chi, \ \psi_1 \vee \ldots \vee \psi_n \vee \neg\chi \ \vdash \ \varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_k \vee \psi_1 \vee \ldots \vee \psi_n$$

gdzie φ_i, ψ_i to literały (dla każdego $i \leq k, n$) a χ to atom; wniosek to rezolwenta.

Przykłady zastosowania:

- $p \vee \neg q, \ p \vee q \vee \neg r \vee s \ \vdash \ p \vee p \vee \neg r \vee s$
- $Rxy, \ \neg Rxy \ \vdash \ \bot$

Uwaga: Reguła rezolucji jest specjalnym przypadkiem reguły cięcia.

REZOLUCJA

Pojęcie dowodu:

REZOLUCJA

Pojęcie dowodu:

- Dedukcja rezolucyjna ze zbioru klauzul Γ to ciąg klauzul, którego każdy element należy do Γ lub jest rezolwentą dwóch poprzedzających go elementów.

REZOLUCJA

Pojęcie dowodu:

- Dedukcja rezolucyjna ze zbioru klauzul Γ to ciąg klauzul, którego każdy element należy do Γ lub jest rezolwentą dwóch poprzedzających go elementów.
- Klauzula C jest dedukowalna ze zbioru klauzul Γ ($\Gamma \vdash C$) wtw istnieje dedukcja rezolucyjna ze zbioru klauzul Γ, którego ostatnim elementem jest C

REZOLUCJA

Pojęcie dowodu:

- Dedukcja rezolucyjna ze zbioru klauzul Γ to ciąg klauzul, którego każdy element należy do Γ lub jest rezolwentą dwóch poprzedzających go elementów.
- Klauzula C jest dedukowalna ze zbioru klauzul Γ ($\Gamma \vdash C$) wtw istnieje dedukcja rezolucyjna ze zbioru klauzul Γ, którego ostatnim elementem jest C
- $\Gamma \vdash \perp$ to refutacja Γ

REZOLUCJA

Zastosowanie do KRZ:

REZOLUCJA

Zastosowanie do KRZ:

Aby sprawdzić czy w KRZ $\Gamma \models \varphi$ należy:

REZOLUCJA

Zastosowanie do KRZ:

Aby sprawdzić czy w KRZ $\Gamma \models \varphi$ należy:

- Sprowadzić Γ i $\neg\varphi$ do postaci normalnej KA

REZOLUCJA

Zastosowanie do KRZ:

Aby sprawdzić czy w KRZ $\Gamma \models \varphi$ należy:

- Sprowadzić Γ i $\neg\varphi$ do postaci normalnej KA
- Pozbyć się koniunkcji otrzymując zbiór klauzul $Cl(\Gamma, \neg\varphi)$

REZOLUCJA

Zastosowanie do KRZ:

Aby sprawdzić czy w KRZ $\Gamma \models \varphi$ należy:

- Sprowadzić Γ i $\neg\varphi$ do postaci normalnej KA
- Pozbyć się koniunkcji otrzymując zbiór klauzul $Cl(\Gamma, \neg\varphi)$
- Przeprowadzić dedukcję rezolucyjną ze zbioru klauzul $Cl(\Gamma, \neg\varphi)$

REZOLUCJA

Zastosowanie do KRZ:

Aby sprawdzić czy w KRZ $\Gamma \models \varphi$ należy:

- Sprowadzić Γ i $\neg\varphi$ do postaci normalnej KA
- Pozbyć się koniunkcji otrzymując zbiór klauzul $Cl(\Gamma, \neg\varphi)$
- Przeprowadzić dedukcję rezolucyjną ze zbioru klauzul $Cl(\Gamma, \neg\varphi)$

Twierdzenie: $\Gamma \models \varphi$ wtw istnieje refutacja $Cl(\Gamma, \neg\varphi)$

REZOLUCJA

Zastosowanie do KRZ:

Aby sprawdzić czy w KRZ $\Gamma \models \varphi$ należy:

- Sprowadzić Γ i $\neg\varphi$ do postaci normalnej KA
- Pozbyć się koniunkcji otrzymując zbiór klauzul $Cl(\Gamma, \neg\varphi)$
- Przeprowadzić dedukcję rezolucyjną ze zbioru klauzul $Cl(\Gamma, \neg\varphi)$

Twierdzenie: $\Gamma \models \varphi$ wtw istnieje refutacja $Cl(\Gamma, \neg\varphi)$

Uwaga: Metoda rezolucji pomimo stosowania (Cut) jest analityczna!

REZOLUCJA

Przykład dowodu SH:

REZOLUCJA

Przykład dowodu SH:

$$Cl(\neg \mathrm{SH}) = \{\neg p \vee q, \neg q \vee r, p, \neg r\}$$

REZOLUCJA

Przykład dowodu SH:

$Cl(\neg\mathrm{SH}) = \{\neg p \vee q, \neg q \vee r, p, \neg r\}$

1	$\neg p \vee q$	
2	$\neg q \vee r$	
3	p	
4	$\neg r$	
5	q	1, 3
6	$\neg q$	2, 4
7	$\perp$	5, 6

Metoda Davisa/Putnama

Zastosowanie do KRZ:

Metoda Davisa/Putnama

Zastosowanie do KRZ:

Zastosowanie DP również zakłada wstępne sprowadzenie negacji dowodzonej formuły do zbioru klauzul. Następnie:

Metoda Davisa/Putnama

Zastosowanie do KRZ:

Zastosowanie DP również zakłada wstępne sprowadzenie negacji dowodzonej formuły do zbioru klauzul. Następnie:

1. Usuwamy każdą klauzulę tautologiczną (tj. zawierającą parę literałów komplementarnych (tzw. *reguła tautologii*).

Metoda Davisa/Putnama

Zastosowanie do KRZ:

Zastosowanie DP również zakłada wstępne sprowadzenie negacji dowodzonej formuły do zbioru klauzul. Następnie:

1. Usuwamy każdą klauzulę tautologiczną (tj. zawierającą parę literałów komplementarnych (tzw. *reguła tautologii*).
2. Usuwamy wszystkie klauzule, które zawierają literał φ, taki, że jego dopełnienie (tzn. $-\varphi$) nie występuje w żadnej klauzuli (tzw. *reguła czystego literału*).

Metoda Davisa/Putnama

Zastosowanie do KRZ:

Zastosowanie DP również zakłada wstępne sprowadzenie negacji dowodzonej formuły do zbioru klauzul. Następnie:

1. Usuwamy każdą klauzulę tautologiczną (tj. zawierającą parę literałów komplementarnych (tzw. *reguła tautologii*).
2. Usuwamy wszystkie klauzule, które zawierają literał φ, taki, że jego dopełnienie (tzn. $-\varphi$) nie występuje w żadnej klauzuli (tzw. *reguła czystego literału*).
3. Usuwamy każdą klauzulę Γ, taką, że istnieje klauzula $\Delta \subseteq \Gamma$ (tzw. *reguła subsumpcji*).

Metoda Davisa/Putnama

Zastosowanie do KRZ:

Metoda Davisa/Putnama

Zastosowanie do KRZ:

4 Jeżeli w klauzulach $\Gamma_1, ..., \Gamma_k$ występuje literał φ, a w klauzulach $\Delta_1, ...,$
Δ_n występuje jego dopełnienie oraz mamy pojedynczą klauzulę jednoelementową $\{\varphi\}$, to kasujemy wszystkie klauzule $\Gamma_1, ..., \Gamma_k$ (a także $\{\varphi\}$), natomiast klauzule $\Delta_1, ..., \Delta_n$ wymieniamy na klauzule $\Delta'_1, ..., \Delta'_n$, w których dopełnienie tego literału nie występuje, tzn. $\Delta'_i = \Delta_i - \{-\varphi\}$ (tzw. *reguła pojedynczego literału*).

Metoda Davisa/Putnama

Zastosowanie do KRZ:

4 Jeżeli w klauzulach $\Gamma_1, ..., \Gamma_k$ występuje literał φ, a w klauzulach $\Delta_1, ...,$
Δ_n występuje jego dopełnienie oraz mamy pojedynczą klauzulę jednoelementową $\{\varphi\}$, to kasujemy wszystkie klauzule $\Gamma_1, ..., \Gamma_k$ (a także $\{\varphi\}$), natomiast klauzule $\Delta_1, ..., \Delta_n$ wymieniamy na klauzule $\Delta'_1, ..., \Delta'_n$, w których dopełnienie tego literału nie występuje, tzn. $\Delta'_i = \Delta_i - \{-\varphi\}$ (tzw. *reguła pojedynczego literału*).

5 W przypadku, gdy w uzyskanym wskutek działań 1.–4. zbiorze klauzul X' mamy sytuację taką samą jak w przypadku 4., ale nie dysponujemy klauzulą $\{\varphi\}$, która umożliwia zastosowanie tej reguły, wtedy stosujemy:
regułę podziału, czyli wyróżniamy dwa zbiory:
X'$\cup\{\{\varphi\}\}$ oraz X'$\cup\{\{-\varphi\}\}$.

Metoda Davisa/Putnama

Uwagi:

Metoda Davisa/Putnama

Uwagi:

- DP stosuje specjalną wersję rezolucji – *reguła pojedynczego literału*

Metoda Davisa/Putnama

Uwagi:

- DP stosuje specjalną wersję rezolucji – *reguła pojedynczego literału*
- DP stosuje też regresywną formę cięcia – *regułę podziału*

Metoda Davisa/Putnama

Uwagi:

- DP stosuje specjalną wersję rezolucji – *reguła pojedynczego literału*
- DP stosuje też regresywną formę cięcia – *regułę podziału*

Uwaga: Zatem cut w DP wykorzystane w obu postaciach ale metoda jest analityczna.

KONEKSJA

Andrews 1981, Bibel 1993

KONEKSJA

Andrews 1981, Bibel 1993

Metoda dualna do rezolucji:

KONEKSJA

Andrews 1981, Bibel 1993

Metoda dualna do rezolucji:

Aby sprawdzić czy w KRZ $\Gamma \models \varphi$ należy:

KONEKSJA

Andrews 1981, Bibel 1993

Metoda dualna do rezolucji:

Aby sprawdzić czy w KRZ $\Gamma \models \varphi$ należy:

- Sprowadzić Γ i φ do postaci normalnej AK

KONEKSJA

Andrews 1981, Bibel 1993

Metoda dualna do rezolucji:

Aby sprawdzić czy w KRZ $\Gamma \models \varphi$ należy:

- Sprowadzić Γ i φ do postaci normalnej AK
- Przekształcić tę formułę w 2-wymiarową matrycę

KONEKSJA

Andrews 1981, Bibel 1993

Metoda dualna do rezolucji:

Aby sprawdzić czy w KRZ $\Gamma \models \varphi$ należy:

- Sprowadzić Γ i φ do postaci normalnej AK
- Przekształcić tę formułę w 2-wymiarową matrycę
- Sprawdzić wszystkie ścieżki w matrycy

KONEKSJA

Andrews 1981, Bibel 1993

Metoda dualna do rezolucji:

Aby sprawdzić czy w KRZ $\Gamma \models \varphi$ należy:

- Sprowadzić Γ i φ do postaci normalnej AK
- Przekształcić tę formułę w 2-wymiarową matrycę
- Sprawdzić wszystkie ścieżki w matrycy

Twierdzenie: $\Gamma \models \varphi$ wtw każda ścieżka w matrycy zawiera literały komplementarne

KONEKSJA

Andrews 1981, Bibel 1993

Metoda dualna do rezolucji:

Aby sprawdzić czy w KRZ $\Gamma \models \varphi$ należy:

- Sprowadzić Γ i φ do postaci normalnej AK
- Przekształcić tę formułę w 2-wymiarową matrycę
- Sprawdzić wszystkie ścieżki w matrycy

Twierdzenie: $\Gamma \models \varphi$ wtw każda ścieżka w matrycy zawiera literały komplementarne

Uwaga: Metoda koneksji też zawiera ukryte zastosowania (Cut) ale jest analityczna!

KONEKSJA

Przykład dowodu SH:

KONEKSJA

Przykład dowodu SH:

Postać AK z SH $= (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg r) \vee \neg p \vee r$

KONEKSJA

Przykład dowodu SH:

Postać AK z SH $= (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg r) \vee \neg p \vee r$

Matryca SH:

KONEKSJA

Przykład dowodu SH:

Postać AK z SH $= (p \land \neg q) \lor (q \land \neg r) \lor \neg p \lor r$

Matryca SH:

$$\begin{array}{llll} p & q & \neg p & r \\ \neg q & \neg r & & \end{array}$$

KONEKSJA

Przykład dowodu SH:

Postać AK z SH $= (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg r) \vee \neg p \vee r$

Matryca SH:

$$\begin{array}{llll} p & q & \neg p & r \\ \neg q & \neg r & & \end{array}$$

Ścieżki w matrycy:

KONEKSJA

Przykład dowodu SH:

Postać AK z SH $= (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg r) \vee \neg p \vee r$

Matryca SH:

$$\begin{array}{llll} p & q & \neg p & r \\ \neg q & \neg r & & \end{array}$$

Ścieżki w matrycy:

- $p, q, \neg p, r$

KONEKSJA

Przykład dowodu SH:

Postać AK z SH $= (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg r) \vee \neg p \vee r$

Matryca SH:

p	q	$\neg p$	r
$\neg q$	$\neg r$		

Ścieżki w matrycy:

- $p, q, \neg p, r$
- $p, \neg r, \neg p, r$

KONEKSJA

Przykład dowodu SH:

Postać AK z SH $= (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg r) \vee \neg p \vee r$

Matryca SH:

p	q	$\neg p$	r
$\neg q$	$\neg r$		

Ścieżki w matrycy:

- $p, q, \neg p, r$
- $p, \neg r, \neg p, r$
- $\neg q, q, \neg p, r$

KONEKSJA

Przykład dowodu SH:

Postać AK z SH $= (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg r) \vee \neg p \vee r$

Matryca SH:

$$\begin{array}{llll} p & q & \neg p & r \\ \neg q & \neg r & & \end{array}$$

Ścieżki w matrycy:

- $p, q, \neg p, r$
- $p, \neg r, \neg p, r$
- $\neg q, q, \neg p, r$
- $\neg q, \neg r, \neg p, r$

REZOLUCJA I KONEKSJA

Zalety:

REZOLUCJA I KONEKSJA

Zalety:

- Formalna prostota systemu

REZOLUCJA I KONEKSJA

Zalety:

- Formalna prostota systemu
- Ogromna ilość wypracowanych strategii szukania dowodu i realizujących je w praktyce programów automatycznego dowodzenia twierdzeń (por. dalej)

REZOLUCJA I KONEKSJA

Wady:

REZOLUCJA I KONEKSJA

Wady:

1. Konieczność sprowadzania do postaci normalnych

REZOLUCJA I KONEKSJA

Wady:

1. Konieczność sprowadzania do postaci normalnych
2. Utrata struktury analizowanego problemu

REZOLUCJA I KONEKSJA

Wady:

1. Konieczność sprowadzania do postaci normalnych
2. Utrata struktury analizowanego problemu
3. Dowody mało czytelne dla człowieka

REZOLUCJA I KONEKSJA

Wady:

1. Konieczność sprowadzania do postaci normalnych
2. Utrata struktury analizowanego problemu
3. Dowody mało czytelne dla człowieka

ad 1. dla wielu logik brak dobrze zdefiniowanych postaci normalnych;

REZOLUCJA I KONEKSJA

Wady:

1. Konieczność sprowadzania do postaci normalnych
2. Utrata struktury analizowanego problemu
3. Dowody mało czytelne dla człowieka

ad 1. dla wielu logik brak dobrze zdefiniowanych postaci normalnych;
nawet w KRZ etap sprowadzania problemu do postaci normalnej może zasadniczo spowolnić rozwiązanie.

