HYBRYDOWE SYSTEMY I LOGIKI

Andrzej Indrzejczak

Katedra Logiki i Metodologii Nauk UŁ

Łódź, semestr letni 2010/2011

LOGIKI MODALNE:

Rozważymy logiki modalne budowane na języku standardowym z dodatkiem:

LOGIKI MODALNE:

Rozważymy logiki modalne budowane na języku standardowym z dodatkiem:

- jednoargumentowego funktora konieczności $\Box$

LOGIKI MODALNE:

Rozważymy logiki modalne budowane na języku standardowym z dodatkiem:

- jednoargumentowego funktora konieczności $\Box$
- jednoargumentowego funktora możliwości $\Diamond$

LOGIKI MODALNE:

Rozważymy logiki modalne budowane na języku standardowym z dodatkiem:

- jednoargumentowego funktora konieczności $\Box$
- jednoargumentowego funktora możliwości $\Diamond$

Uwaga: $\Box$ traktujemy jako pierwotną stałą a $\Diamond$ jako definiowalną: $\Diamond\varphi := \neg\Box\neg\varphi$

Podział logik modalnych

Rozważmy następujące reguły modalne dla dowolnej logiki **L**:

Podział logik modalnych

Rozważmy następujące reguły modalne dla dowolnej logiki L:

(RE) jeżeli $\varphi \leftrightarrow \psi \in \mathbf{L}$, to $\Box\varphi \leftrightarrow \Box\psi \in \mathbf{L}$

Podział logik modalnych

Rozważmy następujące reguły modalne dla dowolnej logiki L:

(RE) jeżeli $\varphi \leftrightarrow \psi \in \mathbf{L}$, to $\Box\varphi \leftrightarrow \Box\psi \in \mathbf{L}$
(RM) jeżeli $\varphi \to \psi \in \mathbf{L}$, to $\Box\varphi \to \Box\psi \in \mathbf{L}$

Podział logik modalnych

Rozważmy następujące reguły modalne dla dowolnej logiki L:

(RE) jeżeli $\varphi \leftrightarrow \psi \in \mathbf{L}$, to $\Box\varphi \leftrightarrow \Box\psi \in \mathbf{L}$
(RM) jeżeli $\varphi \rightarrow \psi \in \mathbf{L}$, to $\Box\varphi \rightarrow \Box\psi \in \mathbf{L}$
(RR) jeżeli $\bigwedge\Gamma \rightarrow \psi \in \mathbf{L}$, to $\bigwedge\Box\Gamma \rightarrow \Box\psi \in \mathbf{L}$, gdzie $\Gamma \neq \varnothing$

Podział logik modalnych

Rozważmy następujące reguły modalne dla dowolnej logiki $\mathbf{L}$:

(RE) jeżeli $\varphi \leftrightarrow \psi \in \mathbf{L}$, to $\Box\varphi \leftrightarrow \Box\psi \in \mathbf{L}$
(RM) jeżeli $\varphi \rightarrow \psi \in \mathbf{L}$, to $\Box\varphi \rightarrow \Box\psi \in \mathbf{L}$
(RR) jeżeli $\bigwedge\Gamma \rightarrow \psi \in \mathbf{L}$, to $\bigwedge\Box\Gamma \rightarrow \Box\psi \in \mathbf{L}$, gdzie $\Gamma \neq \varnothing$
(RG) jeżeli $\varphi \in \mathbf{L}$, to $\Box\varphi \in \mathbf{L}$

Podział logik modalnych

Rozważmy następujące reguły modalne dla dowolnej logiki L:

(RE) jeżeli $\varphi \leftrightarrow \psi \in \mathbf{L}$, to $\Box\varphi \leftrightarrow \Box\psi \in \mathbf{L}$
(RM) jeżeli $\varphi \rightarrow \psi \in \mathbf{L}$, to $\Box\varphi \rightarrow \Box\psi \in \mathbf{L}$
(RR) jeżeli $\bigwedge\Gamma \rightarrow \psi \in \mathbf{L}$, to $\bigwedge\Box\Gamma \rightarrow \Box\psi \in \mathbf{L}$, gdzie $\Gamma \neq \varnothing$
(RG) jeżeli $\varphi \in \mathbf{L}$, to $\Box\varphi \in \mathbf{L}$

Klasy logik modalnych:

Podział logik modalnych

Rozważmy następujące reguły modalne dla dowolnej logiki **L**:

(RE) jeżeli $\varphi \leftrightarrow \psi \in \mathbf{L}$, to $\Box\varphi \leftrightarrow \Box\psi \in \mathbf{L}$
(RM) jeżeli $\varphi \to \psi \in \mathbf{L}$, to $\Box\varphi \to \Box\psi \in \mathbf{L}$
(RR) jeżeli $\bigwedge\Gamma \to \psi \in \mathbf{L}$, to $\bigwedge\Box\Gamma \to \Box\psi \in \mathbf{L}$, gdzie $\Gamma \neq \varnothing$
(RG) jeżeli $\varphi \in \mathbf{L}$, to $\Box\varphi \in \mathbf{L}$

Klasy logik modalnych:

Dowolna logika modalna **L** domknięta na (RE) to:

- *logika kongruencyjna* (klasyczna modalna),

Podział logik modalnych

Rozważmy następujące reguły modalne dla dowolnej logiki L:

(RE) jeżeli $\varphi \leftrightarrow \psi \in \mathbf{L}$, to $\Box\varphi \leftrightarrow \Box\psi \in \mathbf{L}$
(RM) jeżeli $\varphi \rightarrow \psi \in \mathbf{L}$, to $\Box\varphi \rightarrow \Box\psi \in \mathbf{L}$
(RR) jeżeli $\bigwedge\Gamma \rightarrow \psi \in \mathbf{L}$, to $\bigwedge\Box\Gamma \rightarrow \Box\psi \in \mathbf{L}$, gdzie $\Gamma \neq \varnothing$
(RG) jeżeli $\varphi \in \mathbf{L}$, to $\Box\varphi \in \mathbf{L}$

Klasy logik modalnych:

Dowolna logika modalna **L** domknięta na (RE) to:

- *logika kongruencyjna* (klasyczna modalna), domknięta na (RM) to:
- *logika monotoniczna*,

Podział logik modalnych

Rozważmy następujące reguły modalne dla dowolnej logiki **L**:

(RE) jeżeli $\varphi \leftrightarrow \psi \in \mathbf{L}$, to $\Box\varphi \leftrightarrow \Box\psi \in \mathbf{L}$
(RM) jeżeli $\varphi \rightarrow \psi \in \mathbf{L}$, to $\Box\varphi \rightarrow \Box\psi \in \mathbf{L}$
(RR) jeżeli $\bigwedge\Gamma \rightarrow \psi \in \mathbf{L}$, to $\bigwedge\Box\Gamma \rightarrow \Box\psi \in \mathbf{L}$, gdzie $\Gamma \neq \varnothing$
(RG) jeżeli $\varphi \in \mathbf{L}$, to $\Box\varphi \in \mathbf{L}$

Klasy logik modalnych:

Dowolna logika modalna **L** domknięta na (RE) to:

- *logika kongruencyjna* (klasyczna modalna), domknięta na (RM) to:
- *logika monotoniczna*, domknięta na (RR), to:
- *logika regularna*,

Podział logik modalnych

Rozważmy następujące reguły modalne dla dowolnej logiki **L**:

(RE) jeżeli $\varphi \leftrightarrow \psi \in \mathbf{L}$, to $\Box\varphi \leftrightarrow \Box\psi \in \mathbf{L}$
(RM) jeżeli $\varphi \rightarrow \psi \in \mathbf{L}$, to $\Box\varphi \rightarrow \Box\psi \in \mathbf{L}$
(RR) jeżeli $\wedge\Gamma \rightarrow \psi \in \mathbf{L}$, to $\wedge\Box\Gamma \rightarrow \Box\psi \in \mathbf{L}$, gdzie $\Gamma \neq \varnothing$
(RG) jeżeli $\varphi \in \mathbf{L}$, to $\Box\varphi \in \mathbf{L}$

Klasy logik modalnych:

Dowolna logika modalna **L** domknięta na (RE) to:

- *logika kongruencyjna* (klasyczna modalna), domknięta na (RM) to:
- *logika monotoniczna*, domknięta na (RR), to:
- *logika regularna*, wreszcie domknięta na (RR) i (RG) to:
- *logika normalna*.

Podział logik modalnych

Relacje między logikami:

Podział logik modalnych

Relacje między logikami:

- Każda logika normalna jest zarazem regularna;

Podział logik modalnych

Relacje między logikami:

- Każda logika normalna jest zarazem regularna;
- Każda logika regularna jest zarazem monotoniczna

Podział logik modalnych

Relacje między logikami:

- Każda logika normalna jest zarazem regularna;
- Każda logika regularna jest zarazem monotoniczna ((RM) jest szczególnym przypadkiem (RR));

Podział logik modalnych

Relacje między logikami:

- Każda logika normalna jest zarazem regularna;
- Każda logika regularna jest zarazem monotoniczna ((RM) jest szczególnym przypadkiem (RR));
- Każda logika monotoniczna jest logiką kongruencyjną.

Podział logik modalnych

Relacje między logikami:

- Każda logika normalna jest zarazem regularna;
- Każda logika regularna jest zarazem monotoniczna ((RM) jest szczególnym przypadkiem (RR));
- Każda logika monotoniczna jest logiką kongruencyjną.

Bazowe logiki modalne:

Podział logik modalnych

Relacje między logikami:

- Każda logika normalna jest zarazem regularna;
- Każda logika regularna jest zarazem monotoniczna ((RM) jest szczególnym przypadkiem (RR));
- Każda logika monotoniczna jest logiką kongruencyjną.

Bazowe logiki modalne:

Niech

- **E** oznacza najsłabszą logikę kongruencyjną,

Podział logik modalnych

Relacje między logikami:

- Każda logika normalna jest zarazem regularna;
- Każda logika regularna jest zarazem monotoniczna ((RM) jest szczególnym przypadkiem (RR));
- Każda logika monotoniczna jest logiką kongruencyjną.

Bazowe logiki modalne:

Niech

- **E** oznacza najsłabszą logikę kongruencyjną,
- **M** – monotoniczną,

Podział logik modalnych

Relacje między logikami:

- Każda logika normalna jest zarazem regularna;
- Każda logika regularna jest zarazem monotoniczna ((RM) jest szczególnym przypadkiem (RR));
- Każda logika monotoniczna jest logiką kongruencyjną.

Bazowe logiki modalne:

Niech

- **E** oznacza najsłabszą logikę kongruencyjną,
- **M** – monotoniczną,
- **R** – regularną,

Podział logik modalnych

Relacje między logikami:

- Każda logika normalna jest zarazem regularna;
- Każda logika regularna jest zarazem monotoniczna ((RM) jest szczególnym przypadkiem (RR));
- Każda logika monotoniczna jest logiką kongruencyjną.

Bazowe logiki modalne:

Niech

- **E** oznacza najsłabszą logikę kongruencyjną,
- **M** – monotoniczną,
- **R** – regularną,
- **K** – normalną.

LOGIKI MODALNE – WAŻNE AKSJOMATY

Rozważymy logiki, które powstają przez dodawanie do **E**, **M**, **R** lub **K** następujących aksjomatów:

LOGIKI MODALNE – WAŻNE AKSJOMATY

Rozważymy logiki, które powstają przez dodawanie do **E**, **M**, **R** lub **K** następujących aksjomatów:

nazwa	aksjomat
(D)	$\Box\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$
(T)	$\Box\varphi \rightarrow \varphi$
(4)	$\Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$
(B)	$\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$
(5)	$\Diamond\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$

LOGIKI MODALNE – WAŻNE AKSJOMATY

Rozważymy logiki, które powstają przez dodawanie do **E**, **M**, **R** lub **K** podanych wyżej aksjomatów:

LOGIKI MODALNE – WAŻNE AKSJOMATY

Rozważymy logiki, które powstają przez dodawanie do E, M, R lub K podanych wyżej aksjomatów:

Dana logika jest oznaczana przez konkatenację nazw aksjomatów, np. **M** z dodanym aksjomatem (T) i (4) to **MT4** itd.

LOGIKI MODALNE – WAŻNE AKSJOMATY

Rozważymy logiki, które powstają przez dodawanie do E, M, R lub K podanych wyżej aksjomatów:

Dana logika jest oznaczana przez konkatenację nazw aksjomatów, np. **M** z dodanym aksjomatem (T) i (4) to **MT4** itd.
Wyjątkiem od tej reguły jest kilka logik normalnych, które mają ustalone nazwy:

LOGIKI MODALNE – WAŻNE AKSJOMATY

Rozważymy logiki, które powstają przez dodawanie do **E**, **M**, **R** lub **K** podanych wyżej aksjomatów:

Dana logika jest oznaczana przez konkatenację nazw aksjomatów, np. **M** z dodanym aksjomatem (T) i (4) to **MT4** itd.
Wyjątkiem od tej reguły jest kilka logik normalnych, które mają ustalone nazwy:
KD = **D**

LOGIKI MODALNE – WAŻNE AKSJOMATY

Rozważymy logiki, które powstają przez dodawanie do E, M, R lub K podanych wyżej aksjomatów:

Dana logika jest oznaczana przez konkatenację nazw aksjomatów, np. **M** z dodanym aksjomatem (T) i (4) to **MT4** itd.
Wyjątkiem od tej reguły jest kilka logik normalnych, które mają ustalone nazwy:

KD = **D**

KT = **T**

LOGIKI MODALNE – WAŻNE AKSJOMATY

Rozważymy logiki, które powstają przez dodawanie do E, M, R lub K podanych wyżej aksjomatów:

Dana logika jest oznaczana przez konkatenację nazw aksjomatów, np. **M** z dodanym aksjomatem (T) i (4) to **MT4** itd.
Wyjątkiem od tej reguły jest kilka logik normalnych, które mają ustalone nazwy:

KD = **D**
KT = **T**
KT4 = **S4**

LOGIKI MODALNE – WAŻNE AKSJOMATY

Rozważymy logiki, które powstają przez dodawanie do E, M, R lub K podanych wyżej aksjomatów:

Dana logika jest oznaczana przez konkatenację nazw aksjomatów, np. **M** z dodanym aksjomatem (T) i (4) to **MT4** itd.
Wyjątkiem od tej reguły jest kilka logik normalnych, które mają ustalone nazwy:

KD = **D**
KT = **T**
KT4 = **S4**
KTB = **B**

LOGIKI MODALNE – WAŻNE AKSJOMATY

Rozważymy logiki, które powstają przez dodawanie do **E**, **M**, **R** lub **K** podanych wyżej aksjomatów:

Dana logika jest oznaczana przez konkatenację nazw aksjomatów, np. **M** z dodanym aksjomatem (T) i (4) to **MT4** itd.
Wyjątkiem od tej reguły jest kilka logik normalnych, które mają ustalone nazwy:
KD = **D**
KT = **T**
KT4 = **S4**
KTB = **B**
KT5 = **S5**

LOGIKI MODALNE – WAŻNE AKSJOMATY

Rozważymy logiki, które powstają przez dodawanie do **E**, **M**, **R** lub **K** podanych wyżej aksjomatów:

Dana logika jest oznaczana przez konkatenację nazw aksjomatów, np. **M** z dodanym aksjomatem (T) i (4) to **MT4** itd.
Wyjątkiem od tej reguły jest kilka logik normalnych, które mają ustalone nazwy:

KD = **D**
KT = **T**
KT4 = **S4**
KTB = **B**
KT5 = **S5**

ILE JEST TAKICH LOGIK?

