LOGIKA II – WPROWADZENIE DO LOGIK NIEKLASYCZNYCH

Andrzej Indrzejczak

Katedra Logiki i Metodologii Nauk UŁ

Łódź, semestr zimowy 2008/2009

Przybornik

Notacja:

Przybornik

Notacja:

- Dowolne obiekty: $a, b, c, \ldots$

Przybornik

Notacja:

- Dowolne obiekty: $a, b, c, \ldots$
- Zbiory: $A, B, C, \ldots$

Przybornik

Notacja:

- Dowolne obiekty: $a, b, c, \ldots$
- Zbiory: $A, B, C, \ldots$
- Relacje: $R, S, T, \ldots$

Przybornik

Notacja:

- Dowolne obiekty: $a, b, c, ...$
- Zbiory: $A, B, C, ...$
- Relacje: $R, S, T, ...$
- Funkcje: $f, g, h, ...$

Przybornik

Notacja:

- Dowolne obiekty: $a, b, c, ...$
- Zbiory: $A, B, C, ...$
- Relacje: $R, S, T, ...$
- Funkcje: $f, g, h, ...$
- Rodziny zbiorów: $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, ...$

Przybornik

Notacja:

- Dowolne obiekty: $a, b, c, ...$
- Zbiory: $A, B, C, ...$
- Relacje: $R, S, T, ...$
- Funkcje: $f, g, h, ...$
- Rodziny zbiorów: $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, ...$

$x, y, z, ...$ - zmienne dla obiektów dowolnej kategorii

Przybornik

Notacja:

- Dowolne obiekty: $a, b, c, ...$
- Zbiory: $A, B, C, ...$
- Relacje: $R, S, T, ...$
- Funkcje: $f, g, h, ...$
- Rodziny zbiorów: $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, ...$

$x, y, z, ...$ - zmienne dla obiektów dowolnej kategorii

$\{a, b\}$ - 2-elementowy zbiór (charakteryzacja zbioru przez wyliczenie elementów)

Zbiory

Relacje między zbiorami:

$\in$ - 2-argumentowy pierwotny predykat należenia do zbioru (bycia elementem zbioru)

Zbiory

Relacje między zbiorami:

$\in$ - 2-argumentowy pierwotny predykat należenia do zbioru (bycia elementem zbioru)
np. $x \in A,\ A \in \mathcal{A},\ x \in y,\ a \in \{a, b\}$

Zbiory

Relacje między zbiorami:

$\in$ - 2-argumentowy pierwotny predykat należenia do zbioru (bycia elementem zbioru)
np. $x \in A,\ A \in \mathcal{A},\ x \in y,\ a \in \{a, b\}$

$\subseteq$ - 2-argumentowy predykat inkluzji (zawierania, bycia podzbiorem):

Zbiory

Relacje między zbiorami:

$\in$ - 2-argumentowy pierwotny predykat należenia do zbioru (bycia elementem zbioru)
np. $x \in A,\ A \in \mathcal{A},\ x \in y,\ a \in \{a, b\}$

$\subseteq$ - 2-argumentowy predykat inkluzji (zawierania, bycia podzbiorem):

- $A \subseteq B := \forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$

Zbiory

Relacje między zbiorami:

$\in$ - 2-argumentowy pierwotny predykat należenia do zbioru (bycia elementem zbioru)
np. $x \in A,\ A \in \mathcal{A},\ x \in y,\ a \in \{a, b\}$

$\subseteq$ - 2-argumentowy predykat inkluzji (zawierania, bycia podzbiorem):

- $A \subseteq B := \forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$
- $A = B := \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$

Zbiory

Relacje między zbiorami:

$\in$ - 2-argumentowy pierwotny predykat należenia do zbioru (bycia elementem zbioru)
np. $x \in A,\ A \in \mathcal{A},\ x \in y,\ a \in \{a, b\}$

$\subseteq$ - 2-argumentowy predykat inkluzji (zawierania, bycia podzbiorem):

- $A \subseteq B := \forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$
- $A = B := \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$
- $A \subset B := A \subseteq B \wedge A \neq B$

Zbiory

Relacje między zbiorami:

$\in$ - 2-argumentowy pierwotny predykat należenia do zbioru (bycia elementem zbioru)
np. $x \in A,\ A \in \mathcal{A},\ x \in y,\ a \in \{a, b\}$

$\subseteq$ - 2-argumentowy predykat inkluzji (zawierania, bycia podzbiorem):

- $A \subseteq B := \forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$
- $A = B := \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$
- $A \subset B := A \subseteq B \wedge A \neq B$

Uwaga: $\in$ to nie $\subseteq$, np. $A \subseteq A$ ale $A \notin A$ (choć $A \in \{A\}$)

Zbiory

Operator abstrakcji:

$\{x : \varphi(x)\}$ - zbiór tych x, które spełniają warunek φ

Zbiory

Operator abstrakcji:

$\{x : \varphi(x)\}$ - zbiór tych x, które spełniają warunek φ

$$y \in \{x : \varphi(x)\} \text{ wtw } \varphi(y)$$

Zbiory

Operator abstrakcji:

$\{x : \varphi(x)\}$ - zbiór tych x, które spełniają warunek φ

$$y \in \{x : \varphi(x)\} \text{ wtw } \varphi(y)$$

Zbiór pusty:

$$\varnothing = \{x : x \neq x\}$$

Zbiory

Operator abstrakcji:

$\{x : \varphi(x)\}$ - zbiór tych x, które spełniają warunek φ

$$y \in \{x : \varphi(x)\} \text{ wtw } \varphi(y)$$

Zbiór pusty:

$$\varnothing = \{x : x \neq x\}$$
$$x \in \varnothing \leftrightarrow x \neq x$$

Zbiory

Operator abstrakcji:

$\{x : \varphi(x)\}$ - zbiór tych x, które spełniają warunek φ

$$y \in \{x : \varphi(x)\} \text{ wtw } \varphi(y)$$

Zbiór pusty:

$$\varnothing = \{x : x \neq x\}$$
$$x \in \varnothing \leftrightarrow x \neq x$$

Warto zapamiętać:

1. $\forall x(x \notin \varnothing)$

Zbiory

Operator abstrakcji:

$\{x : \varphi(x)\}$ - zbiór tych x, które spełniają warunek φ

$$y \in \{x : \varphi(x)\} \text{ wtw } \varphi(y)$$

Zbiór pusty:

$$\varnothing = \{x : x \neq x\}$$
$$x \in \varnothing \leftrightarrow x \neq x$$

Warto zapamiętać:

1. $\forall x(x \notin \varnothing)$
2. $\varnothing \subseteq A$ dla dowolnego A

Zbiory

Operacje na zbiorach:

Zbiory

Operacje na zbiorach:

Iloczyn (przekrój):

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

Zbiory

Operacje na zbiorach:

Iloczyn (przekrój):

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

inaczej:

$$x \in A \cap B \leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$$

Zbiory

Operacje na zbiorach:

Iloczyn (przekrój):

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

inaczej:

$$x \in A \cap B \leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$$

Suma:

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

Zbiory

Operacje na zbiorach:

Iloczyn (przekrój):

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

inaczej:

$$x \in A \cap B \leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$$

Suma:

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

Różnica:

$$A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$$

Zbiory

Zbiór potęgowy:

$$\mathcal{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}$$

Zbiory

Zbiór potęgowy:

$$\mathcal{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}$$

(inna notacja: 2^A)

Zbiory

Zbiór potęgowy:

$$\mathcal{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}$$

(inna notacja: 2^A)
inaczej:

$$B \in \mathcal{P}(A) \leftrightarrow B \subseteq A$$

Zbiory

Zbiór potęgowy:

$$\mathcal{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}$$

(inna notacja: 2^A)
inaczej:

$$B \in \mathcal{P}(A) \leftrightarrow B \subseteq A$$

Uwaga - warto zapamiętać:
$A \in \mathcal{P}(A)$ i $\varnothing \in \mathcal{P}(A)$

Zbiory

Operacje uogólnione:

Zbiory

Operacje uogólnione:

Iloczyn rodziny zbiorów:

$$\bigcap \mathcal{A} = \{x : \forall A(A \in \mathcal{A} \rightarrow x \in A)\} = \{x : \forall A \in \mathcal{A}, x \in A\}$$

Zbiory

Operacje uogólnione:

Iloczyn rodziny zbiorów:

$$\bigcap \mathcal{A} = \{x : \forall A(A \in \mathcal{A} \to x \in A)\} = \{x : \forall A \in \mathcal{A}, x \in A\}$$
$$x \in \bigcap \mathcal{A} \leftrightarrow \forall A(A \in \mathcal{A} \to x \in A) \leftrightarrow \forall A \in \mathcal{A}, x \in A$$

Zbiory

Operacje uogólnione:

Iloczyn rodziny zbiorów:

$$\bigcap \mathcal{A} = \{x : \forall A(A \in \mathcal{A} \to x \in A)\} = \{x : \forall A \in \mathcal{A}, x \in A\}$$
$$x \in \bigcap \mathcal{A} \leftrightarrow \forall A(A \in \mathcal{A} \to x \in A) \leftrightarrow \forall A \in \mathcal{A}, x \in A$$

Suma rodziny zbiorów:

$$\bigcup \mathcal{A} = \{x : \exists A(A \in \mathcal{A} \wedge x \in A\} = \{x : \exists A \in \mathcal{A}, x \in A\}$$

Zbiory

Para uporządkowana:

$$\langle a, b \rangle := \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

Zbiory

Para uporządkowana:

$$\langle a, b \rangle := \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

trójka uporządkowana:

$$\langle a, b, c \rangle := \langle \langle a, b \rangle c \rangle$$

Zbiory

Para uporządkowana:

$$\langle a, b \rangle := \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

trójka uporządkowana:

$$\langle a, b, c \rangle := \langle \langle a, b \rangle c \rangle$$

ogólnie – n-ka uporządkowana:

$$\langle a_1, ..., a_n \rangle := \langle \langle a_1, ..., a_{n-1} \rangle a_n \rangle$$

Zbiory

Para uporządkowana:

$$\langle a, b\rangle := \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

trójka uporządkowana:

$$\langle a, b, c\rangle := \langle\langle a, b\rangle c\rangle$$

ogólnie – n-ka uporządkowana:

$$\langle a_1, ..., a_n\rangle := \langle\langle a_1, ..., a_{n-1}\rangle a_n\rangle$$

zauważ, że:
dla $a \neq b$ mamy $\{a, b\} = \{b, a\} = \{a, a, b\} = \{b, a, b, b, a\}$

Zbiory

Para uporządkowana:

$$\langle a, b\rangle := \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

trójka uporządkowana:

$$\langle a, b, c\rangle := \langle\langle a, b\rangle c\rangle$$

ogólnie – n-ka uporządkowana:

$$\langle a_1, ..., a_n\rangle := \langle\langle a_1, ..., a_{n-1}\rangle a_n\rangle$$

zauważ, że:
dla $a \neq b$ mamy $\{a, b\} = \{b, a\} = \{a, a, b\} = \{b, a, b, b, a\}$
ale $\langle a, b\rangle \neq \langle b, a\rangle \neq \langle a, a, b\rangle$

Zbiory

Iloczyn Kartezjański:

Zbiory

Iloczyn Kartezjański:

2-giego stopnia:

$$A \times B = \{\langle x, y\rangle : x \in A \wedge y \in B\}$$

Zbiory

Iloczyn Kartezjański:

2-giego stopnia:

$$A \times B = \{\langle x, y\rangle : x \in A \wedge y \in B\}$$

n-tego stopnia:

$$A_1 \times ... \times A_n = \{\langle x_1, ..., x_n\rangle : x_1 \in A_1 \wedge ... \wedge x_n \in A_n\}$$

Zbiory

Iloczyn Kartezjański:

2-giego stopnia:

$$A \times B = \{\langle x, y\rangle : x \in A \wedge y \in B\}$$

n-tego stopnia:

$$A_1 \times ... \times A_n = \{\langle x_1, ..., x_n\rangle : x_1 \in A_1 \wedge ... \wedge x_n \in A_n\}$$

jeżeli $A_1 = ... = A_n$, to piszemy zwykle A^n, w szczególności A^2 zamiast $A \times A$.

Relacje

Ogólne pojęcie relacji:

Relacje

Ogólne pojęcie relacji:

R jest relacją 2-argumentową (binarną) na zbiorach A, B wtw $R \subseteq A \times B$

Relacje

Ogólne pojęcie relacji:

R jest relacją 2-argumentową (binarną) na zbiorach A, B wtw $R \subseteq A \times B$

R jest relacją n-argumentową na zbiorach $A_1, ..., A_n$ wtw $R \subseteq A_1 \times ... \times A_n$

Relacje

Ogólne pojęcie relacji:

R jest relacją 2-argumentową (binarną) na zbiorach A, B wtw $R \subseteq A \times B$

R jest relacją n-argumentową na zbiorach $A_1, ..., A_n$ wtw $R \subseteq A_1 \times ... \times A_n$

Jeżeli $R \subseteq A \times B$, to:

Relacje

Ogólne pojęcie relacji:

R jest relacją 2-argumentową (binarną) na zbiorach A, B wtw $R \subseteq A \times B$

R jest relacją n-argumentową na zbiorach $A_1, ..., A_n$ wtw $R \subseteq A_1 \times ... \times A_n$

Jeżeli $R \subseteq A \times B$, to:

- dziedzina R: $D_l(R) = \{x \in A : \exists y \in B, \langle x, y \rangle \in R\}$

Relacje

Ogólne pojęcie relacji:

R jest relacją 2-argumentową (binarną) na zbiorach A, B wtw $R \subseteq A \times B$

R jest relacją n-argumentową na zbiorach $A_1, ..., A_n$ wtw $R \subseteq A_1 \times ... \times A_n$

Jeżeli $R \subseteq A \times B$, to:

- dziedzina R: $D_l(R) = \{x \in A : \exists y \in B, \langle x, y \rangle \in R\}$
- przeciwdziedzina R: $D_r(R) = \{x \in B : \exists y \in A, \langle y, x \rangle \in R\}$

Relacje

Ogólne pojęcie relacji:

R jest relacją 2-argumentową (binarną) na zbiorach A, B wtw $R \subseteq A \times B$