REZOLUCJA I KONEKSJA

Wady:

1. Konieczność sprowadzania do postaci normalnych
2. Utrata struktury analizowanego problemu
3. Dowody mało czytelne dla człowieka

ad 1. dla wielu logik brak dobrze zdefiniowanych postaci normalnych;
nawet w KRZ etap sprowadzania problemu do postaci normalnej może zasadniczo spowolnić rozwiązanie.
Stąd różne wersje bezklauzulowych systemów rezolucji (Fitting, Stachniak) i systemów koneksji sprowadzających problem bezpośrednio do jego matrycy.

SYSTEMY TABLICOWE, REZOLUCJA, KONEKSJA

Zestawienie systemów analitycznych operujących na zbiorach formuł:

SYSTEMY TABLICOWE, REZOLUCJA, KONEKSJA

Zestawienie systemów analitycznych operujących na zbiorach formuł:

	cut	cut-free
wprost	koneksja	ST Rasiowej/Sikorskiego
niewprost	rezolucja	ST Hintikki

Analityczność raz jeszcze

Ostatnie z rozważanych znaczeń analityczności:

Analityczność raz jeszcze

Ostatnie z rozważanych znaczeń analityczności:

Stosowalność reguł jest ograniczona do wyznaczonego zbioru formuł (np. zbioru podformuł dowodzonej formuły domkniętego na pojedyncze negacje).

Analityczność raz jeszcze

Ostatnie z rozważanych znaczeń analityczności:

Stosowalność reguł jest ograniczona do wyznaczonego zbioru formuł (np. zbioru podformuł dowodzonej formuły domkniętego na pojedyncze negacje).
Uwaga: nawet (regresywne) cut może być analitycznie stosowane!

Analityczność raz jeszcze

Ostatnie z rozważanych znaczeń analityczności:

Stosowalność reguł jest ograniczona do wyznaczonego zbioru formuł (np. zbioru podformuł dowodzonej formuły domkniętego na pojedyncze negacje).
Uwaga: nawet (regresywne) cut może być analitycznie stosowane!
Ponadto dopuszczenie cut może zwiększyć efektywność (w ST zmniejszyć ilość rozgałęzień) $\Longrightarrow$ system KE D'Agostino, Mondadori.

System KE

KE jest wariantem ST Smullyana ale opartym na (regresywnym) cut jako jedynej regule rozgałęziającej:

System KE

KE jest wariantem ST Smullyana ale opartym na (regresywnym) cut jako jedynej regule rozgałęziającej:

Reguły KE:

System KE

KE jest wariantem ST Smullyana ale opartym na (regresywnym) cut jako jedynej regule rozgałęziającej:

Reguły KE:

(NN) $\neg\neg\varphi$ / φ

System KE

KE jest wariantem ST Smullyana ale opartym na (regresywnym) cut jako jedynej regule rozgałęziającej:

Reguły KE:
(NN) $\neg\neg\varphi$ / φ
(αE) α / α_i, $i \in \{1, 2\}$

System KE

KE jest wariantem ST Smullyana ale opartym na (regresywnym) cut jako jedynej regule rozgałęziającej:

Reguły KE:

(NN) $\neg\neg\varphi$ / φ

(αE) α / α_i, $i \in \{1, 2\}$

(βE) β, $-\beta_i$ / β_j, gdzie $i \neq j \in \{1,2\}$

System KE

KE jest wariantem ST Smullyana ale opartym na (regresywnym) cut jako jedynej regule rozgałęziającej:

Reguły KE:

(NN) $\neg\neg\varphi$ / φ

(αE) α / α_i, $i \in \{1, 2\}$

(βE) β, $-\beta_i$ / β_j, gdzie $i \neq j \in \{1,2\}$

(PB) $\varnothing$ / φ | $\neg\varphi$

System KE

KE jest wariantem ST Smullyana ale opartym na (regresywnym) cut jako jedynej regule rozgałęziającej:

Reguły KE:

(NN) $\neg\neg\varphi$ / φ

(αE) α / α_i, $i \in \{1, 2\}$

(βE) β, $-\beta_i$ / β_j, gdzie $i \neq j \in \{1,2\}$

(PB) $\varnothing$ / φ | $\neg\varphi$

Uwaga: na cut (PB) nakładamy analityczne ograniczenie!

Analityczne i uniwersalne systemy DN

3 warianty KM:

Analityczne i uniwersalne systemy DN

3 warianty KM:

1. ADN1 – tylko dowody niewprost i reguły eliminacji – symuluje KE i ST.

Analityczne i uniwersalne systemy DN

3 warianty KM:

1. ADN1 – tylko dowody niewprost i reguły eliminacji – symuluje KE i ST.
2. ADN2 – wszystkie reguły ale analitycznie ograniczone.