Teoretycznie 128 ($4 \cdot 32$ ($=2^5$)) ale zachodzą następujące zależności:

ILE JEST TAKICH LOGIK?

Teoretycznie 128 ($4 \cdot 32$ ($=2^5$)) ale zachodzą następujące zależności:

$\mathbf{KRZ} + T \vdash D$	$\mathbf{E} + T + 5 \vdash 4$	$\mathbf{M} + B + 4 \vdash 5$
$\mathbf{KRZ} + T + 5 \vdash B$	$\mathbf{E} + B + 4 + D \vdash 5$	$\mathbf{M} + B + 5 \vdash 4$
$\mathbf{KRZ} + D + 4 + B \vdash T$	$\mathbf{E} + B + T \vdash N$	$\mathbf{M} + B \vdash N$

ILE JEST TAKICH LOGIK?

Teoretycznie 128 ($4 \cdot 32$ $(=2^5)$) ale zachodzą następujące zależności:

$\mathbf{KRZ} + T \vdash D$	$\mathbf{E} + T + 5 \vdash 4$	$\mathbf{M} + B + 4 \vdash 5$
$\mathbf{KRZ} + T + 5 \vdash B$	$\mathbf{E} + B + 4 + D \vdash 5$	$\mathbf{M} + B + 5 \vdash 4$
$\mathbf{KRZ} + D + 4 + B \vdash T$	$\mathbf{E} + B + T \vdash N$	$\mathbf{M} + B \vdash N$

stąd np. $\mathbf{S5} = \mathbf{KT45} = \mathbf{KTB4} = \mathbf{KT5}$.

ILE JEST TAKICH LOGIK?

Teoretycznie 128 ($4 \cdot 32$ ($=2^5$)) ale zachodzą następujące zależności:

$\mathbf{KRZ} + T \vdash D$	$\mathbf{E} + T + 5 \vdash 4$	$\mathbf{M} + B + 4 \vdash 5$
$\mathbf{KRZ} + T + 5 \vdash B$	$\mathbf{E} + B + 4 + D \vdash 5$	$\mathbf{M} + B + 5 \vdash 4$
$\mathbf{KRZ} + D + 4 + B \vdash T$	$\mathbf{E} + B + T \vdash N$	$\mathbf{M} + B \vdash N$

stąd np. $\mathbf{S5} = \mathbf{KT45} = \mathbf{KTB4} = \mathbf{KT5}$.

W rezultacie mamy:

- 18 różnych kongruencyjnych logik

ILE JEST TAKICH LOGIK?

Teoretycznie 128 ($4 \cdot 32$ ($=2^5$)) ale zachodzą następujące zależności:

$\mathbf{KRZ} + T \vdash D$	$\mathbf{E} + T + 5 \vdash 4$	$\mathbf{M} + B + 4 \vdash 5$
$\mathbf{KRZ} + T + 5 \vdash B$	$\mathbf{E} + B + 4 + D \vdash 5$	$\mathbf{M} + B + 5 \vdash 4$
$\mathbf{KRZ} + D + 4 + B \vdash T$	$\mathbf{E} + B + T \vdash N$	$\mathbf{M} + B \vdash N$

stąd np. $\mathbf{S5} = \mathbf{KT45} = \mathbf{KTB4} = \mathbf{KT5}$.

W rezultacie mamy:

- 18 różnych kongruencyjnych logik
- 15 monotonicznych logik

ILE JEST TAKICH LOGIK?

Teoretycznie 128 ($4 \cdot 32$ $(=2^5)$) ale zachodzą następujące zależności:

$\mathbf{KRZ} + T \vdash D$	$\mathbf{E} + T + 5 \vdash 4$	$\mathbf{M} + B + 4 \vdash 5$
$\mathbf{KRZ} + T + 5 \vdash B$	$\mathbf{E} + B + 4 + D \vdash 5$	$\mathbf{M} + B + 5 \vdash 4$
$\mathbf{KRZ} + D + 4 + B \vdash T$	$\mathbf{E} + B + T \vdash N$	$\mathbf{M} + B \vdash N$

stąd np. $\mathbf{S5} = \mathbf{KT45} = \mathbf{KTB4} = \mathbf{KT5}$.

W rezultacie mamy:

- 18 różnych kongruencyjnych logik
- 15 monotonicznych logik
- 12 regularnych logik

ILE JEST TAKICH LOGIK?

Teoretycznie 128 ($4 \cdot 32$ ($=2^5$)) ale zachodzą następujące zależności:

$\mathbf{KRZ} + T \vdash D$	$\mathbf{E} + T + 5 \vdash 4$	$\mathbf{M} + B + 4 \vdash 5$
$\mathbf{KRZ} + T + 5 \vdash B$	$\mathbf{E} + B + 4 + D \vdash 5$	$\mathbf{M} + B + 5 \vdash 4$
$\mathbf{KRZ} + D + 4 + B \vdash T$	$\mathbf{E} + B + T \vdash N$	$\mathbf{M} + B \vdash N$

stąd np. $\mathbf{S5} = \mathbf{KT45} = \mathbf{KTB4} = \mathbf{KT5}$.

W rezultacie mamy:

- 18 różnych kongruencyjnych logik
- 15 monotonicznych logik
- 12 regularnych logik
- 15 normalnych logik

ILE JEST TAKICH LOGIK?

Teoretycznie 128 ($4 \cdot 32$ ($=2^5$)) ale zachodzą następujące zależności:

$\mathbf{KRZ} + T \vdash D$	$\mathbf{E} + T + 5 \vdash 4$	$\mathbf{M} + B + 4 \vdash 5$
$\mathbf{KRZ} + T + 5 \vdash B$	$\mathbf{E} + B + 4 + D \vdash 5$	$\mathbf{M} + B + 5 \vdash 4$
$\mathbf{KRZ} + D + 4 + B \vdash T$	$\mathbf{E} + B + T \vdash N$	$\mathbf{M} + B \vdash N$

stąd np. $\mathbf{S5} = \mathbf{KT45} = \mathbf{KTB4} = \mathbf{KT5}$.

W rezultacie mamy:

- 18 różnych kongruencyjnych logik
- 15 monotonicznych logik
- 12 regularnych logik
- 15 normalnych logik

Dodatkowo można rozważać 16 różnych kongruencyjnych logik i 10 monotonicznych z regułą (RG) – nie są to logiki normalne!

RS dla bazowych logik normalnych:

Reguły modalne:

RS dla bazowych logik normalnych:

Reguły modalne:

$(K)\quad \dfrac{\Gamma \Rightarrow \varphi}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box\varphi} \qquad (T)\quad \dfrac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Box\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$

$(D)\quad \dfrac{\Gamma \Rightarrow}{\Box\Gamma \Rightarrow} \qquad (D4)\quad \dfrac{\Gamma, \Box\Gamma \Rightarrow}{\Box\Gamma \Rightarrow}$

$(K4)\quad \dfrac{\Box\Gamma, \Gamma \Rightarrow \varphi}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box\varphi} \qquad (4)\quad \dfrac{\Box\Gamma \Rightarrow \varphi}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box\varphi}$

$(B)\quad \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Box\Delta, \varphi}{\Box\Gamma \Rightarrow \Delta, \Box\varphi} \qquad (B4)\quad \dfrac{\Gamma, \Box\Gamma \Rightarrow \Box\Delta, \Box\Lambda, \varphi}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box\Delta, \Lambda\Box\varphi}$

$(BD)\quad \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Box\Delta}{\Box\Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad (5)\quad \dfrac{\Box\Gamma \Rightarrow \Box\Delta, \varphi}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box\Delta, \Box\varphi}$

gdzie $\Box\Gamma = \{\Box\varphi : \varphi \in \Gamma\}$

RS dla bazowych logik normalnych:

komentarze:

RS dla bazowych logik normalnych:

komentarze:

- autorami tych reguł są m.in: Ohnishi, Matsumoto, Zeman, Takano, Goble, Schvarts

RS dla bazowych logik normalnych:

komentarze:

- autorami tych reguł są m.in: Ohnishi, Matsumoto, Zeman, Takano, Goble, Schvarts
- podane reguły dodane do RS dla **KRZ** pozwalają w różnych kombinacjach sformalizować wszystkie 15 bazowych logik normalnych (i 12 regularnych przy zastrzeżeniu, że Γ nie jest pusta)

RS dla bazowych logik normalnych:

komentarze:

- autorami tych reguł są m.in: Ohnishi, Matsumoto, Zeman, Takano, Goble, Schvarts
- podane reguły dodane do RS dla **KRZ** pozwalają w różnych kombinacjach sformalizować wszystkie 15 bazowych logik normalnych (i 12 regularnych przy zastrzeżeniu, że Γ nie jest pusta)
- reguły te nie są niezależne i modularne.

RS dla bazowych logik normalnych:

komentarze:

- autorami tych reguł są m.in: Ohnishi, Matsumoto, Zeman, Takano, Goble, Schvarts
- podane reguły dodane do RS dla **KRZ** pozwalają w różnych kombinacjach sformalizować wszystkie 15 bazowych logik normalnych (i 12 regularnych przy zastrzeżeniu, że Γ nie jest pusta)
- reguły te nie są niezależne i modularne.
- nie wszystkie systemy są cut-free

RS dla bazowych logik kongruencyjnych i monotonicznych:

Reguły modalne:

RS dla bazowych logik kongruencyjnych i monotonicznych:

Reguły modalne:

(E) $$\frac{\varphi \Rightarrow \psi \qquad \psi \Rightarrow \varphi}{\Box\varphi \Rightarrow \Box\psi}$$

(M) $$\frac{\varphi \Rightarrow \psi}{\Box\varphi \Rightarrow \Box\psi}$$

$(D\text{-}2)$ $$\frac{\Rightarrow \varphi, \psi \qquad \varphi, \psi \Rightarrow}{\Box\varphi, \Box\psi \Rightarrow}$$

(D) $$\frac{\varphi, \psi \Rightarrow}{\Box\varphi, \Box\psi \Rightarrow}$$

(4-2) $$\frac{\Box\varphi \Rightarrow \psi \qquad \psi \Rightarrow \Box\varphi}{\Box\varphi \Rightarrow \Box\psi}$$

(4) $$\frac{\Box\varphi \Rightarrow \psi}{\Box\varphi \Rightarrow \Box\psi}$$

(5-2) $$\frac{\Rightarrow \Box\varphi, \psi \qquad \Box\varphi, \psi \Rightarrow}{\Rightarrow \Box\varphi, \Box\psi}$$

(5) $$\frac{\Rightarrow \Box\varphi, \psi}{\Rightarrow \Box\varphi, \Box\psi}$$

$(B\text{-}2)$ $$\frac{\Rightarrow \Box\varphi, \psi \qquad \Box\varphi, \psi \Rightarrow}{\Rightarrow \varphi, \Box\psi}$$

(B) $$\frac{\Rightarrow \Box\varphi, \psi}{\Rightarrow \varphi, \Box\psi}$$

RS dla bazowych logik kongruencyjnych i monotonicznych:

komentarze:

RS dla bazowych logik kongruencyjnych i monotonicznych:

komentarze:

- autorami tych reguł są m.in: Lavendhome, Lukas ((E) i (M)), Indrzejczak (pozostałe)

RS dla bazowych logik kongruencyjnych i monotonicznych:

komentarze:

- autorami tych reguł są m.in: Lavendhome, Lukas ((E) i (M)), Indrzejczak (pozostałe)
- podane reguły dodane do RS dla **KRZ** pozwalają w różnych kombinacjach sformalizować wszystkie bazowe logiki kongruencyjne i monotoniczne

RS dla bazowych logik kongruencyjnych i monotonicznych:

komentarze:

- autorami tych reguł są m.in: Lavendhome, Lukas ((E) i (M)), Indrzejczak (pozostałe)
- podane reguły dodane do RS dla **KRZ** pozwalają w różnych kombinacjach sformalizować wszystkie bazowe logiki kongruencyjne i monotoniczne
- reguły te są niezależne i modularne.

RS dla bazowych logik kongruencyjnych i monotonicznych:

komentarze:

- autorami tych reguł są m.in: Lavendhome, Lukas ((E) i (M)), Indrzejczak (pozostałe)
- podane reguły dodane do RS dla **KRZ** pozwalają w różnych kombinacjach sformalizować wszystkie bazowe logiki kongruencyjne i monotoniczne
- reguły te są niezależne i modularne.
- nie wszystkie systemy są cut-free

RS dla bazowych logik kongruencyjnych i monotonicznych:

komentarze:

- autorami tych reguł są m.in: Lavendhome, Lukas ((E) i (M)), Indrzejczak (pozostałe)
- podane reguły dodane do RS dla **KRZ** pozwalają w różnych kombinacjach sformalizować wszystkie bazowe logiki kongruencyjne i monotoniczne
- reguły te są niezależne i modularne.
- nie wszystkie systemy są cut-free

Uwaga: na bazie podanych systemów RS można zbudować systemy tablicowe w stylu Hintikki wg wzorca podanego dla KRK.