R jest relacją n-argumentową na zbiorach $A_1, ..., A_n$ wtw $R \subseteq A_1 \times ... \times A_n$

Jeżeli $R \subseteq A \times B$, to:

- dziedzina R: $D_l(R) = \{x \in A : \exists y \in B, \langle x, y \rangle \in R\}$
- przeciwdziedzina R: $D_r(R) = \{x \in B : \exists y \in A, \langle y, x \rangle \in R\}$

Uwaga: zamiast pisać $\langle x, y \rangle \in R$ będziemy pisać $R(xy)$ lub Rxy

Relacje

Własności relacji:

Niech $R \subseteq A^2$ a x, y, z oznaczają dowolne elementy A:

Relacje

Własności relacji:

Niech $R \subseteq A^2$ a x, y, z oznaczają dowolne elementy A:

nazwa	warunek
serialność	$\forall x \exists y Rxy$
funkcyjność	$\forall xyz(Rxy \wedge Rxz \rightarrow y = z)$
zwrotność	$\forall x Rxx$
przeciwzwrotność	$\forall x \neg Rxx$
przechodniość	$\forall xyz(Rxy \wedge Ryz \rightarrow Rxz)$
symetria	$\forall xy(Rxy \rightarrow Ryx)$
asymetria mocna	$\forall xy(Rxy \rightarrow \neg Ryx)$
asymetria słaba	$\forall xy(Rxy \wedge x \neq y \rightarrow \neg Ryx)$
euklidesowość	$\forall xyz(Rxy \wedge Rxz \rightarrow Ryz)$
spójność	$\forall xy(Rxy \vee Ryx)$
spójność słaba	$\forall xy(Rxy \vee Ryx \vee x = y)$

Funkcje

funkcje 1-argumentowe:

Funkcje

funkcje 1-argumentowe:

1-argumentowa funkcja (odwzorowanie, przyporządkowanie) o dziedzinie (zbiorze argumentów) A i przeciwdziedzinie (zbiorze wartości) w B (oznaczana $f : A \longrightarrow B$), to 2-argumentowa relacja $f \subseteq A \times B$ spełniająca warunki:

Funkcje

funkcje 1-argumentowe:

1-argumentowa funkcja (odwzorowanie, przyporządkowanie) o dziedzinie (zbiorze argumentów) A i przeciwdziedzinie (zbiorze wartości) w B (oznaczana $f : A \longrightarrow B$), to 2-argumentowa relacja $f \subseteq A \times B$ spełniająca warunki:

1. $\forall_{x \in A} \exists_{y \in B} \langle x, y \rangle \in f$

Funkcje

funkcje 1-argumentowe:

1-argumentowa funkcja (odwzorowanie, przyporządkowanie) o dziedzinie (zbiorze argumentów) A i przeciwdziedzinie (zbiorze wartości) w B (oznaczana $f : A \longrightarrow B$), to 2-argumentowa relacja $f \subseteq A \times B$ spełniająca warunki:

1. $\forall_{x \in A} \exists_{y \in B} \langle x, y \rangle \in f$
2. $\forall_{x \in A} \forall_{y,z \in B} (\langle x, y \rangle \in f \wedge \langle x, z \rangle \in f \rightarrow y = z)$

Funkcje

funkcje 1-argumentowe:

1-argumentowa funkcja (odwzorowanie, przyporządkowanie) o dziedzinie (zbiorze argumentów) A i przeciwdziedzinie (zbiorze wartości) w B (oznaczana $f : A \longrightarrow B$), to 2-argumentowa relacja $f \subseteq A \times B$ spełniająca warunki:

1. $\forall_{x \in A} \exists_{y \in B} \langle x, y \rangle \in f$
2. $\forall_{x \in A} \forall_{y,z \in B} (\langle x, y \rangle \in f \wedge \langle x, z \rangle \in f \rightarrow y = z)$

Uwaga1: relacje spełniające tylko 2 warunek to funkcje częściowe.

Funkcje

funkcje 1-argumentowe:

1-argumentowa funkcja (odwzorowanie, przyporządkowanie) o dziedzinie (zbiorze argumentów) A i przeciwdziedzinie (zbiorze wartości) w B (oznaczana $f : A \longrightarrow B$), to 2-argumentowa relacja $f \subseteq A \times B$ spełniająca warunki:

1. $\forall_{x \in A} \exists_{y \in B} \langle x, y \rangle \in f$
2. $\forall_{x \in A} \forall_{y,z \in B} (\langle x, y \rangle \in f \wedge \langle x, z \rangle \in f \rightarrow y = z)$

Uwaga1: relacje spełniające tylko 2 warunek to funkcje częściowe.
Uwaga2: 2 warunek umożliwia wprowadzenie notacji funkcyjnej zamiast relacyjnej, tzn. zamiast pisać $\langle x, y \rangle \in f$ piszemy $f(x) = y$.

Funkcje

Ogólne pojęcie funkcji:

Funkcje

Ogólne pojęcie funkcji:

n-argumentowa funkcja (odwzorowanie, przyporządkowanie) o dziedzinie (zbiorze argumentów) A^n i przeciwdziedzinie (zbiorze wartości) w B (oznaczana $f : A^n \longrightarrow B$), to $n+1$-argumentowa relacja $f \subseteq A^n \times B$ spełniająca warunki:

Funkcje

Ogólne pojęcie funkcji:

n-argumentowa funkcja (odwzorowanie, przyporządkowanie) o dziedzinie (zbiorze argumentów) A^n i przeciwdziedzinie (zbiorze wartości) w B (oznaczana $f : A^n \longrightarrow B$), to $n+1$-argumentowa relacja $f \subseteq A^n \times B$ spełniająca warunki:

1. $\forall_{x_1,\ldots,x_n \in A} \exists_{y \in B} \langle x_1, \ldots, x_n, y \rangle \in f$

Funkcje

Ogólne pojęcie funkcji:

n-argumentowa funkcja (odwzorowanie, przyporządkowanie) o dziedzinie (zbiorze argumentów) A^n i przeciwdziedzinie (zbiorze wartości) w B (oznaczana $f : A^n \longrightarrow B$), to $n+1$-argumentowa relacja $f \subseteq A^n \times B$ spełniająca warunki:

1. $\forall_{x_1,\ldots,x_n \in A} \exists_{y \in B} \langle x_1, \ldots, x_n, y \rangle \in f$
2. $\forall_{x_1,\ldots,x_n \in A} \forall_{y,z \in B} (\langle x_1, \ldots, x_n, y \rangle \in f \wedge \langle x_1, \ldots, x_n, z \rangle \in f \rightarrow y = z)$

Funkcje

Ogólne pojęcie funkcji:

n-argumentowa funkcja (odwzorowanie, przyporządkowanie) o dziedzinie (zbiorze argumentów) A^n i przeciwdziedzinie (zbiorze wartości) w B (oznaczana $f : A^n \longrightarrow B$), to $n+1$-argumentowa relacja $f \subseteq A^n \times B$ spełniająca warunki:

1. $\forall_{x_1,...,x_n \in A} \exists_{y \in B} \langle x_1, ..., x_n, y \rangle \in f$
2. $\forall_{x_1,...,x_n \in A} \forall_{y,z \in B} (\langle x_1, ..., x_n, y \rangle \in f \wedge \langle x_1, ..., x_n, z \rangle \in f \rightarrow y = z)$

Uwaga1: Oczywiście dziedzina funkcji może być iloczynem kartezjańskim n-tego stopnia określonym na różnych zbiorach (tj. $A_1 \times ... \times A_n$).