Analityczne i uniwersalne systemy DN

3 warianty KM:

1. ADN1 – tylko dowody niewprost i reguły eliminacji – symuluje KE i ST.
2. ADN2 – wszystkie reguły ale analitycznie ograniczone.
3. RDN – DN na klauzulach – symuluje rezolucję i DP

ADN1

Najbardziej restryktywna forma DN – należy:

ADN1

Najbardziej restryktywna forma DN – należy:

1. ograniczyć dopuszczalne reguły inferencji do reguł eliminacji;

ADN1

Najbardziej restryktywna forma DN – należy:

1. ograniczyć dopuszczalne reguły inferencji do reguł eliminacji;
2. ograniczyć dopuszczalne założenia do założeń nie wprost;

ADN1

Najbardziej restryktywna forma DN – należy:

1. ograniczyć dopuszczalne reguły inferencji do reguł eliminacji;
2. ograniczyć dopuszczalne założenia do założeń nie wprost;
3. zostawić [RED] jako jedyną regułę konstrukcji dowodu, ponadto nałożyć na nią analityczne ograniczenie.

ADN1

Najbardziej restryktywna forma DN – należy:

1. ograniczyć dopuszczalne reguły inferencji do reguł eliminacji;
2. ograniczyć dopuszczalne założenia do założeń nie wprost;
3. zostawić [RED] jako jedyną regułę konstrukcji dowodu, ponadto nałożyć na nią analityczne ograniczenie.

Uwaga: ADN1 jest adekwatną i analityczną formalizacją KRK.

ADN1

Jak symulować w ADN1 KE?:

ADN1

Jak symulować w ADN1 KE?:

Za wyjątkiem (PB) wszystkie reguły KE są regułami ADN1.

ADN1

Jak symulować w ADN1 KE?:

Za wyjątkiem (PB) wszystkie reguły KE są regułami ADN1.
Symulacja (PB)

$$\begin{array}{ccc} & \Gamma & \\ \swarrow & & \searrow \\ \varphi & & \neg\varphi \end{array} \quad \longmapsto \quad \begin{array}{l} \Gamma \\ \text{SHOW: } \varphi \\ \quad \neg\varphi \end{array}$$

ADN1

Jak symulować w ADN1 systemy tablicowe?:

ADN1

Jak symulować w ADN1 systemy tablicowe?:

Można poszerzyć zbiór reguł konstrukcji dowodu o dodatkową regułę, która bezpośrednio oddaje działanie β-reguł z ST:

ADN1

Jak symulować w ADN1 systemy tablicowe?:

Można poszerzyć zbiór reguł konstrukcji dowodu o dodatkową regułę, która bezpośrednio oddaje działanie β-reguł z ST:

$[\beta]$ Jeżeli Γ, β, β_i / $\perp$, to Γ, β / β_j, gdzie $i \neq j \in \{1, 2\}$

ADN1

Jak symulować w ADN1 systemy tablicowe?:

Można poszerzyć zbiór reguł konstrukcji dowodu o dodatkową regułę, która bezpośrednio oddaje działanie β-reguł z ST:

$[\beta]$ Jeżeli Γ, β, β_i / $\perp$, to Γ, β / β_j, gdzie $i \neq j \in \{1, 2\}$

Ogólnie: ADN1 może w ten sam sposób symulować działanie dowolnej reguły binarnie rozgałęziającej, która pojawi się na gruncie systemu typu ST. Dla dowolnej reguły o schemacie:

ADN1

Jak symulować w ADN1 systemy tablicowe?:

Można poszerzyć zbiór reguł konstrukcji dowodu o dodatkową regułę, która bezpośrednio oddaje działanie β-reguł z ST:

[β] Jeżeli Γ, β, β_i / $\perp$, to Γ, β / β_j, gdzie $i \neq j \in \{1, 2\}$

Ogólnie: ADN1 może w ten sam sposób symulować działanie dowolnej reguły binarnie rozgałęziającej, która pojawi się na gruncie systemu typu ST. Dla dowolnej reguły o schemacie:

$$\frac{\Gamma, \varphi}{\Gamma, \psi \quad | \quad \Gamma, \chi}$$

ADN1

Jak symulować w ADN1 systemy tablicowe?:

Można poszerzyć zbiór reguł konstrukcji dowodu o dodatkową regułę, która bezpośrednio oddaje działanie β-reguł z ST:

[β] Jeżeli Γ, β, β_i / $\perp$, to Γ, β / β_j, gdzie $i \neq j \in \{1, 2\}$

Ogólnie: ADN1 może w ten sam sposób symulować działanie dowolnej reguły binarnie rozgałęziającej, która pojawi się na gruncie systemu typu ST. Dla dowolnej reguły o schemacie:

$$\frac{\Gamma, \varphi}{\Gamma, \psi \quad | \quad \Gamma, \chi}$$

możemy do systemu ADN1 dodać regułę konstrukcji dowodu:

ADN1

Jak symulować w ADN1 systemy tablicowe?:

Można poszerzyć zbiór reguł konstrukcji dowodu o dodatkową regułę, która bezpośrednio oddaje działanie β-reguł z ST:

$[\beta]$ Jeżeli Γ, β, β_i / $\bot$, to Γ, β / β_j, gdzie $i \neq j \in \{1, 2\}$

Ogólnie: ADN1 może w ten sam sposób symulować działanie dowolnej reguły binarnie rozgałęziającej, która pojawi się na gruncie systemu typu ST. Dla dowolnej reguły o schemacie:

$$\frac{\Gamma, \varphi}{\Gamma, \psi \quad | \quad \Gamma, \chi}$$

możemy do systemu ADN1 dodać regułę konstrukcji dowodu: Jeżeli Γ, φ, ψ / $\bot$, to Γ, φ / χ