Standardowa DN dla bazowych logik modalnych:

Istnieją 4 zasadnicze podejścia:

Standardowa DN dla bazowych logik modalnych:

Istnieją 4 zasadnicze podejścia:

1. modalizacja założeń dowodu

Standardowa DN dla bazowych logik modalnych:

Istnieją 4 zasadnicze podejścia:

1. modalizacja założeń dowodu
2. modalizacja reguł

Standardowa DN dla bazowych logik modalnych:

Istnieją 4 zasadnicze podejścia:

1. modalizacja założeń dowodu
2. modalizacja reguł
3. modalizacja reguły rejteracji

Standardowa DN dla bazowych logik modalnych:

Istnieją 4 zasadnicze podejścia:

1. modalizacja założeń dowodu
2. modalizacja reguł
3. modalizacja reguły rejteracji
4. zastosowanie modalnego założenia

Standardowa DN dla bazowych logik modalnych:

1. Modalizacja założeń dowodu:

Standardowa DN dla bazowych logik modalnych:

1. Modalizacja założeń dowodu:

Curry 1950, Borkowski i Słupecki 1958, Prawitz 1965

Standardowa DN dla bazowych logik modalnych:

1. Modalizacja założeń dowodu:

Curry 1950, Borkowski i Słupecki 1958, Prawitz 1965

Reguła $(\Box E)$ bez ograniczeń $(\Box\varphi \vdash \varphi)$

Standardowa DN dla bazowych logik modalnych:

1. Modalizacja założeń dowodu:

Curry 1950, Borkowski i Słupecki 1958, Prawitz 1965
Reguła ($\Box E$) bez ograniczeń ($\Box\varphi \vdash \varphi$)
Zastosowanie ($\Box D$) ograniczone tylko do formuł, opartych o zmodalizowane założenia, gdzie:

Standardowa DN dla bazowych logik modalnych:

1. Modalizacja założeń dowodu:

Curry 1950, Borkowski i Słupecki 1958, Prawitz 1965
Reguła ($\Box E$) bez ograniczeń ($\Box\varphi \vdash \varphi$)
Zastosowanie ($\Box D$) ograniczone tylko do formuł, opartych o zmodalizowane założenia, gdzie:

- dla **S4** – są to formuły typu $\Box\varphi, \neg\Diamond\varphi$

Standardowa DN dla bazowych logik modalnych:

1. Modalizacja założeń dowodu:

Curry 1950, Borkowski i Słupecki 1958, Prawitz 1965

Reguła ($\Box E$) bez ograniczeń ($\Box\varphi \vdash \varphi$)

Zastosowanie ($\Box D$) ograniczone tylko do formuł, opartych o zmodalizowane założenia, gdzie:

- dla **S4** – są to formuły typu $\Box\varphi, \neg\Diamond\varphi$
- dla **S5** – formuły typu $\Box\varphi, \Diamond\varphi, \neg\Box\varphi, \neg\Diamond\varphi$

Standardowa DN dla bazowych logik modalnych:

1. Modalizacja założeń dowodu:

Curry 1950, Borkowski i Słupecki 1958, Prawitz 1965
Reguła ($\Box E$) bez ograniczeń ($\Box\varphi \vdash \varphi$)
Zastosowanie ($\Box D$) ograniczone tylko do formuł, opartych o zmodalizowane założenia, gdzie:

- dla **S4** – są to formuły typu $\Box\varphi, \neg\Diamond\varphi$
- dla **S5** – formuły typu $\Box\varphi, \Diamond\varphi, \neg\Box\varphi, \neg\Diamond\varphi$

Zatem w rachunku podstawą jest następująca reguła (por. z odpowiednimi regułami z RS):

$$(\Box D) \quad \Gamma \vdash \varphi \; / \; \Gamma \vdash \Box\varphi,$$

gdzie Γ to zbiór zmodalizowanych założeń.

Standardowa DN dla bazowych logik modalnych:

1. Modalizacja założeń dowodu – wady i zalety:

Standardowa DN dla bazowych logik modalnych:

1. Modalizacja założeń dowodu – wady i zalety:

- $+$ podejście niezależne od formatu DN (choć najlepiej w S-formacie, np. Suppesa)

Standardowa DN dla bazowych logik modalnych:

1. Modalizacja założeń dowodu – wady i zalety:

- + podejście niezależne od formatu DN (choć najlepiej w S-formacie, np. Suppesa)
- - ograniczony zasięg – tylko **S4** i **S5** ew. ich regularne i monotoniczne odpowiedniki (por. z regułami RS dla innych logik)

Standardowa DN dla bazowych logik modalnych:

1. Modalizacja założeń dowodu – wady i zalety:

- + podejście niezależne od formatu DN (choć najlepiej w S-formacie, np. Suppesa)
- - ograniczony zasięg – tylko **S4** i **S5** ew. ich regularne i monotoniczne odpowiedniki (por. z regułami RS dla innych logik)
- - nadmiernie długie dowody – brak normalizacji

Standardowa DN dla bazowych logik modalnych:

1. Modalizacja założeń dowodu – wady i zalety:

- + podejście niezależne od formatu DN (choć najlepiej w S-formacie, np. Suppesa)
- - ograniczony zasięg – tylko **S4** i **S5** ew. ich regularne i monotoniczne odpowiedniki (por. z regułami RS dla innych logik)
- - nadmiernie długie dowody – brak normalizacji

Uwaga: Prawitz – próby uelastycznienia def. zmodalizowanych założeń.

Standardowa DN dla bazowych logik modalnych:

1. Modalizacja założeń dowodu – przykład:

Standardowa DN dla bazowych logik modalnych:

1. Modalizacja założeń dowodu – przykład:

$\{1\}$	1	$\Box p \wedge \Box q$	$z.$
$\{1\}$	2	$\Box p$	$(1, \wedge E_S)$
$\{1\}$	3	$\Box q$	$(1, \wedge E_S)$
$\{4\}$	4	$\Box p$	$z.$
$\{4\}$	5	p	$(4, \Box E_S)$
$\{6\}$	6	$\Box q$	$z.$
$\{6\}$	7	q	$(6, \Box E_S)$
$\{4,6\}$	8	$p \wedge q$	$(5, 7, \wedge D_S)$
$\{4,6\}$	9	$\Box(p \wedge q)$	$(8, \Box D_S)$
$\{4\}$	10	$\Box q \rightarrow \Box(p \wedge q)$	$(9, \rightarrow D_S)$
	11	$\Box p \rightarrow (\Box q \rightarrow \Box(p \wedge q))$	$(10, \rightarrow D_S)$
$\{1\}$	12	$\Box q \rightarrow \Box(p \wedge q)$	$(2, 11, \rightarrow E_S)$
$\{1\}$	13	$\Box(p \wedge q)$	$(3, 12, \rightarrow E_S)$
	14	$\Box p \wedge \Box q \rightarrow \Box(p \wedge q)$	$(13, \rightarrow D_S)$

Standardowa DN dla bazowych logik modalnych:

2. Modalizacja reguł – Bull i Segerberg 1984:

Standardowa DN dla bazowych logik modalnych:

2. Modalizacja reguł – Bull i Segerberg 1984:

Motywacja: dowolna reguła poprawna w **KRZ** jest poprawna w modalnym kontekście.

Standardowa DN dla bazowych logik modalnych:

2. Modalizacja reguł – Bull i Segerberg 1984:

Motywacja: dowolna reguła poprawna w **KRZ** jest poprawna w modalnym kontekście.

1. Dla reguł inferencji modalizację opieramy na regułe sekwentowej: jeżeli $\Gamma \vdash \varphi$, to $\Box^n\Gamma \vdash \Box^n\varphi$

Standardowa DN dla bazowych logik modalnych:

2. Modalizacja reguł – Bull i Segerberg 1984:

Motywacja: dowolna reguła poprawna w **KRZ** jest poprawna w modalnym kontekście.

1. Dla reguł inferencji modalizację opieramy na regule sekwentowej: jeżeli $\Gamma \vdash \varphi$, to $\Box^n\Gamma \vdash \Box^n\varphi$

Przykłady reguł zmodalizowanych:

$(\Box^n \wedge D)$ $\quad \Box^n\varphi, \Box^n\psi \;/\; \Box^n(\varphi \wedge \psi)$

$(\Box^n \wedge E)$ $\quad \Box^n(\varphi \wedge \psi) \;/\; \Box^n\varphi$ (lub $\Box^n\psi$)

Standardowa DN dla bazowych logik modalnych:

2. Modalizacja reguł – Bull i Segerberg 1984:

Motywacja: dowolna reguła poprawna w **KRZ** jest poprawna w modalnym kontekście.

1. Dla reguł inferencji modalizację opieramy na regule sekwentowej: jeżeli $\Gamma \vdash \varphi$, to $\Box^n\Gamma \vdash \Box^n\varphi$

Przykłady reguł zmodalizowanych:

$(\Box^n \wedge D)$ $\quad \Box^n\varphi, \Box^n\psi \ / \ \Box^n(\varphi \wedge \psi)$

$(\Box^n \wedge E)$ $\quad \Box^n(\varphi \wedge \psi) \ / \ \Box^n\varphi$ (lub $\Box^n\psi$)

2. Dla reguł konstrukcji dowodu:

Standardowa DN dla bazowych logik modalnych:

2. Modalizacja reguł – Bull i Segerberg 1984:

Motywacja: dowolna reguła poprawna w **KRZ** jest poprawna w modalnym kontekście.

1. Dla reguł inferencji modalizację opieramy na regule sekwentowej: jeżeli $\Gamma \vdash \varphi$, to $\Box^n\Gamma \vdash \Box^n\varphi$

Przykłady reguł zmodalizowanych:

$(\Box^n \wedge D)$ $\quad \Box^n\varphi, \Box^n\psi \;/\; \Box^n(\varphi \wedge \psi)$

$(\Box^n \wedge E)$ $\quad \Box^n(\varphi \wedge \psi) \;/\; \Box^n\varphi$ (lub $\Box^n\psi$)

2. Dla reguł konstrukcji dowodu:

$[\Box^n COND]$ $\quad$ jeżeli $\Gamma, \varphi \vdash \psi$, to $\Box^n\Gamma \vdash \Box^n(\varphi \rightarrow \psi)$

$[\Box^n RED]$ $\quad$ jeżeli $\Gamma, \neg\varphi \vdash \bot$, to $\Box^n\Gamma \vdash \Box^n\varphi$

Standardowa DN dla bazowych logik modalnych:

2. Modalizacja reguł – wady i zalety:

Standardowa DN dla bazowych logik modalnych:

2. Modalizacja reguł – wady i zalety:

- + podejście niezależne od formatu DN w przypadku reg. inferencji (a ograniczenie do ich modalizacji jest wystarczające!)

Standardowa DN dla bazowych logik modalnych:

2. Modalizacja reguł – wady i zalety:

- $+$ podejście niezależne od formatu DN w przypadku reg. inferencji (a ograniczenie do ich modalizacji jest wystarczające!)
- - ograniczony zasięg – tylko **K** choć możliwe wzmocnienia z użyciem dodatkowych reguł

Standardowa DN dla bazowych logik modalnych:

3. Modalizacja reguły rejteracji:

Standardowa DN dla bazowych logik modalnych:

3. Modalizacja reguły rejteracji:

Fitch 1952, 1966, Siemens 1977, Fitting 1983, Indrzejczak 1994, 1995; oraz dla innych logik nieklasycznych: Thomason 1970, Anderson and Belnap 1975, Cerrato 1994.

Standardowa DN dla bazowych logik modalnych:

3. Modalizacja reguły rejteracji:

Fitch 1952, 1966, Siemens 1977, Fitting 1983, Indrzejczak 1994, 1995; oraz dla innych logik nieklasycznych: Thomason 1970, Anderson and Belnap 1975, Cerrato 1994.

Podejście oparte na wprowadzeniu specjalnej kategorii poddowodów (modalnych), do których można przenosić za pomocą rejteracji tylko określone formuły z dowodu nadrzędnego.

Standardowa DN dla bazowych logik modalnych:

3. Modalizacja reguły rejteracji:

Fitch 1952, 1966, Siemens 1977, Fitting 1983, Indrzejczak 1994, 1995; oraz dla innych logik nieklasycznych: Thomason 1970, Anderson and Belnap 1975, Cerrato 1994.

Podejście oparte na wprowadzeniu specjalnej kategorii poddowodów (modalnych), do których można przenosić za pomocą rejteracji tylko określone formuły z dowodu nadrzędnego.