Funkcje

Ogólne pojęcie funkcji:

n-argumentowa funkcja (odwzorowanie, przyporządkowanie) o dziedzinie (zbiorze argumentów) A^n i przeciwdziedzinie (zbiorze wartości) w B (oznaczana $f : A^n \longrightarrow B$), to $n+1$-argumentowa relacja $f \subseteq A^n \times B$ spełniająca warunki:

1. $\forall_{x_1,...,x_n \in A} \exists_{y \in B} \langle x_1, ..., x_n, y \rangle \in f$
2. $\forall_{x_1,...,x_n \in A} \forall_{y,z \in B} (\langle x_1, ..., x_n, y \rangle \in f \wedge \langle x_1, ..., x_n, z \rangle \in f \rightarrow y = z)$

Uwaga1: Oczywiście dziedzina funkcji może być iloczynem kartezjańskim n-tego stopnia określonym na różnych zbiorach (tj. $A_1 \times ... \times A_n$).
Uwaga2: 2 warunek umożliwia wprowadzenie notacji funkcyjnej zamiast relacyjnej, tzn. zamiast pisać $\langle x_1, ..., x_n, y \rangle \in f$ piszemy $f(x_1, ..., x_n) = y$.

Funkcje

Rodzaje funkcji:

Funkcje

Rodzaje funkcji:

Niech $f : A^n \longrightarrow B$, to f jest:

Funkcje

Rodzaje funkcji:

Niech $f : A^n \longrightarrow B$, to f jest:

- injekcją (f. różnowartościową, f. 1-1) wtw $\forall_{x_1,...,x_n,y_1,...,y_n \in A}(f(x_1, ..., x_n) = f(y_1, ..., y_n) \rightarrow \langle x_1, ..., x_n \rangle = \langle y_1, ..., y_n \rangle)$

Funkcje

Rodzaje funkcji:

Niech $f : A^n \longrightarrow B$, to f jest:

- injekcją (f. różnowartościową, f. 1-1) wtw $\forall_{x_1,...,x_n,y_1,...,y_n \in A}(f(x_1, ..., x_n) = f(y_1, ..., y_n) \rightarrow \langle x_1, ..., x_n \rangle = \langle y_1, ..., y_n \rangle)$
- surjekcją (f. na) wtw B jest przeciwdziedziną f wtw $\forall_{y \in B} \exists_{x_1,...,x_n \in A}\ y = f(x_1, ..., x_n)$

Funkcje

Rodzaje funkcji:

Niech $f : A^n \longrightarrow B$, to f jest:

- injekcją (f. różnowartościową, f. 1-1) wtw $\forall_{x_1,...,x_n,y_1,...,y_n \in A}(f(x_1, ..., x_n) = f(y_1, ..., y_n) \rightarrow \langle x_1, ..., x_n \rangle = \langle y_1, ..., y_n \rangle)$
- surjekcją (f. na) wtw B jest przeciwdziedziną f wtw $\forall_{y \in B} \exists_{x_1,...,x_n \in A}\ y = f(x_1, ..., x_n)$
- bijekcją wtw jest zarazem injekcją i surjekcją

Funkcje

Rodzaje funkcji:

Niech $f : A^n \longrightarrow B$, to f jest:

- injekcją (f. różnowartościową, f. 1-1) wtw $\forall_{x_1,...,x_n,y_1,...,y_n \in A}(f(x_1, ..., x_n) = f(y_1, ..., y_n) \rightarrow \langle x_1, ..., x_n \rangle = \langle y_1, ..., y_n \rangle)$
- surjekcją (f. na) wtw B jest przeciwdziedziną f wtw $\forall_{y \in B} \exists_{x_1,...,x_n \in A}\ y = f(x_1, ..., x_n)$
- bijekcją wtw jest zarazem injekcją i surjekcją

Jeżeli $B = A$, to f jest n-argumentową operacją (działaniem) w A.

Relacje

Operacje na relacjach (funkcjach):

Relacje

Operacje na relacjach (funkcjach):

Oprócz zwykłych (zbiorowych) operacji $\cap, \cup, -$ ważne operacje to:
konwers relacji $R \subseteq A \times B$:

Relacje

Operacje na relacjach (funkcjach):

Oprócz zwykłych (zbiorowych) operacji $\cap, \cup, -$ ważne operacje to:
konwers relacji $R \subseteq A \times B$:

$$\check{R}xy \text{ wtw } Ryx \ (\check{R} \subseteq B \times A)$$

Relacje

Operacje na relacjach (funkcjach):

Oprócz zwykłych (zbiorowych) operacji $\cap, \cup, -$ ważne operacje to:
konwers relacji $R \subseteq A \times B$:

$$\check{R}xy \text{ wtw } Ryx \ (\check{R} \subseteq B \times A)$$

złożenie (iloczyn względny, superpozycja) relacji $R \subseteq A \times B$ i $S \subseteq B \times C$:

Relacje

Operacje na relacjach (funkcjach):

Oprócz zwykłych (zbiorowych) operacji $\cap, \cup, -$ ważne operacje to:
konwers relacji $R \subseteq A \times B$:

$$\check{R}xy \text{ wtw } Ryx \ (\check{R} \subseteq B \times A)$$

złożenie (iloczyn względny, superpozycja) relacji $R \subseteq A \times B$ i $S \subseteq B \times C$:

$$R \circ Sxy \text{ wtw } \exists z \in B(Rxz \wedge Szy) \ (R \circ S \subseteq A \times C)$$

Relacje

Operacje na relacjach (funkcjach):

Oprócz zwykłych (zbiorowych) operacji $\cap, \cup, -$ ważne operacje to:
konwers relacji $R \subseteq A \times B$:

$$\check{R}xy \text{ wtw } Ryx \ (\check{R} \subseteq B \times A)$$

złożenie (iloczyn względny, superpozycja) relacji $R \subseteq A \times B$ i $S \subseteq B \times C$:

$$R \circ Sxy \text{ wtw } \exists z \in B(Rxz \wedge Szy) \ (R \circ S \subseteq A \times C)$$

Uwaga:
1. konwers funkcji nie musi być funkcją

Relacje

Operacje na relacjach (funkcjach):

Oprócz zwykłych (zbiorowych) operacji $\cap, \cup, -$ ważne operacje to:
konwers relacji $R \subseteq A \times B$:

$$\check{R}xy \text{ wtw } Ryx \ (\check{R} \subseteq B \times A)$$

złożenie (iloczyn względny, superpozycja) relacji $R \subseteq A \times B$ i $S \subseteq B \times C$:

$$R \circ Sxy \text{ wtw } \exists z \in B(Rxz \wedge Szy) \ (R \circ S \subseteq A \times C)$$

Uwaga:
1. konwers funkcji nie musi być funkcją
2. przy złożeniu funkcji $f : A \longrightarrow B$ i $g : B \longrightarrow C$ zamiast pisać $f \circ g(x) = y$ piszemy $g(f(x))$ $(x \in A, y \in C)$.