ADN1

Jak symulować w ADN1 systemy tablicowe?:

ADN1

Jak symulować w ADN1 systemy tablicowe?:

Uwaga: dodawanie do AND1 dodatkowych reguł konstrukcji dowodu bezpośrednio symulujących reguły rozgałęziające nie wzmacnia ADN1 gdyż są one regułami dopuszczalnymi:

ADN1

Jak symulować w ADN1 systemy tablicowe?:

Uwaga: dodawanie do AND1 dodatkowych reguł konstrukcji dowodu bezpośrednio symulujących reguły rozgałęziające nie wzmacnia ADN1 gdyż są one regułami dopuszczalnymi:

$$
\begin{array}{lll|c|l}
 & \Gamma & & \multicolumn{1}{c}{} & \\
k & \beta & & \multicolumn{1}{c}{} & \\
 & \vdots & & \multicolumn{1}{c}{} & \\
l & \multicolumn{3}{l}{\text{SHØW: } \beta_j} & [n, \beta] \\
\cline{4-4}
l+1 & & & \beta_i & ass. \\
 & & & \vdots & \\
n & & & \bot & (\bot I) \\
\cline{4-4}
\end{array}
\quad \longmapsto \quad
\begin{array}{lll|c|l}
 & \Gamma & & \multicolumn{1}{c}{} & \\
k & \beta & & \multicolumn{1}{c}{} & \\
 & \vdots & & \multicolumn{1}{c}{} & \\
l & \multicolumn{3}{l}{\text{SHØW: } \beta_j} & [n+1, RED] \\
\cline{4-4}
l+1 & & & -\beta_j & ass. \\
l+2 & & & \beta_i & (k, l+1, \beta E) \\
 & & & \vdots & \\
n+1 & & & \bot & (\bot I) \\
\cline{4-4}
\end{array}
$$

ADN2

Jak zachować analityczność i nie tracić naturalności?:

ADN2

Jak zachować analityczność i nie tracić naturalności?:

ADN1 jest analityczny i uniwersalny ale restryktywny $\Longrightarrow$ długie dowody.

ADN2

Jak zachować analityczność i nie tracić naturalności?:

ADN1 jest analityczny i uniwersalny ale restryktywny $\Longrightarrow$ długie dowody.
ADN2 zachowuje wszystkie środki dowodowe KM ale na reguły konstrukcji dowodu i reguły dołączania nakładamy analityczne ograniczenie:

ADN2

Jak zachować analityczność i nie tracić naturalności?:

ADN1 jest analityczny i uniwersalny ale restryktywny $\Longrightarrow$ długie dowody.

ADN2 zachowuje wszystkie środki dowodowe KM ale na reguły konstrukcji dowodu i reguły dołączania nakładamy analityczne ograniczenie:

- Wprowadź SHOW: φ tylko gdy $\varphi \in \Theta$;

ADN2

Jak zachować analityczność i nie tracić naturalności?:

ADN1 jest analityczny i uniwersalny ale restryktywny $\Longrightarrow$ długie dowody.
ADN2 zachowuje wszystkie środki dowodowe KM ale na reguły konstrukcji dowodu i reguły dołączania nakładamy analityczne ograniczenie:

- Wprowadź SHOW: φ tylko gdy $\varphi \in \Theta$;
- Zastosuj regułę dołączania tylko gdy konkluzja $\varphi \in \Theta$;

ADN2

Jak zachować analityczność i nie tracić naturalności?:

ADN1 jest analityczny i uniwersalny ale restryktywny $\Longrightarrow$ długie dowody.
ADN2 zachowuje wszystkie środki dowodowe KM ale na reguły konstrukcji dowodu i reguły dołączania nakładamy analityczne ograniczenie:

- Wprowadź SHOW: φ tylko gdy $\varphi \in \Theta$;
- Zastosuj regułę dołączania tylko gdy konkluzja $\varphi \in \Theta$;

gdzie Θ to zbiór wszystkich podformuł dowodzonej formuły (i przesłanek) i ich negacji.

RDN

Jak symulować w DN rezolucję?:

RDN

Jak symulować w DN rezolucję?:

Jedno z możliwych rozwiązań – RDN (Rezolucja + DN)
Indrzejczak 2002

RDN

Jak symulować w DN rezolucję?:

Jedno z możliwych rozwiązań – RDN (Rezolucja + DN) Indrzejczak 2002

- Rezolucja – prostota struktury systemu, efektywność dowodzenia, podatność na automatyzację

RDN

Jak symulować w DN rezolucję?:

Jedno z możliwych rozwiązań – RDN (Rezolucja + DN)
Indrzejczak 2002

- Rezolucja – prostota struktury systemu, efektywność dowodzenia, podatność na automatyzację
- DN – naturalność dowodzenia, czytelność wyniku, bogactwo strategii szukania dowodu

RDN

Jak symulować w DN rezolucję?:

Jedno z możliwych rozwiązań – RDN (Rezolucja + DN) Indrzejczak 2002

- Rezolucja – prostota struktury systemu, efektywność dowodzenia, podatność na automatyzację
- DN – naturalność dowodzenia, czytelność wyniku, bogactwo strategii szukania dowodu

RDN operuje na uogólnionych klauzulach.