Do rachunku dołączamy regułę konstrukcji dowodu:

$[NEC]$ jeżeli $\Gamma^\star \vdash \varphi$, to $\Gamma \vdash \Box\varphi$

gdzie $\Gamma^\star$ dla $\mathbf{K} = \{\varphi : \Box\varphi \in \Gamma\}$

Standardowa DN dla bazowych logik modalnych:

3. Modalizacja reguły rejteracji:

Standardowa DN dla bazowych logik modalnych:

3. Modalizacja reguły rejteracji:

Dla mocniejszych logik dodatkowo modyfikujemy regułę rejteracji dopuszczając:

Standardowa DN dla bazowych logik modalnych:

3. Modalizacja reguły rejteracji:

Dla mocniejszych logik dodatkowo modyfikujemy regułę rejteracji dopuszczając:

- $\{\Box\varphi : \Box\varphi \in \Gamma\}$ dla logik zawierających (4)

Standardowa DN dla bazowych logik modalnych:

3. Modalizacja reguły rejteracji:

Dla mocniejszych logik dodatkowo modyfikujemy regułę rejteracji dopuszczając:

- $\{\Box\varphi : \Box\varphi \in \Gamma\}$ dla logik zawierających (4)
- $\{\Diamond\varphi : \varphi \in \Gamma\}$ dla logik zawierających (B)

Standardowa DN dla bazowych logik modalnych:

3. Modalizacja reguły rejteracji:

Dla mocniejszych logik dodatkowo modyfikujemy regułę rejteracji dopuszczając:

- $\{\Box\varphi : \Box\varphi \in \Gamma\}$ dla logik zawierających (4)
- $\{\Diamond\varphi : \varphi \in \Gamma\}$ dla logik zawierających (B)
- $\{\Diamond\varphi : \Diamond\varphi \in \Gamma\}$ dla logik zawierających (5)

Standardowa DN dla bazowych logik modalnych:

3. Modalizacja reguły rejteracji:

Dla mocniejszych logik dodatkowo modyfikujemy regułę rejteracji dopuszczając:

- $\{\Box\varphi : \Box\varphi \in \Gamma\}$ dla logik zawierających (4)
- $\{\Diamond\varphi : \varphi \in \Gamma\}$ dla logik zawierających (B)
- $\{\Diamond\varphi : \Diamond\varphi \in \Gamma\}$ dla logik zawierających (5)

Dla logik zawierających (D) lub (T) dodajemy odpowiednie reguły inferencji:

Standardowa DN dla bazowych logik modalnych:

3. Modalizacja reguły rejteracji:

Dla mocniejszych logik dodatkowo modyfikujemy regułę rejteracji dopuszczając:

- $\{\Box\varphi : \Box\varphi \in \Gamma\}$ dla logik zawierających (4)
- $\{\Diamond\varphi : \varphi \in \Gamma\}$ dla logik zawierających (B)
- $\{\Diamond\varphi : \Diamond\varphi \in \Gamma\}$ dla logik zawierających (5)

Dla logik zawierających (D) lub (T) dodajemy odpowiednie reguły inferencji:

(D) $\Box\varphi \; / \; \Diamond\varphi$ lub

Standardowa DN dla bazowych logik modalnych:

3. Modalizacja reguły rejteracji:

Dla mocniejszych logik dodatkowo modyfikujemy regułę rejteracji dopuszczając:

- $\{\Box\varphi : \Box\varphi \in \Gamma\}$ dla logik zawierających (4)
- $\{\Diamond\varphi : \varphi \in \Gamma\}$ dla logik zawierających (B)
- $\{\Diamond\varphi : \Diamond\varphi \in \Gamma\}$ dla logik zawierających (5)

Dla logik zawierających (D) lub (T) dodajemy odpowiednie reguły inferencji:

(D) $\Box\varphi \;/\; \Diamond\varphi$ lub
(T) $\Box\varphi \;/\; \varphi$ (ew. $\varphi \;/\; \Diamond\varphi$)

Standardowa DN dla bazowych logik modalnych:

3. Modalizacja reguły rejteracji:

Dla mocniejszych logik dodatkowo modyfikujemy regułę rejteracji dopuszczając:

- $\{\Box\varphi : \Box\varphi \in \Gamma\}$ dla logik zawierających (4)
- $\{\Diamond\varphi : \varphi \in \Gamma\}$ dla logik zawierających (B)
- $\{\Diamond\varphi : \Diamond\varphi \in \Gamma\}$ dla logik zawierających (5)

Dla logik zawierających (D) lub (T) dodajemy odpowiednie reguły inferencji:
(D) $\Box\varphi \;/\; \Diamond\varphi$ lub
(T) $\Box\varphi \;/\; \varphi$ (ew. $\varphi \;/\; \Diamond\varphi$)
Dla logik regularnych nakładamy warunek, że Γ jest niepuste.

Standardowa DN dla bazowych logik modalnych:

3. Modalizacja reguły rejteracji:

Standardowa DN dla bazowych logik modalnych:

3. Modalizacja reguły rejteracji:

W KM realizacja

$[NEC]$ jeżeli $\Gamma^\star \vdash \varphi$, to $\Gamma \vdash \Box\varphi$

wygląda następująco:

Standardowa DN dla bazowych logik modalnych:

3. Modalizacja reguły rejteracji:

W KM realizacja

$[NEC]$ jeżeli $\Gamma^\star \vdash \varphi$, to $\Gamma \vdash \Box\varphi$

wygląda następująco:

$$\begin{array}{lll} & \Gamma & \\ i & \text{SHØW: } \Box\varphi & \\ & & \boxed{\begin{array}{l} \Gamma^\star \\ \vdots \\ \varphi \end{array}} \\ k & & \end{array}$$

Standardowa DN dla bazowych logik modalnych:

3. Modalizacja reguły rejteracji:

Standardowa DN dla bazowych logik modalnych:

3. Modalizacja reguły rejteracji:

Przykład dowodu w **S5**:

Standardowa DN dla bazowych logik modalnych:

3. Modalizacja reguły rejteracji:

Przykład dowodu w **S5**:

1	SHØW: $\Box p \wedge \Diamond q \rightarrow \Diamond\Box(p \wedge \Box\Diamond q)$	$[11, COND]$
2	$\quad \Box p \wedge \Diamond q$	*ass.*
3	$\quad \Box p$	$(2, \alpha E)$
4	$\quad \Diamond q$	$(2, \alpha E)$
5	$\quad$ SHØW: $\Box(p \wedge \Box\Diamond q)$	$[10, NEC]$
6	$\quad\quad p$	$(3, Reit(K))$
7	$\quad\quad \Diamond q$	$(4, Reit(5))$
8	$\quad\quad$ SHØW: $\Box\Diamond q$	$[9, NEC]$
9	$\quad\quad\quad \Diamond q$	$(7, Reit(5))$
10	$\quad\quad p \wedge \Box\Diamond q$	$(6, 8, \alpha D)$
11	$\quad \Diamond\Box(p \wedge \Box\Diamond q)$	$(5, T)$

Standardowa DN dla bazowych logik modalnych:

3. Modalizacja reguły rejteracji – wady i zalety:

Standardowa DN dla bazowych logik modalnych:

3. Modalizacja reguły rejteracji – wady i zalety:

- $+$ szeroki zasięg – wszystkie logiki bazowe, a ponadto wiele innych

Standardowa DN dla bazowych logik modalnych:

3. Modalizacja reguły rejteracji – wady i zalety:

- + szeroki zasięg – wszystkie logiki bazowe, a ponadto wiele innych
- + jest to podejście modularne

Standardowa DN dla bazowych logik modalnych:

3. Modalizacja reguły rejteracji – wady i zalety:

- $+$ szeroki zasięg – wszystkie logiki bazowe, a ponadto wiele innych
- $+$ jest to podejście modularne
- - podejście zależne od formatu DN – Format Jaśkowskiego niezbędny (F- i L-system)

Standardowa DN dla bazowych logik modalnych:

4. Zastosowanie modalnego założenia:

Standardowa DN dla bazowych logik modalnych:

4. Zastosowanie modalnego założenia:

Fitch 1950 – wariant poprzedniego podejścia.

Standardowa DN dla bazowych logik modalnych:

4. Zastosowanie modalnego założenia:

Fitch 1950 – wariant poprzedniego podejścia.

Mamy regułę rejteracji definiowaną jak wyżej ale poddowód modalny służy wprowadzaniu $\Diamond$ (a nie $\Box$) i wymaga użycia dodatkowego założenia modalnego.

Standardowa DN dla bazowych logik modalnych:

4. Zastosowanie modalnego założenia:

Fitch 1950 – wariant poprzedniego podejścia.

Mamy regułę rejteracji definiowaną jak wyżej ale poddowód modalny służy wprowadzaniu $\Diamond$ (a nie $\Box$) i wymaga użycia dodatkowego założenia modalnego.

Do rachunku dołączamy regułę konstrukcji dowodu:

$[POS]$ jeżeli $\Gamma^\star, \psi \vdash \varphi$, to $\Gamma, \Diamond\psi \vdash \Diamond\varphi$

gdzie $\Gamma^\star$ definiowane jest jak poprzednio.

Standardowa DN dla bazowych logik modalnych:

4. Zastosowanie modalnego założenia:

Standardowa DN dla bazowych logik modalnych:

4. Zastosowanie modalnego założenia:

W KM realizacja $[POS]$ wygląda następująco:

Standardowa DN dla bazowych logik modalnych:

4. Zastosowanie modalnego założenia:

W KM realizacja [*POS*] wygląda następująco:

	Γ	
	$\Diamond\psi$	
i	SHØW: $\Diamond\varphi$	
$i+1$		ψ
		$\Gamma^\star$
		$\vdots$
k		φ

Standardowa DN dla bazowych logik modalnych:

4. Zastosowanie modalnego założenia:

W KM realizacja [*POS*] wygląda następująco:

$$
\begin{array}{ll}
 & \Gamma \\
 & \Diamond\psi \\
i & \text{SHØW: } \Diamond\varphi \\
i+1 & \qquad \boxed{\begin{array}{l} \psi \\ \Gamma^{\star} \\ \vdots \\ \varphi \end{array}} \\
k &
\end{array}
$$

Uwaga: W praktyce najlepiej używać obu reguł: [NEC] i [POS].

Standardowa DN dla bazowych logik modalnych:

4. Zastosowanie modalnego założenia – przykład dowodu w **KB**:

Standardowa DN dla bazowych logik modalnych:

4. Zastosowanie modalnego założenia – przykład dowodu w **KB**:

1	SHØW: $\Box(p \to \neg\Diamond q) \wedge \Diamond p \to \neg q$	$[5, COND]$
2	$\Box(p \to \neg\Diamond q) \wedge \Diamond p$	$ass.$
3	$\Box(p \to \neg\Diamond q)$	$(2, \alpha E)$
4	$\Diamond p$	$(2, \alpha E)$
5	SHØW: $\neg q$	$[15, RED]$
6	q	$ass.$
7	SHØW: $\Box\Diamond q$	$[8, NEC]$
8	$\Diamond q$	$(6, Reit(B))$
9	$\Box(p \to \neg\Diamond q)$	$(3, Reit)$
10	$\Diamond p$	$(4, Reit)$
11	SHØW: $\neg\Box\Diamond q$	$[14, POS]$
12	p	$m.ass.(10)$
13	$p \to \neg\Diamond q$	$(9, Reit(K))$
14	$\neg\Diamond q$	$(12, 13, \beta E)$
15	$\bot$	$(7, 11, \bot D)$

Standardowa DN dla bazowych logik modalnych:

4. Zastosowanie modalnego założenia – eliminacja rejteracji:

Standardowa DN dla bazowych logik modalnych:

4. Zastosowanie modalnego założenia – eliminacja rejteracji:

Uwaga: W DN opartym jedynie o regułę [POS] można całkiem wyeliminować regułę rejteracji w poddowodach modalnych – należy wcześniej odpowiednio przygotować założenie modalne korzystając z następujących reguł inferencji:

Standardowa DN dla bazowych logik modalnych:

4. Zastosowanie modalnego założenia – eliminacja rejteracji:

Uwaga: W DN opartym jedynie o regułę [POS] można całkiem wyeliminować regułę rejteracji w poddowodach modalnych – należy wcześniej odpowiednio przygotować założenie modalne korzystając z następujących reguł inferencji:

(a) $\Diamond\varphi,\ \Box\psi\ /\ \Diamond(\varphi \wedge \psi)$ w **K**

Standardowa DN dla bazowych logik modalnych:

4. Zastosowanie modalnego założenia – eliminacja rejteracji:

Uwaga: W DN opartym jedynie o regułę [POS] można całkiem wyeliminować regułę rejteracji w poddowodach modalnych – należy wcześniej odpowiednio przygotować założenie modalne korzystając z następujących reguł inferencji:

(a) $\Diamond\varphi,\ \Box\psi\ /\ \Diamond(\varphi \wedge \psi)$ w **K**

(b) $\Diamond\varphi,\ \Box\psi\ /\ \Diamond(\varphi \wedge \Box\psi)$ w **K4**

Standardowa DN dla bazowych logik modalnych:

4. Zastosowanie modalnego założenia – eliminacja rejteracji:

Uwaga: W DN opartym jedynie o regułę [POS] można całkiem wyeliminować regułę rejteracji w poddowodach modalnych – należy wcześniej odpowiednio przygotować założenie modalne korzystając z następujących reguł inferencji:

(a) $\Diamond\varphi,\ \Box\psi\ /\ \Diamond(\varphi \wedge \psi)$ w **K**

(b) $\Diamond\varphi,\ \Box\psi\ /\ \Diamond(\varphi \wedge \Box\psi)$ w **K4**

(c) $\Diamond\varphi,\ \psi\ /\ \Diamond(\varphi \wedge \Diamond\psi)$ w **KB**

Standardowa DN dla bazowych logik modalnych:

4. Zastosowanie modalnego założenia – eliminacja rejteracji:

Uwaga: W DN opartym jedynie o regułę [POS] można całkiem wyeliminować regułę rejteracji w poddowodach modalnych – należy wcześniej odpowiednio przygotować założenie modalne korzystając z następujących reguł inferencji:

(a) $\Diamond\varphi,\ \Box\psi\ /\ \Diamond(\varphi \wedge \psi)$ w **K**
(b) $\Diamond\varphi,\ \Box\psi\ /\ \Diamond(\varphi \wedge \Box\psi)$ w **K4**
(c) $\Diamond\varphi,\ \psi\ /\ \Diamond(\varphi \wedge \Diamond\psi)$ w **KB**
(d) $\Diamond\varphi,\ \Diamond\psi\ /\ \Diamond(\varphi \wedge \Diamond\psi)$ w **KTB**

Standardowa DN dla bazowych logik modalnych:

KM dla logik monotonicznych:

Standardowa DN dla bazowych logik modalnych:

KM dla logik monotonicznych:

Można zastosować obie reguły konstrukcji dowodu ([NEC] i [POS]) ale bez rejteracji za to obie z założeniem modalnym.