Funkcje

Obrazy i przeciwobrazy funkcji:

Funkcje

Obrazy i przeciwobrazy funkcji:

Niech $f : A \longrightarrow B$:
$f[A'] = \{x \in B : \exists y \in A', x = f(y)\}$ to obraz zbioru $A' \subseteq A$ przez funkcję f

Funkcje

Obrazy i przeciwobrazy funkcji:

Niech $f : A \longrightarrow B$:
$f[A'] = \{x \in B : \exists y \in A', x = f(y)\}$ to obraz zbioru $A' \subseteq A$ przez funkcję f
inaczej: $x \in f[A']$ wtw $\exists y \in A', x = f(y)$

Funkcje

Obrazy i przeciwobrazy funkcji:

Niech $f : A \longrightarrow B$:
$f[A'] = \{x \in B : \exists y \in A', x = f(y)\}$ to obraz zbioru $A' \subseteq A$ przez funkcję f
inaczej: $x \in f[A']$ wtw $\exists y \in A', x = f(y)$
$f^{-1}[B'] = \{x \in A : f(x) \in B'\}$ to przeciwobraz zbioru $B' \subseteq B$ przez funkcję f.

Funkcje

Obrazy i przeciwobrazy funkcji:

Niech $f : A \longrightarrow B$:
$f[A'] = \{x \in B : \exists y \in A', x = f(y)\}$ to obraz zbioru $A' \subseteq A$ przez funkcję f
inaczej: $x \in f[A']$ wtw $\exists y \in A', x = f(y)$
$f^{-1}[B'] = \{x \in A : f(x) \in B'\}$ to przeciwobraz zbioru $B' \subseteq B$ przez funkcję f.
inaczej: $x \in f^{-1}[B']$ wtw $f(x) \in B'$

Podział logiczny

Podziałem logicznym zbioru A nazywamy rodzinę jego podzbiorów $\mathcal{A} = \{A_1, ..., A_n\}$ gdy spełnia warunki:

Podział logiczny

Podziałem logicznym zbioru A nazywamy rodzinę jego podzbiorów $\mathcal{A} = \{A_1, ..., A_n\}$ gdy spełnia warunki:

- adekwatności: $A = \bigcup \mathcal{A} = A_1 \cup ... \cup A_n$

Podział logiczny

Podziałem logicznym zbioru A nazywamy rodzinę jego podzbiorów $\mathcal{A} = \{A_1, ..., A_n\}$ gdy spełnia warunki:

- adekwatności: $A = \bigcup \mathcal{A} = A_1 \cup ... \cup A_n$
- rozłączności: $\forall i, j \leq n (i \neq j \rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing)$

Podział logiczny

Podziałem logicznym zbioru A nazywamy rodzinę jego podzbiorów $\mathcal{A} = \{A_1, ..., A_n\}$ gdy spełnia warunki:

- adekwatności: $A = \bigcup \mathcal{A} = A_1 \cup ... \cup A_n$
- rozłączności: $\forall i, j \leq n (i \neq j \rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing)$
- niepustości: $\forall i \leq n, A_i \neq \varnothing$

Relacje równoważnościowe

Dwuargumentowa relacja $R \subseteq A^2$ jest równoważnością wtw, spełnia następujące warunki:

Relacje równoważnościowe

Dwuargumentowa relacja $R \subseteq A^2$ jest równoważnością wtw, spełnia następujące warunki:

1. zwrotności: $\forall x, Rxx$

Relacje równoważnościowe

Dwuargumentowa relacja $R \subseteq A^2$ jest równoważnością wtw, spełnia następujące warunki:

1. zwrotności: $\forall x, Rxx$
2. symetrii: $\forall xy(Rxy \rightarrow Ryx)$

Relacje równoważnościowe

Dwuargumentowa relacja $R \subseteq A^2$ jest równoważnością wtw, spełnia następujące warunki:

1. zwrotności: $\forall x, Rxx$
2. symetrii: $\forall xy(Rxy \rightarrow Ryx)$
3. przechodniości: $\forall xyz(Rxy \wedge Ryz \rightarrow Rxz)$

Relacje równoważnościowe

Dwuargumentowa relacja $R \subseteq A^2$ jest równoważnością wtw, spełnia następujące warunki:

1. zwrotności: $\forall x, Rxx$
2. symetrii: $\forall xy(Rxy \rightarrow Ryx)$
3. przechodniości: $\forall xyz(Rxy \wedge Ryz \rightarrow Rxz)$

np. relacje wyrażone predykatem "jest tego samego koloru co", "jest tego samego kształtu co".

Relacje równoważnościowe

Niech R będzie równoważnością na A wtedy:

Relacje równoważnościowe

Niech R będzie równoważnością na A wtedy:

1. $[x]_R = \{y : Rxy\}$ jest klasą abstrakcji x-a względem R

Relacje równoważnościowe

Niech R będzie równoważnością na A wtedy:

1. $[x]_R = \{y : Rxy\}$ jest klasą abstrakcji x-a względem R
2. $A_{/R} = \{[x]_R : x \in A\}$ jest algebrą ilorazową (zbiorem wszystkich klas abstrakcji)

Relacje równoważnościowe

Zasada Abstrakcji:

Jeżeli R jest relacją równoważności na A, to $A_{/R}$ jest podziałem logicznym A, tzn. spełnia warunki:

Relacje równoważnościowe

Zasada Abstrakcji:

Jeżeli R jest relacją równoważności na A, to $A_{/R}$ jest podziałem logicznym A, tzn. spełnia warunki:

- adekwatności: $A = \bigcup A_{/R}$

Relacje równoważnościowe

Zasada Abstrakcji:

Jeżeli R jest relacją równoważności na A, to $A_{/R}$ jest podziałem logicznym A, tzn. spełnia warunki:

- adekwatności: $A = \bigcup A_{/R}$
- rozłączności: $\forall x, y \in A([x]_R \neq [y]_R \rightarrow [x]_R \cap [y]_R = \varnothing)$

Relacje równoważnościowe

Zasada Abstrakcji:

Jeżeli R jest relacją równoważności na A, to $A_{/R}$ jest podziałem logicznym A, tzn. spełnia warunki:

- adekwatności: $A = \bigcup A_{/R}$
- rozłączności: $\forall x, y \in A([x]_R \neq [y]_R \rightarrow [x]_R \cap [y]_R = \varnothing)$
- niepustości: $\forall x \in A, [x]_R \neq \varnothing$

Relacje równoważnościowe

Tw odwrotne do zasady abstrakcji:

Relacje równoważnościowe

Tw odwrotne do zasady abstrakcji:

Jeżeli $\mathcal{A}$ jest podziałem logicznym zbioru A, to można utworzyć na nim relację równoważności zdefiniowaną następująco:

Relacje równoważnościowe

Tw odwrotne do zasady abstrakcji:

Jeżeli $\mathcal{A}$ jest podziałem logicznym zbioru A, to można utworzyć na nim relację równoważności zdefiniowaną następująco:

$$Rxy \text{ wtw } \exists A_n \in \mathcal{A}(x \in A_n \wedge y \in A_n)$$

Relacje równoważnościowe

Tw odwrotne do zasady abstrakcji:

Jeżeli $\mathcal{A}$ jest podziałem logicznym zbioru A, to można utworzyć na nim relację równoważności zdefiniowaną następująco:

$$Rxy \text{ wtw } \exists A_n \in \mathcal{A}(x \in A_n \wedge y \in A_n)$$

Inny sposób otrzymywania relacji równoważnościowych:

Relacje równoważnościowe

Tw odwrotne do zasady abstrakcji:

Jeżeli $\mathcal{A}$ jest podziałem logicznym zbioru A, to można utworzyć na nim relację równoważności zdefiniowaną następująco:

$$Rxy \text{ wtw } \exists A_n \in \mathcal{A}(x \in A_n \wedge y \in A_n)$$

Inny sposób otrzymywania relacji równoważnościowych:
Niech $f \subseteq A \times B$, wtedy relacja Ker$f$ zdefiniowana następująco:

Relacje równoważnościowe

Tw odwrotne do zasady abstrakcji:

Jeżeli $\mathcal{A}$ jest podziałem logicznym zbioru A, to można utworzyć na nim relację równoważności zdefiniowaną następująco:

$$Rxy \text{ wtw } \exists A_n \in \mathcal{A}(x \in A_n \wedge y \in A_n)$$

Inny sposób otrzymywania relacji równoważnościowych:
Niech $f \subseteq A \times B$, wtedy relacja Ker$f$ zdefiniowana następująco:

$$Rxy \text{ wtw } f(x) = f(y)$$

Relacje równoważnościowe

Tw odwrotne do zasady abstrakcji:

Jeżeli $\mathcal{A}$ jest podziałem logicznym zbioru A, to można utworzyć na nim relację równoważności zdefiniowaną następująco:

$$Rxy \text{ wtw } \exists A_n \in \mathcal{A}(x \in A_n \wedge y \in A_n)$$

Inny sposób otrzymywania relacji równoważnościowych:
Niech $f \subseteq A \times B$, wtedy relacja Ker$f$ zdefiniowana następująco:

$$Rxy \text{ wtw } f(x) = f(y)$$

jest równoważnością na A.

Relacje porządkujące

Wybrane rodzaje relacji porządkujących:

Relacje porządkujące

Wybrane rodzaje relacji porządkujących:

- R jest quasi-porządkiem wtw jest zwrotna i przechodnia

Relacje porządkujące

Wybrane rodzaje relacji porządkujących:

- R jest quasi-porządkiem wtw jest zwrotna i przechodnia
- R jest częściowym porządkiem wtw jest quasi-porządkiem (słabo) asymetrycznym:
  $\forall xy(x \neq y \rightarrow (Rxy \rightarrow \neg Ryx))$

Relacje porządkujące

Wybrane rodzaje relacji porządkujących:

- R jest quasi-porządkiem wtw jest zwrotna i przechodnia
- R jest częściowym porządkiem wtw jest quasi-porządkiem (słabo) asymetrycznym:
  $\forall xy(x \neq y \rightarrow (Rxy \rightarrow \neg Ryx))$
- R jest liniowym porządkiem wtw jest częściowym porządkiem (mocno) spójnym:
  $\forall xy(Rxy \vee Ryx)$

Relacje porządkujące

Wybrane rodzaje relacji porządkujących:

- R jest quasi-porządkiem wtw jest zwrotna i przechodnia
- R jest częściowym porządkiem wtw jest quasi-porządkiem (słabo) asymetrycznym:
  $\forall xy(x \neq y \rightarrow (Rxy \rightarrow \neg Ryx))$
- R jest liniowym porządkiem wtw jest częściowym porządkiem (mocno) spójnym:
  $\forall xy(Rxy \vee Ryx)$

np. $\leq$ na zbiorze liczb naturalnych jest liniowym porządkiem. Relacja wyrażona predykatem "jest niegłupszy od" lub "jest co najmniej równie inteligentny co" jest liniowym porządkiem w zbiorze ludzi.

Relacje porządkujące

Wybrane rodzaje relacji porządkujących:

Relacje porządkujące

Wybrane rodzaje relacji porządkujących:

- R jest ścisłym częściowym porządkiem wtw jest przechodnia i (mocno) asymetryczna:
  $\forall xy(Rxy \rightarrow \neg Ryx))$

Relacje porządkujące

Wybrane rodzaje relacji porządkujących:

- R jest ścisłym częściowym porządkiem wtw jest przechodnia i (mocno) asymetryczna:
  $\forall xy(Rxy \rightarrow \neg Ryx))$
- R jest ścisłym liniowym porządkiem wtw jest ścisłym częściowym porządkiem (słabo) spójnym:
  $\forall xy(x \neq y \rightarrow (Rxy \vee Ryx))$

Relacje porządkujące

Wybrane rodzaje relacji porządkujących:

- R jest ścisłym częściowym porządkiem wtw jest przechodnia i (mocno) asymetryczna:
  $\forall xy(Rxy \rightarrow \neg Ryx))$
- R jest ścisłym liniowym porządkiem wtw jest ścisłym częściowym porządkiem (słabo) spójnym:
  $\forall xy(x \neq y \rightarrow (Rxy \vee Ryx))$

Uwaga: każdy ścisły porządek jest też przeciwzwrotny: $\forall x, \neg Rxx$

Relacje porządkujące

Wybrane rodzaje relacji porządkujących:

- R jest ścisłym częściowym porządkiem wtw jest przechodnia i (mocno) asymetryczna:
  $\forall xy(Rxy \rightarrow \neg Ryx))$
- R jest ścisłym liniowym porządkiem wtw jest ścisłym częściowym porządkiem (słabo) spójnym:
  $\forall xy(x \neq y \rightarrow (Rxy \vee Ryx))$

Uwaga: każdy ścisły porządek jest też przeciwzwrotny: $\forall x, \neg Rxx$
np. $<$ na zbiorze liczb naturalnych jest ścisłym liniowym porządkiem, a relacja wyrażona predykatem "jest wyższy od" w zb. ludzi jest ścisłym częściowym porządkiem.

Relacje porządkujące

Relacje porządkujące i ściśle porządkujące:

Relację porządkujące będziemy oznaczali symbolem $\preceq$ a ściśle porządkujące $\prec$

Relacje porządkujące

Relacje porządkujące i ściśle porządkujące:

Relację porządkujące będziemy oznaczali symbolem $\preceq$ a ściśle porządkujące $\prec$

Każda relacja $\preceq$ indukuje $\prec$:

$x \prec y$ wtw $x \preceq y \wedge x \neq y$

Relacje porządkujące

Relacje porządkujące i ściśle porządkujące:

Relację porządkujące będziemy oznaczali symbolem $\preceq$ a ściśle porządkujące $\prec$

Każda relacja $\preceq$ indukuje $\prec$:

$x \prec y$ wtw $x \preceq y \wedge x \neq y$

Każda relacja $\prec$ indukuje $\preceq$:

$x \preceq y$ wtw $x \prec y \vee x = y$

Relacje porządkujące

Elementy wyróżnione:

Niech $\langle A, \preceq \rangle$ będzie zb. cz. uporządkowanym i $a \in A$, to:

Relacje porządkujące

Elementy wyróżnione:

Niech $\langle A, \preceq \rangle$ będzie zb. cz. uporządkowanym i $a \in A$, to:

- a jest elementem $\preceq$-największym wtw $\forall x \in A, x \preceq a$

Relacje porządkujące

Elementy wyróżnione:

Niech $\langle A, \preceq \rangle$ będzie zb. cz. uporządkowanym i $a \in A$, to:

- a jest elementem $\preceq$-największym wtw $\forall x \in A, x \preceq a$
- a jest elementem $\preceq$-najmniejszym wtw $\forall x \in A, a \preceq x$

Relacje porządkujące

Elementy wyróżnione:

Niech $\langle A, \preceq \rangle$ będzie zb. cz. uporządkowanym i $a \in A$, to:

- a jest elementem $\preceq$-największym wtw $\forall x \in A, x \preceq a$
- a jest elementem $\preceq$-najmniejszym wtw $\forall x \in A, a \preceq x$
- a jest elementem $\preceq$-maksymalnym wtw $\forall x \in A, \neg a \prec x (\neg \exists x \in A, a \prec x)$

Relacje porządkujące

Elementy wyróżnione:

Niech $\langle A, \preceq \rangle$ będzie zb. cz. uporządkowanym i $a \in A$, to:

- a jest elementem $\preceq$-największym wtw $\forall x \in A, x \preceq a$
- a jest elementem $\preceq$-najmniejszym wtw $\forall x \in A, a \preceq x$
- a jest elementem $\preceq$-maksymalnym wtw $\forall x \in A, \neg a \prec x (\neg \exists x \in A, a \prec x)$
- a jest elementem $\preceq$-minimalnym wtw $\forall x \in A, \neg x \prec a (\neg \exists x \in A, x \prec a)$

Relacje porządkujące

Elementy wyróżnione:

Niech $\langle A, \preceq \rangle$ będzie zb. cz. uporządkowanym i $a \in A$, to:

- a jest elementem $\preceq$-największym wtw $\forall x \in A, x \preceq a$
- a jest elementem $\preceq$-najmniejszym wtw $\forall x \in A, a \preceq x$
- a jest elementem $\preceq$-maksymalnym wtw $\forall x \in A, \neg a \prec x (\neg \exists x \in A, a \prec x)$
- a jest elementem $\preceq$-minimalnym wtw $\forall x \in A, \neg x \prec a (\neg \exists x \in A, x \prec a)$

Uwaga: elementy największe (najmniejsze) są jedyne (jeżeli są) podczas gdy elementów maksymalnych (minimalnych) może być wiele. Element największy (najmniejszy) jest zarazem maksymalny (minimalny).

Relacje porządkujące

Elementy wyróżnione:

Niech $\langle A, \preceq \rangle$ będzie zb. cz. uporządkowanym $B \subseteq A$ i $a \in A$, to:

Relacje porządkujące

Elementy wyróżnione:

Niech $\langle A, \preceq \rangle$ będzie zb. cz. uporządkowanym $B \subseteq A$ i $a \in A$, to:

- a jest ograniczeniem górnym B wtw $\forall x \in B, x \preceq a$

Relacje porządkujące

Elementy wyróżnione:

Niech $\langle A, \preceq \rangle$ będzie zb. cz. uporządkowanym $B \subseteq A$ i $a \in A$, to:

- a jest ograniczeniem górnym B wtw $\forall x \in B, x \preceq a$
- a jest ograniczeniem dolnym B wtw $\forall x \in B, a \preceq x$

Relacje porządkujące

Elementy wyróżnione:

Niech $\langle A, \preceq \rangle$ będzie zb. cz. uporządkowanym $B \subseteq A$ i $a \in A$, to:

- a jest ograniczeniem górnym B wtw $\forall x \in B, x \preceq a$
- a jest ograniczeniem dolnym B wtw $\forall x \in B, a \preceq x$
- a jest kresem górnym (supremum) B ($a = supB$) wtw a jest najmniejszym ograniczeniem górnym B (tzn. $\forall x \in A(\forall y \in B, y \preceq x \rightarrow a \preceq x)$

Relacje porządkujące

Elementy wyróżnione:

Niech $\langle A, \preceq \rangle$ będzie zb. cz. uporządkowanym $B \subseteq A$ i $a \in A$, to:

- a jest ograniczeniem górnym B wtw $\forall x \in B, x \preceq a$
- a jest ograniczeniem dolnym B wtw $\forall x \in B, a \preceq x$
- a jest kresem górnym (supremum) B ($a = supB$) wtw a jest najmniejszym ograniczeniem górnym B (tzn. $\forall x \in A(\forall y \in B, y \preceq x \rightarrow a \preceq x)$
- a jest kresem dolnym (infimum) B ($a = infB$) wtw a jest największym ograniczeniem dolnym B (tzn. $\forall x \in A(\forall y \in B, x \preceq y \rightarrow x \preceq a)$

Struktury Relacyjne

Struktury relacyjne mają postać:

Struktury Relacyjne

Struktury relacyjne mają postać:

$\mathfrak{M} = \langle D, R_1, ..., R_j, f_1, ..., f_k, c_1, ..., c_n \rangle$,

Struktury Relacyjne

Struktury relacyjne mają postać:

$\mathfrak{M} = \langle D, R_1, ..., R_j, f_1, ..., f_k, c_1, ..., c_n \rangle$,
gdzie:

- D to niepusta dziedzina (nośnik)

Struktury Relacyjne

Struktury relacyjne mają postać:

$\mathfrak{M} = \langle D, R_1, ..., R_j, f_1, ..., f_k, c_1, ..., c_n \rangle$,
gdzie:

- D to niepusta dziedzina (nośnik)
- $R_1, ..., R_j$ to relacje na D

Struktury Relacyjne

Struktury relacyjne mają postać:

$\mathfrak{M} = \langle D, R_1, ..., R_j, f_1, ..., f_k, c_1, ..., c_n \rangle$,
gdzie:

- D to niepusta dziedzina (nośnik)
- $R_1, ..., R_j$ to relacje na D
- $f_1, ..., f_k$ to funkcje (operacje, działania) na D

Struktury Relacyjne

Struktury relacyjne mają postać:

$\mathfrak{M} = \langle D, R_1, ..., R_j, f_1, ..., f_k, c_1, ..., c_n \rangle$,
gdzie:

- D to niepusta dziedzina (nośnik)
- $R_1, ..., R_j$ to relacje na D
- $f_1, ..., f_k$ to funkcje (operacje, działania) na D
- $c'_1, ..., c'_n$ to wybrane elementy D

Struktury Relacyjne

Struktury relacyjne mają postać:

$\mathfrak{M} = \langle D, R_1, ..., R_j, f_1, ..., f_k, c_1, ..., c_n \rangle$,
gdzie:

- D to niepusta dziedzina (nośnik)
- $R_1, ..., R_j$ to relacje na D
- $f_1, ..., f_k$ to funkcje (operacje, działania) na D
- $c'_1, ..., c'_n$ to wybrane elementy D

Struktury z $j = 0$ to algebry abstrakcyjne.