RDN

Jak symulować w DN rezolucję?:

Jedno z możliwych rozwiązań – RDN (Rezolucja + DN)
Indrzejczak 2002

- Rezolucja – prostota struktury systemu, efektywność dowodzenia, podatność na automatyzację
- DN – naturalność dowodzenia, czytelność wyniku, bogactwo strategii szukania dowodu

RDN operuje na uogólnionych klauzulach.
Uogólniona klauzula to dowolny skończony zbiór formuł interpretowany jako alternatywa (klauzula pusta to $\perp$)

RDN

Jak symulować w DN rezolucję?:

Jedno z możliwych rozwiązań – RDN (Rezolucja + DN)
Indrzejczak 2002

- Rezolucja – prostota struktury systemu, efektywność dowodzenia, podatność na automatyzację
- DN – naturalność dowodzenia, czytelność wyniku, bogactwo strategii szukania dowodu

RDN operuje na uogólnionych klauzulach.
Uogólniona klauzula to dowolny skończony zbiór formuł interpretowany jako alternatywa (klauzula pusta to $\perp$)
Uwaga: W RDN unikamy wstępnego sprowadzania do postaci normalnej.

RDN

Reguły inferencji dla KRZ na uogólnionych klauzulach:

RDN

Reguły inferencji dla KRZ na uogólnionych klauzulach:

(W)	$\Gamma \ / \ \Gamma, \varphi$
(Rez)	$\Gamma, \varphi \ ; \ \Gamma, \neg\varphi \ // \ \Gamma$
(NN)	$\Gamma, \neg\neg\varphi \ // \ \Gamma, \varphi$
(α)	$\Gamma, \alpha \ // \ \Gamma, \alpha_1 \ ; \ \Gamma, \alpha_2$
(β)	$\Gamma, \beta \ // \ \Gamma, \beta_1, \beta_2$

RDN

Reguły inferencji dla KRZ na uogólnionych klauzulach:

(W)	$\Gamma \ / \ \Gamma, \varphi$
(Rez)	$\Gamma, \varphi \ ; \ \Gamma, \neg\varphi \ // \ \Gamma$
(NN)	$\Gamma, \neg\neg\varphi \ // \ \Gamma, \varphi$
(α)	$\Gamma, \alpha \ // \ \Gamma, \alpha_1 \ ; \ \Gamma, \alpha_2$
(β)	$\Gamma, \beta \ // \ \Gamma, \beta_1, \beta_2$

Uwaga: można uprościć w dowodach stosowanie reguł dwuprzesłankowych dopuszczając różne klauzule w przesłankach.

RDN

Co to daje?

RDN

Co to daje?

Przykład prostego dowodu:

RDN

Co to daje?

Przykład prostego dowodu:

1	SHØW: $p \vee (q \wedge r) \rightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	[8,COND]
2	$p \vee (q \wedge r)$	z
3	$p, q \wedge r$	$(2, \beta)$
4	p, q	$(3, \alpha)$
5	p, r	$(3, \alpha)$
6	$p \vee q$	$(4, \beta)$
7	$p \vee r$	$(5, \beta)$
8	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$(6, 7, \alpha)$

RDN

Co to daje?

Przykład prostego dowodu:

1	SHØW: $p \vee (q \wedge r) \rightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	[8,COND]
2	$p \vee (q \wedge r)$	z
3	$p, q \wedge r$	$(2, \beta)$
4	p, q	$(3, \alpha)$
5	p, r	$(3, \alpha)$
6	$p \vee q$	$(4, \beta)$
7	$p \vee r$	$(5, \beta)$
8	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$(6, 7, \alpha)$

Uwaga 1: Proszę porównać go z dowodem w "zwykłym" DN

RDN

Co to daje?

Przykład prostego dowodu:

1	SHØW: $p \vee (q \wedge r) \rightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	[8,COND]
2	$p \vee (q \wedge r)$	z
3	$p, q \wedge r$	$(2, \beta)$
4	p, q	$(3, \alpha)$
5	p, r	$(3, \alpha)$
6	$p \vee q$	$(4, \beta)$
7	$p \vee r$	$(5, \beta)$
8	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$(6, 7, \alpha)$

Uwaga 1: Proszę porównać go z dowodem w "zwykłym" DN
Uwaga 2: Po odwróceniu kolejności kroków mamy dowód implikacji odwrotnej!

RDN

Reguły konstrukcji dowodu:

RDN

Reguły konstrukcji dowodu:

W RDN można wszystkie standardowe reguły sprowadzić do jednej reguły – subsumpcji:

RDN

Reguły konstrukcji dowodu:

W RDN można wszystkie standardowe reguły sprowadzić do jednej reguły – subsumpcji:

[SUB] jeżeli $X; -\varphi_1; \ldots; -\varphi_i \vdash \Delta$, to $X \vdash \Gamma$, gdzie:

RDN

Reguły konstrukcji dowodu:

W RDN można wszystkie standardowe reguły sprowadzić do jednej reguły – subsumpcji:

[SUB] jeżeli $X; -\varphi_1; \ldots; -\varphi_i \vdash \Delta$, to $X \vdash \Gamma$, gdzie:

- X to zbiór klauzul

RDN

Reguły konstrukcji dowodu:

W RDN można wszystkie standardowe reguły sprowadzić do jednej reguły – subsumpcji:

[SUB] jeżeli $X; -\varphi_1; \ldots; -\varphi_i \vdash \Delta$, to $X \vdash \Gamma$, gdzie:

- X to zbiór klauzul
- Γ jest niepustą klauzulą

RDN

Reguły konstrukcji dowodu:

W RDN można wszystkie standardowe reguły sprowadzić do jednej reguły – subsumpcji:

[SUB] jeżeli $X; -\varphi_1; \ldots; -\varphi_i \vdash \Delta$, to $X \vdash \Gamma$, gdzie:

- X to zbiór klauzul
- Γ jest niepustą klauzulą
- $\Delta \subseteq \Gamma$

RDN

Reguły konstrukcji dowodu:

W RDN można wszystkie standardowe reguły sprowadzić do jednej reguły – subsumpcji:

[SUB] jeżeli $X; -\varphi_1; \ldots; -\varphi_i \vdash \Delta$, to $X \vdash \Gamma$, gdzie:

- X to zbiór klauzul
- Γ jest niepustą klauzulą
- $\Delta \subseteq \Gamma$
- $\{\varphi_1, ..., \varphi_i\} \subseteq \Gamma$, $i \geq 0$.

RDN

Reguły konstrukcji dowodu:

RDN

Reguły konstrukcji dowodu:

Schematycznie można przedstawić zastosowanie [SUB] za pomocą następującego diagramu:

RDN

Reguły konstrukcji dowodu:

Schematycznie można przedstawić zastosowanie [SUB] za pomocą następującego diagramu:

$$
\begin{array}{lll}
 & X & \\
k & \text{SHØW:} & \Gamma \\
k+1 & & \boxed{\begin{array}{c} -\varphi_1 \\ . \\ . \\ -\varphi_i \\ . \\ . \\ \Delta \end{array}} \\
. & & \\
. & & \\
k+i & & \\
. & & \\
. & & \\
n & &
\end{array}
$$

RDN

Reguły konstrukcji dowodu:

Schematycznie można przedstawić zastosowanie [SUB] za pomocą następującego diagramu:

$$
\begin{array}{lll}
 & X & \\
k & \text{SHØW:} & \Gamma \\
k+1 & & \boxed{\begin{array}{c} -\varphi_1 \\ . \\ . \\ -\varphi_i \\ . \\ . \\ \Delta \end{array}} \\
. & & \\
. & & \\
k+i & & \\
. & & \\
. & & \\
n & &
\end{array}
$$

Dowód $\varphi_1, ..., \varphi_n \vdash \psi$ w RDN sprowadza się do dowodu klauzuli $\neg\varphi_1, ..., \neg\varphi_n, \psi$

RDN

Przykład dowodu:

RDN

Przykład dowodu:

wykaż, że $p \rightarrow (q \rightarrow r), \neg(p \rightarrow r) \vdash p \wedge \neg q$.

RDN

Przykład dowodu:

wykaż, że $p \rightarrow (q \rightarrow r), \neg(p \rightarrow r) \vdash p \wedge \neg q$.

1	SHØW: $\neg(p \rightarrow (q \rightarrow r)), p \rightarrow r, p \wedge \neg q$	$[10, SUB]$
2	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	z
3	$\neg(p \rightarrow r)$	z
4	$\neg p, q \rightarrow r$	$(2, \beta)$
5	$\neg p, \neg q, r$	$(4, \beta)$
6	p	$(3, \alpha)$
7	$\neg r$	$(3, \alpha)$
8	$\neg q, r$	$(5, 6, Rez)$
9	$\neg q$	$(7, 8, Rez)$
10	$p \wedge \neg q$	$(6, 9, \alpha)$

RDN

Uwagi końcowe:

RDN

Uwagi końcowe:

- RDN pozwala w wielu wypadkach na dowody krótsze od dowodów w DN czy w REZ

RDN

Uwagi końcowe:

- RDN pozwala w wielu wypadkach na dowody krótsze od dowodów w DN czy w REZ
- w przeciwieństwie do standardowego DN można w nim dla każdej tezy zbudować dowód nie zawierający poddowodów

RDN

Uwagi końcowe:

- RDN pozwala w wielu wypadkach na dowody krótsze od dowodów w DN czy w REZ
- w przeciwieństwie do standardowego DN można w nim dla każdej tezy zbudować dowód nie zawierający poddowodów
- w przeciwieństwie do standardowego DN pozwala także na falsyfikację formuł nietautologicznych i niepoprawnych rozumowań

RDN

Uwagi końcowe:

- RDN pozwala w wielu wypadkach na dowody krótsze od dowodów w DN czy w REZ
- w przeciwieństwie do standardowego DN można w nim dla każdej tezy zbudować dowód nie zawierający poddowodów
- w przeciwieństwie do standardowego DN pozwala także na falsyfikację formuł nietautologicznych i niepoprawnych rozumowań
- można na jego bazie zbudować analityczną procedurę szukania dowodu

RDN

Uwagi końcowe:

- RDN pozwala w wielu wypadkach na dowody krótsze od dowodów w DN czy w REZ
- w przeciwieństwie do standardowego DN można w nim dla każdej tezy zbudować dowód nie zawierający poddowodów
- w przeciwieństwie do standardowego DN pozwala także na falsyfikację formuł nietautologicznych i niepoprawnych rozumowań
- można na jego bazie zbudować analityczną procedurę szukania dowodu
- poszerzenie na KRK i na wiele logik nieklasycznych jest stosunkowo łatwe