Standardowa DN dla bazowych logik modalnych:

KM dla logik monotonicznych:

Można zastosować obie reguły konstrukcji dowodu ([NEC] i [POS]) ale bez rejteracji za to obie z założeniem modalnym.
W rachunku wyrażają je następujące reguły:

Standardowa DN dla bazowych logik modalnych:

KM dla logik monotonicznych:

Można zastosować obie reguły konstrukcji dowodu ([NEC] i [POS]) ale bez rejteracji za to obie z założeniem modalnym.
W rachunku wyrażają je następujące reguły:
$[NEC_M]$ jeżeli $\psi \vdash \varphi$, to $\Gamma, \Box\psi \vdash \Box\varphi$

Standardowa DN dla bazowych logik modalnych:

KM dla logik monotonicznych:

Można zastosować obie reguły konstrukcji dowodu ([NEC] i [POS]) ale bez rejteracji za to obie z założeniem modalnym.
W rachunku wyrażają je następujące reguły:
$[NEC_M]$ jeżeli $\psi \vdash \varphi$, to Γ, $\Box\psi \vdash \Box\varphi$
$[POS_M]$ jeżeli $\psi \vdash \varphi$, to Γ, $\Diamond\psi \vdash \Diamond\varphi$

Standardowa DN dla bazowych logik modalnych:

KM dla logik monotonicznych:

Można zastosować obie reguły konstrukcji dowodu ([NEC] i [POS]) ale bez rejteracji za to obie z założeniem modalnym.
W rachunku wyrażają je następujące reguły:
$[NEC_M]$ jeżeli $\psi \vdash \varphi$, to $\Gamma, \Box\psi \vdash \Box\varphi$
$[POS_M]$ jeżeli $\psi \vdash \varphi$, to $\Gamma, \Diamond\psi \vdash \Diamond\varphi$
Realizacja w KM obu reguł:

i	$\Box\psi$		i	$\Diamond\psi$	
	$\vdots$			$\vdots$	
j	SHØW: $\Box\varphi$		j	SHØW: $\Diamond\varphi$	
$j+1$		ψ	$j+1$		ψ
		$\vdots$			$\vdots$
k		φ	k		φ

Standardowa DN dla bazowych logik modalnych:

KM dla logik monotonicznych:

Można zastosować obie reguły konstrukcji dowodu ([NEC] i [POS]) ale bez rejteracji za to obie z założeniem modalnym.
W rachunku wyrażają je następujące reguły:
$[NEC_M]$ jeżeli $\psi \vdash \varphi$, to $\Gamma, \Box\psi \vdash \Box\varphi$
$[POS_M]$ jeżeli $\psi \vdash \varphi$, to $\Gamma, \Diamond\psi \vdash \Diamond\varphi$
Realizacja w KM obu reguł:

$$\begin{array}{ll} i & \Box\psi \\ & \vdots \\ j & \text{SHØW: } \Box\varphi \\ j+1 & \quad \boxed{\begin{array}{l} \psi \\ \vdots \\ \varphi \end{array}} \\ k & \end{array} \qquad \begin{array}{ll} i & \Diamond\psi \\ & \vdots \\ j & \text{SHØW: } \Diamond\varphi \\ j+1 & \quad \boxed{\begin{array}{l} \psi \\ \vdots \\ \varphi \end{array}} \\ k & \end{array}$$

Zamiast reguły rejteracji wzmocnienia uzyskujemy przez dodawanie

Standardowe systemy dla bazowych logik modalnych:

RDN dla bazowych logik modalnych – reguły dla **M**:

Standardowe systemy dla bazowych logik modalnych:

RDN dla bazowych logik modalnych – reguły dla **M**:

Oprócz [SUB] wprowadzamy jedną z poniższych reguł konstrukcji dowodu:

Standardowe systemy dla bazowych logik modalnych:

RDN dla bazowych logik modalnych – reguły dla **M**:

Oprócz [SUB] wprowadzamy jedną z poniższych reguł konstrukcji dowodu:

$[RNEC_M]$ jeżeli $\Gamma \vdash \varphi$, to $\Delta, \Box\Gamma \vdash \Delta, \Box\Pi$, pod warunkiem, że $\varphi \in \Pi$ (Δ może być pusta)

Standardowe systemy dla bazowych logik modalnych:

RDN dla bazowych logik modalnych – reguły dla **M**:

Oprócz [SUB] wprowadzamy jedną z poniższych reguł konstrukcji dowodu:

$[RNEC_M]$ jeżeli $\Gamma \vdash \varphi$, to $\Delta, \Box\Gamma \vdash \Delta, \Box\Pi$, pod warunkiem, że $\varphi \in \Pi$ (Δ może być pusta)

$[RPOS_M]$ jeżeli $\Gamma \vdash \varphi$, to $\Delta, \Diamond\Gamma \vdash \Delta, \Diamond\Pi$, pod warunkiem, że $\varphi \in \Pi$ (Δ może być pusta)

Standardowe systemy dla bazowych logik modalnych:

RDN dla bazowych logik modalnych – reguły dla **M**:

Oprócz [SUB] wprowadzamy jedną z poniższych reguł konstrukcji dowodu:

$[RNEC_M]$ jeżeli $\Gamma \vdash \varphi$, to $\Delta, \Box\Gamma \vdash \Delta, \Box\Pi$, pod warunkiem, że $\varphi \in \Pi$ (Δ może być pusta)

$[RPOS_M]$ jeżeli $\Gamma \vdash \varphi$, to $\Delta, \Diamond\Gamma \vdash \Delta, \Diamond\Pi$, pod warunkiem, że $\varphi \in \Pi$ (Δ może być pusta)

Uwaga: dowolna z tych reguł daje adekwatną charakterystykę **M**; druga jest dopuszczalna.

Standardowe systemy dla bazowych logik modalnych:

RDN dla bazowych logik modalnych – reguły dla **M**:

Standardowe systemy dla bazowych logik modalnych:

RDN dla bazowych logik modalnych – reguły dla **M**:

Realizacja obu reguł konstrukcji dowodu w KM wygląda następująco:

Standardowe systemy dla bazowych logik modalnych:

RDN dla bazowych logik modalnych – reguły dla **M**:

Realizacja obu reguł konstrukcji dowodu w KM wygląda następująco:

$$
\begin{array}{ll}
i & \Delta, \Box\Gamma \\
 & \vdots \\
j & \text{SHØW: } \Delta, \Box\Pi \\
j+1 & \quad \boxed{\begin{array}{l} \Gamma \\ \vdots \\ \varphi \end{array}} \\
k &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ll}
i & \Delta, \Diamond\Gamma \\
 & \vdots \\
j & \text{SHØW: } \Delta, \Diamond\Pi \\
j+1 & \quad \boxed{\begin{array}{l} \Gamma \\ \vdots \\ \varphi \end{array}} \\
k &
\end{array}
$$

gdzie $\varphi \in \Pi$, a Δ może być pusta.

Standardowe systemy dla bazowych logik modalnych:

RDN dla bazowych logik modalnych – reguły dla **M**:

Realizacja obu reguł konstrukcji dowodu w KM wygląda następująco:

$$\begin{array}{lll} i & \Delta, \Box\Gamma & \\ & \vdots & \\ j & \text{SHØW: } \Delta, \Box\Pi & \\ j+1 & & \boxed{\begin{array}{l} \Gamma \\ \vdots \\ \varphi \end{array}} \\ k & & \end{array} \qquad \begin{array}{lll} i & \Delta, \Diamond\Gamma & \\ & \vdots & \\ j & \text{SHØW: } \Delta, \Diamond\Pi & \\ j+1 & & \boxed{\begin{array}{l} \Gamma \\ \vdots \\ \varphi \end{array}} \\ k & & \end{array}$$

gdzie $\varphi \in \Pi$, a Δ może być pusta.
Uwaga: oba poddowody są modalne – żadnej rejteracji – tylko zał. modalne Γ (ale ono jest konieczne!)

Standardowe systemy dla bazowych logik modalnych:

RDN dla bazowych logik modalnych – reguły dla **R** i **K**:

Standardowe systemy dla bazowych logik modalnych:

RDN dla bazowych logik modalnych – reguły dla **R** i **K**:

Tak samo jak dla **M** ale:

Standardowe systemy dla bazowych logik modalnych:

RDN dla bazowych logik modalnych – reguły dla **R** i **K**:

Tak samo jak dla **M** ale:

1. Dopuszczamy modalną rejterację – w obu przypadkach można w poddowodzie umieścić klauzulę Γ, jeżeli w dowodzie nadrzędnym mamy $\Box\Gamma$.

Standardowe systemy dla bazowych logik modalnych:

RDN dla bazowych logik modalnych – reguły dla **R** i **K**:

Tak samo jak dla **M** ale:

1. Dopuszczamy modalną rejterację – w obu przypadkach można w poddowodzie umieścić klauzulę Γ, jeżeli w dowodzie nadrzędnym mamy $\Box\Gamma$.
2. W przypadku [RPOS] klauzula, która powoduje zamknięcie poddowodu nie musi być singletonem $\varphi \in \Pi$, ale dowolną podklauzulą $\Pi' \subseteq \Pi$.

Standardowe systemy dla bazowych logik modalnych:

RDN dla bazowych logik modalnych – reguły dla **R** i **K**:

Tak samo jak dla **M** ale:

1. Dopuszczamy modalną rejterację – w obu przypadkach można w poddowodzie umieścić klauzulę Γ, jeżeli w dowodzie nadrzędnym mamy $\Box\Gamma$.
2. W przypadku [RPOS] klauzula, która powoduje zamknięcie poddowodu nie musi być singletonem $\varphi \in \Pi$, ale dowolną podklauzulą $\Pi' \subseteq \Pi$.
3. W [RNEC] dla **K** założenie modalne nie jest konieczne.

RDN dla bazowych logik modalnych – przykład:

Dowód $\Box p \vee \Box q, \Box(r \rightarrow p) \rightarrow \Diamond s, \Diamond q \rightarrow \Box t \vdash_R \Box r \rightarrow \Diamond s \vee \Diamond t$:

RDN dla bazowych logik modalnych – przykład:

Dowód $\Box p \lor \Box q, \Box(r \to p) \to \Diamond s, \Diamond q \to \Box t \vdash_R \Box r \to \Diamond s \lor \Diamond t$:

1	SHØW: Γ	$[16, SUB]$
2	$\Box p \lor \Box q$	z
3	$\Box(r \to p) \to \Diamond s$	z
4	$\Diamond q \to \Box t$	z
5	$\Box p, \Box q$	$(2, \beta)$
6	$\neg\Box(r \to p), \Diamond s$	$(3, \beta)$
7	$\neg\Diamond q, \Box t$	$(4, \beta)$
8	SHØW: $\neg\Box r, \Diamond s, \Diamond t$	$[14, RPOS]$
9	$\neg(r \to p), s$	zm
10	p, q	$(5, Reit)$
11	$\neg q, t$	$(7, Reit)$
12	$r \to p, q$	$(10, \beta)$
13	q, s	$(9, 12, Rez)$
14	t, s	$(11, 13, Rez)$
15	[illegible]	[illegible]

Standardowe systemy dla bazowych logik modalnych:

RDN dla bazowych logik modalnych – poszerzenia **M**, **R** i **K**:

Standardowe systemy dla bazowych logik modalnych:

RDN dla bazowych logik modalnych – poszerzenia **M**, **R** i **K**:

Oprócz podanych wyżej reguł konstrukcji dowodu wprowadzamy reguły inferencji 2 rodzajów:

Standardowe systemy dla bazowych logik modalnych:

RDN dla bazowych logik modalnych – poszerzenia **M**, **R** i **K**:

Oprócz podanych wyżej reguł konstrukcji dowodu wprowadzamy reguły inferencji 2 rodzajów:
albo ekspansji o schemacie:
(Exp-A) $\Gamma, \varphi \ / \ \Gamma, \psi$

Standardowe systemy dla bazowych logik modalnych:

RDN dla bazowych logik modalnych – poszerzenia **M**, **R** i **K**:

Oprócz podanych wyżej reguł konstrukcji dowodu wprowadzamy reguły inferencji 2 rodzajów:
albo ekspansji o schemacie:
(Exp-A) $\Gamma, \varphi \ / \ \Gamma, \psi$
albo rezolucji o schemacie:
(Rez-A) $\Gamma, \varphi \ ; \ \Delta, -\psi \ / \ \Gamma, \Delta$

Standardowe systemy dla bazowych logik modalnych:

RDN dla bazowych logik modalnych – poszerzenia **M**, **R** i **K**:

Oprócz podanych wyżej reguł konstrukcji dowodu wprowadzamy reguły inferencji 2 rodzajów:
albo ekspansji o schemacie:
(Exp-A) $\Gamma, \varphi \ / \ \Gamma, \psi$
albo rezolucji o schemacie:
(Rez-A) $\Gamma, \varphi \ ; \ \Delta, -\psi \ / \ \Gamma, \Delta$
gdzie A oznacza odpowiedni aksjomat.

Standardowe systemy dla bazowych logik modalnych:

RDN dla bazowych logik modalnych – poszerzenia **M**, **R** i **K**:

Oprócz podanych wyżej reguł konstrukcji dowodu wprowadzamy reguły inferencji 2 rodzajów:
albo ekspansji o schemacie:
(Exp-A) $\Gamma, \varphi \ / \ \Gamma, \psi$
albo rezolucji o schemacie:
(Rez-A) $\Gamma, \varphi \ ; \ \Delta, -\psi \ / \ \Gamma, \Delta$
gdzie A oznacza odpowiedni aksjomat.
Uwaga: obie reguły są wzajemnie wyprowadzalne.

Standardowe systemy dla bazowych logik modalnych:

RDN dla bazowych logik modalnych – poszerzenia **M**, **R** i **K**:

Standardowe systemy dla bazowych logik modalnych:

RDN dla bazowych logik modalnych – poszerzenia **M**, **R** i **K**:

Aksjomat	φ	ψ
(D)	$\Box\nu$	$\Diamond\nu$
(T)	$\Box\nu$	ν
(4)	$\Diamond\Diamond\nu$	$\Diamond\nu$
(5)	$\Diamond\Box\pi$	$\Box\pi$
(B)	$\Diamond\Box\pi$	π

Standardowe systemy dla bazowych logik modalnych:

RDN dla bazowych logik modalnych – poszerzenia **M**, **R** i **K**:

Aksjomat	φ	ψ
(D)	$\Box\nu$	$\Diamond\nu$
(T)	$\Box\nu$	ν
(4)	$\Diamond\Diamond\nu$	$\Diamond\nu$
(5)	$\Diamond\Box\pi$	$\Box\pi$
(B)	$\Diamond\Box\pi$	π

Uwaga: możliwe zdefiniowanie odpowiednich reguł dla innych logik.

Standardowe systemy dla bazowych logik modalnych:

Ograniczenia standardowego podejścia syntaktycznego:

Standardowe systemy dla bazowych logik modalnych:

Ograniczenia standardowego podejścia syntaktycznego:

- Reguły modalne dodane do standardowego RS nie posiadają wielu strukturalnych własności, które z RS czynią dobre narzędzie analizy dowodu

Standardowe systemy dla bazowych logik modalnych:

Ograniczenia standardowego podejścia syntaktycznego:

- Reguły modalne dodane do standardowego RS nie posiadają wielu strukturalnych własności, które z RS czynią dobre narzędzie analizy dowodu
- W wielu wypadkach nie jest możliwa eliminacja cięcia, chociaż możliwe jest jego ograniczone (analityczne) użycie (Takano, Goré)

Standardowe systemy dla bazowych logik modalnych:

Ograniczenia standardowego podejścia syntaktycznego:

- Reguły modalne dodane do standardowego RS nie posiadają wielu strukturalnych własności, które z RS czynią dobre narzędzie analizy dowodu
- W wielu wypadkach nie jest możliwa eliminacja cięcia, chociaż możliwe jest jego ograniczone (analityczne) użycie (Takano, Goré)
- Rozważane systemy nie są zbieżne, co powoduje, że w trakcie konstrukcji dowodu możemy być zmuszeni do powrotu do wcześniejszych etapów (tzw. backtracking)

Standardowe systemy dla bazowych logik modalnych:

Ograniczenia standardowego podejścia syntaktycznego:

- Reguły modalne dodane do standardowego RS nie posiadają wielu strukturalnych własności, które z RS czynią dobre narzędzie analizy dowodu
- W wielu wypadkach nie jest możliwa eliminacja cięcia, chociaż możliwe jest jego ograniczone (analityczne) użycie (Takano, Goré)
- Rozważane systemy nie są zbieżne, co powoduje, że w trakcie konstrukcji dowodu możemy być zmuszeni do powrotu do wcześniejszych etapów (tzw. backtracking)
- Mały zasięg – brak uniwersalnych rozwiązań dla dużych klas logik

Standardowe systemy dla bazowych logik modalnych:

Ograniczenia standardowego podejścia syntaktycznego – brak zbieżności:

Standardowe systemy dla bazowych logik modalnych:

Ograniczenia standardowego podejścia syntaktycznego – brak zbieżności:

T-system jest zbieżny wtw, jeżeli X (formuła, sekwent, zbiór itp.) jest dowiedlny, to dowolne drzewo dowodowe z X jako korzeniem można poszerzyć tak, że uzyskamy dowód X.

Standardowe systemy dla bazowych logik modalnych:

Ograniczenia standardowego podejścia syntaktycznego – brak zbieżności:

T-system jest zbieżny wtw, jeżeli X (formuła, sekwent, zbiór itp.) jest dowiedlny, to dowolne drzewo dowodowe z X jako korzeniem można poszerzyć tak, że uzyskamy dowód X.
Standardowe systemy dla logik modalnych nie są zbieżne z powodu konstrukcji reguł modalnych ("wąskie gardło").

Standardowe systemy dla bazowych logik modalnych:

Ograniczenia standardowego podejścia syntaktycznego – brak zbieżności:

T-system jest zbieżny wtw, jeżeli X (formuła, sekwent, zbiór itp.) jest dowiedlny, to dowolne drzewo dowodowe z X jako korzeniem można poszerzyć tak, że uzyskamy dowód X.
Standardowe systemy dla logik modalnych nie są zbieżne z powodu konstrukcji reguł modalnych ("wąskie gardło").
Przykład: teza **K** $\Diamond p \wedge \Diamond(q \rightarrow r) \rightarrow (\Box q \rightarrow \Diamond r)$.

Niestandardowe systemy dedukcyjne dla logik modalnych:

Przełamywanie ograniczeń standardowego podejścia syntaktycznego:

Niestandardowe systemy dedukcyjne dla logik modalnych:

Przełamywanie ograniczeń standardowego podejścia syntaktycznego:

1. Etykietowane systemy dedukcyjne (Fitting, Gore)

Niestandardowe systemy dedukcyjne dla logik modalnych:

Przełamywanie ograniczeń standardowego podejścia syntaktycznego:

1. Etykietowane systemy dedukcyjne (Fitting, Gore)
2. Systemy TAB oparte na diagramach (Kripke, Boolos)

Niestandardowe systemy dedukcyjne dla logik modalnych:

Przełamywanie ograniczeń standardowego podejścia syntaktycznego:

1. Etykietowane systemy dedukcyjne (Fitting, Gore)
2. Systemy TAB oparte na diagramach (Kripke, Boolos)
3. Relacjonalne systemy dedukcyjne (Orłowska)

Niestandardowe systemy dedukcyjne dla logik modalnych:

Przełamywanie ograniczeń standardowego podejścia syntaktycznego:

1. Etykietowane systemy dedukcyjne (Fitting, Gore)
2. Systemy TAB oparte na diagramach (Kripke, Boolos)
3. Relacjonalne systemy dedukcyjne (Orłowska)
4. Systemy wyższego rzędu (Dosen, Kashima)

Niestandardowe systemy dedukcyjne dla logik modalnych:

Przełamywanie ograniczeń standardowego podejścia syntaktycznego:

1. Etykietowane systemy dedukcyjne (Fitting, Gore)
2. Systemy TAB oparte na diagramach (Kripke, Boolos)
3. Relacjonalne systemy dedukcyjne (Orłowska)
4. Systemy wyższego rzędu (Dosen, Kashima)
5. Systemy sekwentów n-arnych ($n > 2$) (Blamey, Humberstone)

Niestandardowe systemy dedukcyjne dla logik modalnych:

Przełamywanie ograniczeń standardowego podejścia syntaktycznego:

1. Etykietowane systemy dedukcyjne (Fitting, Gore)
2. Systemy TAB oparte na diagramach (Kripke, Boolos)
3. Relacjonalne systemy dedukcyjne (Orłowska)
4. Systemy wyższego rzędu (Dosen, Kashima)
5. Systemy sekwentów *n*-arnych ($n > 2$) (Blamey, Humberstone)
6. Systemy hipersekwentowe (Avron, Poggiolessi)

Niestandardowe systemy dedukcyjne dla logik modalnych:

Przełamywanie ograniczeń standardowego podejścia syntaktycznego:

1. Etykietowane systemy dedukcyjne (Fitting, Gore)
2. Systemy TAB oparte na diagramach (Kripke, Boolos)
3. Relacjonalne systemy dedukcyjne (Orłowska)
4. Systemy wyższego rzędu (Dosen, Kashima)
5. Systemy sekwentów n-arnych ($n > 2$) (Blamey, Humberstone)
6. Systemy hipersekwentowe (Avron, Poggiolessi)
7. Systemy wielosekwentowe (Curry, Indrzejczak)

Niestandardowe systemy dedukcyjne dla logik modalnych:

Przełamywanie ograniczeń standardowego podejścia syntaktycznego:

1. Etykietowane systemy dedukcyjne (Fitting, Gore)
2. Systemy TAB oparte na diagramach (Kripke, Boolos)
3. Relacjonalne systemy dedukcyjne (Orłowska)
4. Systemy wyższego rzędu (Dosen, Kashima)
5. Systemy sekwentów n-arnych ($n > 2$) (Blamey, Humberstone)
6. Systemy hipersekwentowe (Avron, Poggiolessi)
7. Systemy wielosekwentowe (Curry, Indrzejczak)
8. Systemy poszerzone o nowe operacje strukturalne (Belnap, Wansing)

Etykietowane systemy dedukcyjne dla logik modalnych:

Przykłady zastosowań etykiet do reprezentacji:

Etykietowane systemy dedukcyjne dla logik modalnych:

Przykłady zastosowań etykiet do reprezentacji:

- Rozmyta wartość wiarygodności informacji (liczba rzeczywista $x, \ 0 \leq x \leq 1$) w systemach eksperckich.

Etykietowane systemy dedukcyjne dla logik modalnych:

Przykłady zastosowań etykiet do reprezentacji:

- Rozmyta wartość wiarygodności informacji (liczba rzeczywista x, $0 \leq x \leq 1$) w systemach eksperckich.
- Pochodzenie danej A; etykieta zaznacza, skąd wzięto A, co jest bardzo przydatne np. w złożonych bazach danych.

Etykietowane systemy dedukcyjne dla logik modalnych:

Przykłady zastosowań etykiet do reprezentacji:

- Rozmyta wartość wiarygodności informacji (liczba rzeczywista x, $0 \leq x \leq 1$) w systemach eksperckich.
- Pochodzenie danej A; etykieta zaznacza, skąd wzięto A, co jest bardzo przydatne np. w złożonych bazach danych.
- Hierarchia danej A w systemie.

Etykietowane systemy dedukcyjne dla logik modalnych:

Przykłady zastosowań etykiet do reprezentacji:

- Rozmyta wartość wiarygodności informacji (liczba rzeczywista x, $0 \leq x \leq 1$) w systemach eksperckich.
- Pochodzenie danej A; etykieta zaznacza, skąd wzięto A, co jest bardzo przydatne np. w złożonych bazach danych.
- Hierarchia danej A w systemie.
- Zbiór założeń dla formuły A w dowodzie, np. w logikach relewantnych.

Etykietowane systemy dedukcyjne dla logik modalnych:

Przykłady zastosowań etykiet do reprezentacji:

- Rozmyta wartość wiarygodności informacji (liczba rzeczywista x, $0 \leq x \leq 1$) w systemach eksperckich.
- Pochodzenie danej A; etykieta zaznacza, skąd wzięto A, co jest bardzo przydatne np. w złożonych bazach danych.
- Hierarchia danej A w systemie.
- Zbiór założeń dla formuły A w dowodzie, np. w logikach relewantnych.
- Sytuacja dla infonu A w semantyce sytuacyjnej.

Etykietowane systemy dedukcyjne dla logik modalnych:

Przykłady zastosowań etykiet do reprezentacji:

- Rozmyta wartość wiarygodności informacji (liczba rzeczywista x, $0 \leq x \leq 1$) w systemach eksperckich.
- Pochodzenie danej A; etykieta zaznacza, skąd wzięto A, co jest bardzo przydatne np. w złożonych bazach danych.
- Hierarchia danej A w systemie.
- Zbiór założeń dla formuły A w dowodzie, np. w logikach relewantnych.
- Sytuacja dla infonu A w semantyce sytuacyjnej.
- Wartość lub zbiór wartości logicznych w logikach wielowartościowych.

Etykietowane systemy dedukcyjne dla logik modalnych:

Przykłady zastosowań etykiet do reprezentacji:

- Rozmyta wartość wiarygodności informacji (liczba rzeczywista x, $0 \leq x \leq 1$) w systemach eksperckich.
- Pochodzenie danej A; etykieta zaznacza, skąd wzięto A, co jest bardzo przydatne np. w złożonych bazach danych.
- Hierarchia danej A w systemie.
- Zbiór założeń dla formuły A w dowodzie, np. w logikach relewantnych.
- Sytuacja dla infonu A w semantyce sytuacyjnej.
- Wartość lub zbiór wartości logicznych w logikach wielowartościowych.
- Czas zachodzenia A w logikach temporalnych.

Etykietowane systemy dedukcyjne dla logik modalnych:

Przykłady zastosowań etykiet do reprezentacji:

- Rozmyta wartość wiarygodności informacji (liczba rzeczywista x, $0 \leq x \leq 1$) w systemach eksperckich.
- Pochodzenie danej A; etykieta zaznacza, skąd wzięto A, co jest bardzo przydatne np. w złożonych bazach danych.
- Hierarchia danej A w systemie.
- Zbiór założeń dla formuły A w dowodzie, np. w logikach relewantnych.
- Sytuacja dla infonu A w semantyce sytuacyjnej.
- Wartość lub zbiór wartości logicznych w logikach wielowartościowych.
- Czas zachodzenia A w logikach temporalnych.
- Możliwy świat, w którym A zachodzi w logikach modalnych.

PRZYPOMNIENIE – SEMANTYKA RELACYJNA

Struktura:

PRZYPOMNIENIE – SEMANTYKA RELACYJNA

Struktura:

Strukturą relacyjną, albo ramą (frame) jest dowolna para $\mathfrak{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$ gdzie:

PRZYPOMNIENIE – SEMANTYKA RELACYJNA

Struktura:

Strukturą relacyjną, albo ramą (frame) jest dowolna para $\mathfrak{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$ gdzie:

- dziedzina to $\mathcal{W} \neq \varnothing$, który jest zbiorem punktów (światów możliwych);

PRZYPOMNIENIE – SEMANTYKA RELACYJNA

Struktura:

Strukturą relacyjną, albo ramą (frame) jest dowolna para $\mathfrak{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$ gdzie:

- dziedzina to $\mathcal{W} \neq \varnothing$, który jest zbiorem punktów (światów możliwych);
- $\mathcal{R}$ to binarna relacja na $\mathcal{W}$, zwana relacją osiągalności.

PRZYPOMNIENIE – SEMANTYKA RELACYJNA

Struktura:

Strukturą relacyjną, albo ramą (frame) jest dowolna para $\mathfrak{F} = \langle\, \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$ gdzie:

- dziedzina to $\mathcal{W} \neq \varnothing$, który jest zbiorem punktów (światów możliwych);
- $\mathcal{R}$ to binarna relacja na $\mathcal{W}$, zwana relacją osiągalności.

Model na strukturze relacyjnej:

PRZYPOMNIENIE – SEMANTYKA RELACYJNA

Struktura:

Strukturą relacyjną, albo ramą (frame) jest dowolna para $\mathfrak{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$ gdzie:

- dziedzina to $\mathcal{W} \neq \varnothing$, który jest zbiorem punktów (światów możliwych);
- $\mathcal{R}$ to binarna relacja na $\mathcal{W}$, zwana relacją osiągalności.

Model na strukturze relacyjnej:

Modelem na danej strukturze $\mathfrak{F}$ jest dowolny układ $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{F}, V \rangle$, gdzie V jest funkcją waluacji dla zmiennych, tj.
$V : ZZ \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{W})$.

LOGIKI MODALNE – SEMANTYKA

Definicja *spełniania formuły* φ *w punkcie w modelu* $\mathfrak{M}$ ($\mathfrak{M}, w \vDash \varphi$):

LOGIKI MODALNE – SEMANTYKA

Definicja *spełniania formuły φ w punkcie w modelu* $\mathfrak{M}$ ($\mathfrak{M}, w \models \varphi$):

$\mathfrak{M}, w \models \varphi$	wtw	$w \in V(\varphi)$ dla dowolnej $\varphi \in ZZ$
$\mathfrak{M}, w \models \neg\varphi$	wtw	$\mathfrak{M}, w \not\models \varphi$
$\mathfrak{M}, w \models \varphi \wedge \psi$	wtw	$\mathfrak{M}, w \models \varphi$ i $\mathfrak{M}, w \models \psi$
$\mathfrak{M}, w \models \varphi \vee \psi$	wtw	$\mathfrak{M}, w \models \varphi$ lub $\mathfrak{M}, w \models \psi$
$\mathfrak{M}, w \models \varphi \rightarrow \psi$	wtw	$\mathfrak{M}, w \not\models \varphi$ lub $\mathfrak{M}, w \models \psi$
$\mathfrak{M}, w \models \Box\varphi$	wtw	$\mathfrak{M}, w' \models \varphi$ dla dowolnego w' takiego, że $\mathcal{R}ww'$
$\mathfrak{M}, w \models \Diamond\varphi$	wtw	$\mathfrak{M}, w' \models \varphi$ dla pewnego w' takiego, że $\mathcal{R}ww'$

LOGIKI MODALNE – SEMANTYKA

Definicja spełniania formuły (czy zbioru formuł) w modelu daje nam *lokalną* charakterystykę prawdziwości.

LOGIKI MODALNE – SEMANTYKA

Definicja spełniania formuły (czy zbioru formuł) w modelu daje nam *lokalną* charakterystykę prawdziwości.
Globalny poziom prawdziwości to tautologiczność, czyli prawdziwość w każdym modelu z pewnej ustalonej klasy struktur.

LOGIKI MODALNE – SEMANTYKA

Definicja spełniania formuły (czy zbioru formuł) w modelu daje nam *lokalną* charakterystykę prawdziwości.
Globalny poziom prawdziwości to tautologiczność, czyli prawdziwość w każdym modelu z pewnej ustalonej klasy struktur.

Prawdziwość w każdym modelu

$$\models \varphi \; wtw, \; \forall_{\mathfrak{M}}, \forall_{w}, \mathfrak{M}, w \vDash \varphi$$

LOGIKI MODALNE – SEMANTYKA

Definicja spełniania formuły (czy zbioru formuł) w modelu daje nam *lokalną* charakterystykę prawdziwości.
Globalny poziom prawdziwości to tautologiczność, czyli prawdziwość w każdym modelu z pewnej ustalonej klasy struktur.

Prawdziwość w każdym modelu

$$\models \varphi \; wtw, \; \forall_{\mathfrak{M}}, \forall_{w}, \mathfrak{M}, w \vDash \varphi$$

$\not\models \varphi$ oznacza formułę nietautologiczną, czyli falsyfikowalną.

LOGIKI MODALNE – SEMANTYKA

Najważniejsze własności relacji osiągalności:

LOGIKI MODALNE – SEMANTYKA

Najważniejsze własności relacji osiągalności:

nazwa	warunek
serialność	$\forall x \exists y \mathcal{R}xy$
zwrotność	$\forall x \mathcal{R}xx$
przechodniość	$\forall xyz(\mathcal{R}xy \wedge \mathcal{R}yz \rightarrow \mathcal{R}xz)$
symetria	$\forall xy(\mathcal{R}xy \rightarrow \mathcal{R}yx)$
euklidesowość	$\forall xyz(\mathcal{R}xy \wedge \mathcal{R}xz \rightarrow \mathcal{R}yz)$

LOGIKI MODALNE – SEMANTYKA

Najważniejsze własności relacji osiągalności:

nazwa	warunek
serialność	$\forall x \exists y \mathcal{R}xy$
zwrotność	$\forall x \mathcal{R}xx$
przechodniość	$\forall xyz(\mathcal{R}xy \wedge \mathcal{R}yz \rightarrow \mathcal{R}xz)$
symetria	$\forall xy(\mathcal{R}xy \rightarrow \mathcal{R}yx)$
euklidesowość	$\forall xyz(\mathcal{R}xy \wedge \mathcal{R}xz \rightarrow \mathcal{R}yz)$

Struktury i klasy struktur (a także modele na nich ufundowane) będziemy określać według własności, które posiadają ich relacje osiągalności. Np. powiemy, że $\mathcal{F}$ $(\mathfrak{F}, \mathfrak{M})$ jest klasą (strukturą, modelem) zwrotną, gdy każda struktura $\mathfrak{F} \in \mathcal{F}$ jest strukturą zwrotną.

LOGIKI MODALNE – ADEKWATNOŚĆ

Adekwatność względem klas struktur

Tabela zestawia wyniki dotyczące determinacji wyróżnionych wcześniej logik.

LOGIKI MODALNE – ADEKWATNOŚĆ

Adekwatność względem klas struktur

Tabela zestawia wyniki dotyczące determinacji wyróżnionych wcześniej logik.

L	**L**-struktury
K	dowolne
D	serialne
T	zwrotne
4	przechodnie
B	symetryczne
5	euklidesowe

Etykietowane systemy dedukcyjne dla logik modalnych:

Trzy stopnie zaangażowania etykiet w formalizacjach logik modalnych:

Etykietowane systemy dedukcyjne dla logik modalnych:

Trzy stopnie zaangażowania etykiet w formalizacjach logik modalnych:

1. Zinternalizowane: etykiety są częścią języka; dobrym przykładem są logiki hybrydowe.

Etykietowane systemy dedukcyjne dla logik modalnych:

Trzy stopnie zaangażowania etykiet w formalizacjach logik modalnych:

1. Zinternalizowane: etykiety są częścią języka; dobrym przykładem są logiki hybrydowe.
2. Mieszane: etykiety występują zarówno jako środek techniczny, jak i element języka; podejście reprezentowane np. przez Seligmana, Tzakovą.

Etykietowane systemy dedukcyjne dla logik modalnych:

Trzy stopnie zaangażowania etykiet w formalizacjach logik modalnych:

1. Zinternalizowane: etykiety są częścią języka; dobrym przykładem są logiki hybrydowe.
2. Mieszane: etykiety występują zarówno jako środek techniczny, jak i element języka; podejście reprezentowane np. przez Seligmana, Tzakovą.
3. Zewnętrzne: etykiety tylko jako pomocniczy środek techniczny.

Etykietowane systemy dedukcyjne dla logik modalnych:

Zewnętrzne etykiety – Trzy stopnie zaangażowania:

Etykietowane systemy dedukcyjne dla logik modalnych:

Zewnętrzne etykiety – Trzy stopnie zaangażowania:

1. Minimalna – etykiety ułatwiają jedynie zabiegi dedukcyjne, np. RS Kangera z indeksacją zmiennych zdaniowych, ST Marxa, Mikulasa, Reynoldsa z użyciem 3 etykiet, rachunki wielosekwentowe Indrzejczaka dla logik temporalnych.

Etykietowane systemy dedukcyjne dla logik modalnych:

Zewnętrzne etykiety – Trzy stopnie zaangażowania:

1. Minimalna – etykiety ułatwiają jedynie zabiegi dedukcyjne, np. RS Kangera z indeksacją zmiennych zdaniowych, ST Marxa, Mikulasa, Reynoldsa z użyciem 3 etykiet, rachunki wielosekwentowe Indrzejczaka dla logik temporalnych.
2. Pośrednia – etykiety nie tworzą naddanej struktury ale wystarczają do konstrukcji kontrmodeli, np. ST Fittinga.

Etykietowane systemy dedukcyjne dla logik modalnych:

Zewnętrzne etykiety – Trzy stopnie zaangażowania:

1. Minimalna – etykiety ułatwiają jedynie zabiegi dedukcyjne, np. RS Kangera z indeksacją zmiennych zdaniowych, ST Marxa, Mikulasa, Reynoldsa z użyciem 3 etykiet, rachunki wielosekwentowe Indrzejczaka dla logik temporalnych.
2. Pośrednia – etykiety nie tworzą naddanej struktury ale wystarczają do konstrukcji kontrmodeli, np. ST Fittinga.
3. Mocna – etykiety tworzą osobną strukturę syntaktyczną – osobne reguły na języku i osobne na etykietach, np. systemy w stylu Gabbaya, DN Basina, Mathewsa i Vigano.

ETYKIETOWANIE POŚREDNIE

Podejście Fittinga:

ETYKIETOWANIE POŚREDNIE

Podejście Fittinga:

Oryginalnie zastosowane w systemach tablicowych ale można je zastosować do dowolnych systemów dedukcyjnych, w tym do DN. Ma następujące zalety:

ETYKIETOWANIE POŚREDNIE

Podejście Fittinga:

Oryginalnie zastosowane w systemach tablicowych ale można je zastosować do dowolnych systemów dedukcyjnych, w tym do DN. Ma następujące zalety:

- Utrzymuje dodatkowy aparat techniczny w rozsądnych granicach, co pozwala nam dalej mówić o prostym i naturalnym systemie DN.

ETYKIETOWANIE POŚREDNIE

Podejście Fittinga:

Oryginalnie zastosowane w systemach tablicowych ale można je zastosować do dowolnych systemów dedukcyjnych, w tym do DN. Ma następujące zalety:

- Utrzymuje dodatkowy aparat techniczny w rozsądnych granicach, co pozwala nam dalej mówić o prostym i naturalnym systemie DN.
- Znacznie poszerza zakres stosowalności DN — ponad to, co oferuje na przykład podejście Fitcha.

ETYKIETOWANIE POŚREDNIE

Podejście Fittinga:

Oryginalnie zastosowane w systemach tablicowych ale można je zastosować do dowolnych systemów dedukcyjnych, w tym do DN. Ma następujące zalety:

- Utrzymuje dodatkowy aparat techniczny w rozsądnych granicach, co pozwala nam dalej mówić o prostym i naturalnym systemie DN.
- Znacznie poszerza zakres stosowalności DN — ponad to, co oferuje na przykład podejście Fitcha.
- Pozwala tak uogólniony system DN nadal używać jako analitycznej procedury rozstrzygalnej dla logik modalnych.

ETYKIETOWANIE POŚREDNIE

Definicja Etykiety:

ETYKIETOWANIE POŚREDNIE

Definicja Etykiety:

1. 1 $\in$ET
2. Jeżeli σ $\in$ET, to $\sigma.k$ $\in$ET

ETYKIETOWANIE POŚREDNIE

Definicja Etykiety:

1. $1 \in$ET
2. Jeżeli $\sigma \in$ET, to $\sigma.k \in$ET

$\sigma.k$ denotuje etykietę, której ostatni element to k; $\sigma\tau$: oznacza etykietę, która jest konkatenacją dwóch ciągów;

ETYKIETOWANIE POŚREDNIE

Definicja Etykiety:

1. $1 \in$ET
2. Jeżeli $\sigma \in$ET, to $\sigma.k \in$ET

$\sigma.k$ denotuje etykietę, której ostatni element to k; $\sigma\tau$: oznacza etykietę, która jest konkatenacją dwóch ciągów;
Będziemy nazywali etykietę σ *rodzicem* a $\sigma.i$ *dzieckiem*; oprócz 1. każda inna etykieta jest dzieckiem.

ETYKIETOWANIE POŚREDNIE

Definicja Etykiety:

1. 1 $\in$ET
2. Jeżeli σ $\in$ET, to $\sigma.k$ $\in$ET

$\sigma.k$ denotuje etykietę, której ostatni element to k; $\sigma\tau$: oznacza etykietę, która jest konkatenacją dwóch ciągów;
Będziemy nazywali etykietę σ *rodzicem* a $\sigma.i$ *dzieckiem*; oprócz 1. każda inna etykieta jest dzieckiem.

ETYKIETOWANIE POŚREDNIE

Przykład i interpretacja w semantyce relacyjnej:

ETYKIETOWANIE POŚREDNIE

Przykład i interpretacja w semantyce relacyjnej:

1, 1.2.1.1.5, 1.1.1.1.3, są etykietami, a 4.1.3.7., czy 1.3.0.5. etykietami nie są.

ETYKIETOWANIE POŚREDNIE

Przykład i interpretacja w semantyce relacyjnej:

1, 1.2.1.1.5, 1.1.1.1.3, są etykietami, a 4.1.3.7., czy 1.3.0.5. etykietami nie są.
Nieformalnie, etykieta jest nazwą określonego świata w konstruowanym modelu, a jej struktura pokazuje, jakie punkty w tym modelu ją poprzedzają przez $\mathcal{R}$,

ETYKIETOWANIE POŚREDNIE

Przykład i interpretacja w semantyce relacyjnej:

1, 1.2.1.1.5, 1.1.1.1.3, są etykietami, a 4.1.3.7., czy 1.3.0.5. etykietami nie są.
Nieformalnie, etykieta jest nazwą określonego świata w konstruowanym modelu, a jej struktura pokazuje, jakie punkty w tym modelu ją poprzedzają przez $\mathcal{R}$, np. drugi przykład etykiety można odczytać jako (częściowy) opis modelu, w którym $1, 1.2, 1.2.1, 1.2.1.1$, i 1.2.1.1.5, należą do $\mathcal{W}$ a pary $\langle 1, 1.2\rangle, \langle 1.2, 1.2.1\rangle, ..., \langle 1.2.1.1, 1.2.1.1.5\rangle$ należą do $\mathcal{R}$.

ETYKIETOWANIE POŚREDNIE

Przykład i interpretacja w semantyce relacyjnej:

1, 1.2.1.1.5, 1.1.1.1.3, są etykietami, a 4.1.3.7., czy 1.3.0.5. etykietami nie są.
Nieformalnie, etykieta jest nazwą określonego świata w konstruowanym modelu, a jej struktura pokazuje, jakie punkty w tym modelu ją poprzedzają przez $\mathcal{R}$, np. drugi przykład etykiety można odczytać jako (częściowy) opis modelu, w którym $1, 1.2, 1.2.1, 1.2.1.1,$ i $1.2.1.1.5$, należą do $\mathcal{W}$ a pary $\langle 1, 1.2\rangle, \langle 1.2, 1.2.1\rangle, ..., \langle 1.2.1.1, 1.2.1.1.5\rangle$ należą do $\mathcal{R}$.
Ogólnie, dla dowolnych dwóch etykiet, z których jedna jest dzieckiem drugiej, oznacza to, że $\sigma.i$ jest osiągalne przez $\mathcal{R}$ z σ.

ETYKIETOWANIE POŚREDNIE

Przykład i interpretacja w semantyce relacyjnej:

1, 1.2.1.1.5, 1.1.1.1.3, są etykietami, a 4.1.3.7., czy 1.3.0.5. etykietami nie są.
Nieformalnie, etykieta jest nazwą określonego świata w konstruowanym modelu, a jej struktura pokazuje, jakie punkty w tym modelu ją poprzedzają przez $\mathcal{R}$, np. drugi przykład etykiety można odczytać jako (częściowy) opis modelu, w którym $1, 1.2, 1.2.1, 1.2.1.1,$ i $1.2.1.1.5$, należą do $\mathcal{W}$ a pary $\langle 1, 1.2\rangle, \langle 1.2, 1.2.1\rangle, ..., \langle 1.2.1.1, 1.2.1.1.5\rangle$ należą do $\mathcal{R}$.
Ogólnie, dla dowolnych dwóch etykiet, z których jedna jest dzieckiem drugiej, oznacza to, że $\sigma.i$ jest osiągalne przez $\mathcal{R}$ z σ.

ETYKIETOWANIE POŚREDNIE

Formuły etykietowane

ETYKIETOWANIE POŚREDNIE

Formuły etykietowane

Jeżeli φ jest formułą a $\sigma \in$ET, to $\sigma : \varphi$ jest formułą etykietowaną.

ETYKIETOWANIE POŚREDNIE

Formuły etykietowane

Jeżeli φ jest formułą a $\sigma \in$ET, to $\sigma : \varphi$ jest formułą etykietowaną. Intuicyjnie $\sigma : \varphi$ oznacza, że φ jest spełnione w modelu w punkcie σ.

ETYKIETOWANIE POŚREDNIE

Formuły etykietowane

Jeżeli φ jest formułą a $\sigma\in$ET, to $\sigma : \varphi$ jest formułą etykietowaną. Intuicyjnie $\sigma : \varphi$ oznacza, że φ jest spełnione w modelu w punkcie σ.

ETYKIETOWANIE POŚREDNIE

Formuły etykietowane

Jeżeli φ jest formułą a $\sigma \in$ET, to $\sigma : \varphi$ jest formułą etykietowaną. Intuicyjnie $\sigma : \varphi$ oznacza, że φ jest spełnione w modelu w punkcie σ.

Konwencje zapisu – formuły modalne:

ETYKIETOWANIE POŚREDNIE

Formuły etykietowane

Jeżeli φ jest formułą a $\sigma \in$ET, to $\sigma : \varphi$ jest formułą etykietowaną. Intuicyjnie $\sigma : \varphi$ oznacza, że φ jest spełnione w modelu w punkcie σ.

Konwencje zapisu – formuły modalne:

π	ν	$\pi' = \nu'$
$\Diamond\varphi$	$\Box\varphi$	φ
$\neg\Box\varphi$	$\neg\Diamond\varphi$	$\neg\varphi$

ETYKIETOWANY KM DLA K

Reguły inferencji:

ETYKIETOWANY KM DLA K

Reguły inferencji:

$(L\alpha E)$	$\sigma : \alpha \ / \ \sigma : \alpha_i$, gdzie $i \in \{1, 2\}$
$(L\alpha I)$	$\sigma : \alpha_1, \ \sigma : \alpha_2 \ / \ \sigma : \alpha$
$(L\beta E)$	$\sigma : \beta, \ \sigma : -\beta_i \ / \ \sigma : \beta_j$, gdzie $i \neq j \in \{1, 2\}$
$(L\beta I)$	$\sigma : \beta_i \ / \ \sigma : \beta$, gdzie $i \in \{1, 2\}$
$(L\neg\neg)$	$\sigma : \neg\neg\varphi \ // \ \sigma : \varphi$
$(L\bot I)$	$\sigma : \varphi, \ \sigma : -\varphi \ / \ \bot$
$(L\bot E)$	$\bot \ / \ \sigma : \varphi$, dla dowolnej σ i φ
$(L\pi E)$	$\sigma : \pi \ / \ \sigma.k : \pi'$, gdzie $\sigma.k$ jest nowa
$(L\pi I)$	$\sigma.k : \pi' \ / \ \sigma : \pi$, gdzie $\sigma.k$ jest nowa
$(L\nu E)$	$\sigma : \nu \ / \ \sigma.k : \nu'$, gdzie $\sigma.k$ jest nowa

ETYKIETOWANY KM DLA K

Reguły konstrukcji dowodu:

ETYKIETOWANY KM DLA K

Reguły konstrukcji dowodu:

[*LCOND*]: Jeżeli $X,\ \sigma : -\beta_i \vdash \sigma : \beta_j$, to $X \vdash \sigma : \beta$, gdzie $i \neq j \in \{1, 2\}$

[*LRED*]: Jeżeli $X,\ \sigma : \varphi \vdash \bot$, to $X \vdash \sigma : -\varphi$

[*LNEC*]: Jeżeli $X,\ \sigma.k : \top \vdash \sigma.k : \nu'$, to $X, \vdash \sigma : \nu$, gdzie $\sigma.k$ jest nowa

[*LPOS*]: Jeżeli $X,\ \sigma : \pi_1,\ \sigma.k : \pi'_1 \vdash \sigma.k : \pi'_2$, to $X,\ \sigma : \pi_1 \vdash \sigma : \pi_2$, gdzie $\sigma.k$ jest nowa

ETYKIETOWANY KM DLA K

Reguły konstrukcji dowodu:

[$LCOND$]: Jeżeli $X, \ \sigma : -\beta_i \ \vdash \ \sigma : \beta_j$, to $X \ \vdash \ \sigma : \beta$, gdzie $i \neq j \in \{1, 2\}$

[$LRED$]: Jeżeli $X, \ \sigma : \varphi \ \vdash \ \bot$, to $X \ \vdash \ \sigma : -\varphi$

[$LNEC$]: Jeżeli $X, \ \sigma.k : \top \ \vdash \ \sigma.k : \nu'$, to $X, \ \vdash \ \sigma : \nu$, gdzie $\sigma.k$ jest nowa

[$LPOS$]: Jeżeli $X, \ \sigma : \pi_1, \ \sigma.k : \pi'_1 \ \vdash \ \sigma.k : \pi'_2$, to $X, \ \sigma : \pi_1 \ \vdash \ \sigma : \pi_2$, gdzie $\sigma.k$ jest nowa

Uwaga: [$LPOS$] jest regułą dopuszczalną.

ETYKIETOWANY KM DLA K

Przykład dowodu:

ETYKIETOWANY KM DLA K

Przykład dowodu:

1	SHØW: $1 : \Box\Diamond p \wedge \Box\Box q \to \Box\Diamond(p \wedge q)$	[5, $LCOND$]
2	$1 : \Box\Diamond p \wedge \Box\Box q$	*ass.*
3	$1 : \Box\Diamond p$	(2, $L\alpha E$)
4	$1 : \Box\Box q$	(2, $L\alpha E$)
5	SHØW: $1 : \Box\Diamond(p \wedge q)$	[12, $LNEC$]
6	$1.1 : \top$	*m.ass*
7	$1.1 : \Diamond p$	(3, $L\nu E$)
8	$1.1 : \Box q$	(4, $L\nu E$)
9	$1.1.1 : p$	(7, $L\pi E$)
10	$1.1.1 : q$	(8, $L\nu E$)
11	$1.1.1 : p \wedge q$	(9, 10, $L\alpha I$)
12	$1.1 : \Diamond(p \wedge q)$	(11, $L\pi I$)

ETYKIETOWANY KM DLA INNYCH LOGIK NORMALNYCH

Reguły inferencji:

ETYKIETOWANY KM DLA INNYCH LOGIK NORMALNYCH

Reguły inferencji:

(LD)	$\sigma : \Box\varphi \ / \ \sigma : \Diamond\varphi$ i $\sigma : \neg\Diamond\varphi \ / \ \sigma : \neg\Box\varphi$
(LT)	$\sigma : \nu \ / \ \sigma : \nu'$ i $\sigma : \pi' \ / \ \sigma : \pi$
$(L4)$	$\sigma : \nu \ / \ \sigma.k : \nu$, gdzie $\sigma.k$ jest dowolne
(LB)	$\sigma.k : \nu \ / \ \sigma : \nu'$, gdzie $\sigma.k$ jest dowolne
$(LB4)$	$\sigma.k : \nu \ / \ \sigma : \nu$, gdzie $\sigma.k$ jest dowolne
$(L5\Box)$	$1.k : \nu \ / \ 1 : \Box\nu$, gdzie $1.k$ jest dowolne
$(L5.4)$	$\sigma : \nu \ / \ \sigma.k : \nu$, gdzie długość $\sigma > 1$

ETYKIETOWANY KM DLA INNYCH LOGIK NORMALNYCH

Logiki:

ETYKIETOWANY KM DLA INNYCH LOGIK NORMALNYCH

Logiki:

D	LND-**K**$\cup\{(D)\}$	**S4**	LND-**T**$\cup\{(4)\}$
T	LND-**K**$\cup\{(T)\}$	**B**	LND-**T**$\cup\{(B)\}$
K4	LND-**K**$\cup\{(4)\}$	**K5**	LND-**K**$\cup\{(B4), (5\Box), (5.4)\}$
KB	LND-**K**$\cup\{(B)\}$	**KB4**	LND-**KB**$\cup\{(4), (B4)\}$
KD4	LND-**D**$\cup\{(4)\}$	**K4.5**	LND-**K4**$\cup\{(5\Box), (5.4)\}$
KDB	LND-**D**$\cup\{(B)\}$	**KD4.5**	LND-**K4.5**$\cup\{(D)\}$
KD5	LND-**K5**$\cup\{(D)\}$	**S5**	LND-**S4**$\cup\{(B4)\}$

ETYKIETOWANY KM DLA INNYCH LOGIK NORMALNYCH

Przykład dowodu:

ETYKIETOWANY KM DLA INNYCH LOGIK NORMALNYCH

Przykład dowodu:

1	SHØW: $1 : \Diamond p \rightarrow \Box\Diamond p$	$[4, LCOND]$
2	$1 : \Diamond p$	*ass.*
3	$1.1 : p$	$(2, L\pi E)$
4	SHØW: $1 : \Box\Diamond p$	$[6, LNEC]$
5	$1.2 : \top$	*m.ass.*
6	SHØW: $1.2 : \Diamond p$	$[9, LRED]$
7	$1.2 : \neg\Diamond p$	*ass.*
8	$1 : \neg\Diamond p$	$(7, LB4)$
9	$\bot$	$(2, 8, L\bot I)$

ETYKIETOWANY KM DLA LOGIK MONOTONICZNYCH

Do KM-KRZ dodajemy następujące reguły inferencji:

ETYKIETOWANY KM DLA LOGIK MONOTONICZNYCH

Do KM-KRZ dodajemy następujące reguły inferencji:

(LM)	$\sigma : \nu,\ \sigma : \pi\ /\ \sigma.k : \nu',\ \sigma.k : \pi'$
(LMD)	$\sigma : \nu_1,\ \sigma : \nu_2\ /\ \sigma.k : \nu_1',\ \sigma.k : \nu_2'$
$(LM4)$	$\sigma : \nu,\ \sigma : \pi\ /\ \sigma.k : \nu,\ \sigma.k : \pi'$
$(LM5)$	$\sigma : \pi_1,\ \sigma : \pi_2\ /\ \sigma.k : \pi_1,\ \sigma.k : \pi_2'$
(LMB)	$\sigma : \pi_1',\ \sigma : \pi_2\ /\ \sigma.k : \pi_1,\ \sigma.k : \pi_2'$
$(LMD4)$	$\sigma : \nu_1,\ \sigma : \nu_2\ /\ \sigma.k : \nu_1',\ \sigma.k : \nu_2$
$(LMD5)$	$\sigma : \nu,\ \sigma : \pi\ /\ \sigma.k : \nu',\ \sigma.k : \pi$

gdzie $\sigma.k$ jest nową etykietą

ETYKIETOWANY KM DLA LOGIK MONOTONICZNYCH

Do KM-KRZ dodajemy następujące reguły inferencji:

(LM)	$\sigma : \nu,\ \sigma : \pi\ /\ \sigma.k : \nu',\ \sigma.k : \pi'$
(LMD)	$\sigma : \nu_1,\ \sigma : \nu_2\ /\ \sigma.k : \nu_1',\ \sigma.k : \nu_2'$
$(LM4)$	$\sigma : \nu,\ \sigma : \pi\ /\ \sigma.k : \nu,\ \sigma.k : \pi'$
$(LM5)$	$\sigma : \pi_1,\ \sigma : \pi_2\ /\ \sigma.k : \pi_1,\ \sigma.k : \pi_2'$
(LMB)	$\sigma : \pi_1',\ \sigma : \pi_2\ /\ \sigma.k : \pi_1,\ \sigma.k : \pi_2'$
$(LMD4)$	$\sigma : \nu_1,\ \sigma : \nu_2\ /\ \sigma.k : \nu_1',\ \sigma.k : \nu_2$
$(LMD5)$	$\sigma : \nu,\ \sigma : \pi\ /\ \sigma.k : \nu',\ \sigma.k : \pi$

gdzie $\sigma.k$ jest nową etykietą

Uwaga: podany zestaw reguł jest modularny i oparty o reguły RS.

ETYKIETOWANY RDN

Można zastosować dwa podejścia:

ETYKIETOWANY RDN

Można zastosować dwa podejścia:

- lokalne – każda formuła w klauzuli ma swoją etykietę

ETYKIETOWANY RDN

Można zastosować dwa podejścia:

- lokalne – każda formuła w klauzuli ma swoją etykietę
- globalne – etykietowane są całe klauzule

ETYKIETOWANY RDN

Można zastosować dwa podejścia:

- lokalne – każda formuła w klauzuli ma swoją etykietę
- globalne – etykietowane są całe klauzule

W przeciwieństwie do RDN dla logik modalnych bez etykiet, w obu przypadkach nie są potrzebne dodatkowe reguły konstrukcji dowodu oprócz [SUB]