Przykłady algebr

Teoria grup:

Przykłady algebr

Teoria grup:

Grupą nazywamy algebrę $\mathfrak{A} = \langle D, \cdot, 1 \rangle$ spełniającą warunki:

Przykłady algebr

Teoria grup:

Grupą nazywamy algebrę $\mathfrak{A} = \langle D, \cdot, 1 \rangle$ spełniającą warunki:

$(G1)$ $\forall x, y, z(x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z)$
$(G2)$ $\forall x(1 \cdot x = x)$
$(G3)$ $\forall x \exists y(y \cdot x = 1)$

Przykłady algebr

Teoria grup:

Grupą nazywamy algebrę $\mathfrak{A} = \langle D, \cdot, 1 \rangle$ spełniającą warunki:

$(G1) \quad \forall x, y, z(x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z)$
$(G2) \quad \forall x(1 \cdot x = x)$
$(G3) \quad \forall x \exists y(y \cdot x = 1)$

Po dodaniu:

$(G4) \quad \forall x, y(x \cdot y = y \cdot x)$

Przykłady algebr

Teoria grup:

Grupą nazywamy algebrę $\mathfrak{A} = \langle D, \cdot, 1 \rangle$ spełniającą warunki:

$(G1) \quad \forall x, y, z(x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z)$
$(G2) \quad \forall x(1 \cdot x = x)$
$(G3) \quad \forall x \exists y(y \cdot x = 1)$

Po dodaniu:

$(G4) \quad \forall x, y(x \cdot y = y \cdot x)$

otrzymujemy grupy przemienne (Abelowe).

Przykłady algebr

Teoria krat:

Przykłady algebr

Teoria krat:

Kratą nazywamy algebrę $\mathfrak{A} = \langle D, \sqcap, \sqcup \rangle$ spełniającą warunki:

Przykłady algebr

Teoria krat:

Kratą nazywamy algebrę $\mathfrak{A} = \langle D, \sqcap, \sqcup \rangle$ spełniającą warunki:

$(K1)$	$\forall x(x \sqcap x = x)$	$\forall x(x \sqcup x = x)$
$(K2)$	$\forall x, y(x \sqcap y = y \sqcap x)$	$\forall x, y(x \sqcup y = y \sqcup x)$
$(K3)$	$\forall x, y, z(x \sqcap (y \sqcap z) =$ $(x \sqcap y) \sqcap z)$	$\forall x, y, z(x \sqcup (y \sqcup z) =$ $(x \sqcup y) \sqcup z)$
$(K4)$	$\forall x, y(x \sqcap (x \sqcup y) = x)$	$\forall x, y(x \sqcup (x \sqcap y) = x)$

Przykłady algebr

Algebry Boole'a:

Przykłady algebr

Algebry Boole'a:

Algebrą Boole'a nazywamy algebrę $\mathfrak{A} = \langle D, -, \sqcap, \sqcup, 1, 0 \rangle$ spełniającą dla $\sqcap$ i $\sqcup$ warunki kratowe oraz:

Przykłady algebr

Algebry Boole'a:

Algebrą Boole'a nazywamy algebrę $\mathfrak{A} = \langle D, -, \sqcap, \sqcup, 1, 0 \rangle$ spełniającą dla $\sqcap$ i $\sqcup$ warunki kratowe oraz:

$(B1)$	$\forall x, y, z(x \sqcap (y \sqcup z) =$	$\forall x, y, z(x \sqcup (y \sqcap z) =$
	$(x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap z))$	$(x \sqcup y) \sqcap (x \sqcup z))$
$(B2)$	$\forall x(0 \sqcup x = x)$	$\forall x(0 \sqcap x = 0)$
$(B3)$	$\forall x(1 \sqcup x = 1)$	$\forall x(1 \sqcap x = x)$
$(B4)$	$\forall x(x \sqcup -x = 1)$	$\forall x(x \sqcap -x = 0)$

Morfizmy

Struktury podobne:

Morfizmy

Struktury podobne:

Niech
$\mathfrak{M} = \langle D, R_1, ..., R_j, f_1, ..., f_k, c_1, ..., c_n \rangle$,

Morfizmy

Struktury podobne:

Niech
$\mathfrak{M} = \langle D, R_1, ..., R_j, f_1, ..., f_k, c_1, ..., c_n \rangle$,
i
$\mathfrak{M}' = \langle D', R'_1, ..., R'_j, f'_1, ..., f'_k, c'_1, ..., c'_n \rangle$

Morfizmy

Struktury podobne:

Niech
$\mathfrak{M} = \langle D, R_1, ..., R_j, f_1, ..., f_k, c_1, ..., c_n \rangle$,
i
$\mathfrak{M}' = \langle D', R'_1, ..., R'_j, f'_1, ..., f'_k, c'_1, ..., c'_n \rangle$
mają tyle samo relacji i funkcji o takiej samej argumentowości oraz obiektów wyróżnionych, wtedy są strukturami podobnymi (algebrami podobnymi jeżeli $j = 0$).

Morfizmy

Morfizmy:

Morfizmy

Morfizmy:

Niech $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ będą strukturami podobnymi, odwzorowanie $h : D \longrightarrow D'$ jest homomorfizmem z $\mathfrak{M}$ w $\mathfrak{M}'$ (inaczej $h \in Hom(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$) wtw:

Morfizmy

Morfizmy:

Niech $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ będą strukturami podobnymi, odwzorowanie $h : D \longrightarrow D'$ jest homomorfizmem z $\mathfrak{M}$ w $\mathfrak{M}'$ (inaczej $h \in Hom(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$) wtw:

1. $\forall i \leq n(c'_i = h(c_i))$

Morfizmy

Morfizmy:

Niech $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ będą strukturami podobnymi, odwzorowanie $h : D \longrightarrow D'$ jest homomorfizmem z $\mathfrak{M}$ w $\mathfrak{M}'$ (inaczej $h \in Hom(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$) wtw:

1. $\forall i \leq n(c_i' = h(c_i))$
2. $\forall i \leq k, \forall_{x_1,...,x_n \in A}(h(f_i(x_1, ..., x_n)) = f_i'(h(x_1), ..., h(x_n)))$, gdzie n to argumentowość f_i (i f_i')

Morfizmy

Morfizmy:

Niech $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ będą strukturami podobnymi, odwzorowanie $h : D \longrightarrow D'$ jest homomorfizmem z $\mathfrak{M}$ w $\mathfrak{M}'$ (inaczej $h \in Hom(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$) wtw:

1. $\forall i \leq n(c_i' = h(c_i))$
2. $\forall i \leq k, \forall_{x_1,...,x_n \in A}(h(f_i(x_1, ..., x_n)) = f_i'(h(x_1), ..., h(x_n)))$, gdzie n to argumentowość f_i (i f_i')
3. $\forall i \leq j, \forall_{x_1,...,x_n \in A}(\langle x_1, ..., x_n \rangle \in R_i \rightarrow \langle h(x_1), ..., h(x_n) \rangle \in R_i')$, gdzie n to argumentowość R_i (i R_i')

Morfizmy

Morfizmy:

Niech $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ będą strukturami podobnymi, odwzorowanie $h : D \longrightarrow D'$ jest homomorfizmem z $\mathfrak{M}$ w $\mathfrak{M}'$ (inaczej $h \in Hom(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$) wtw:

1. $\forall i \leq n(c_i' = h(c_i))$
2. $\forall i \leq k, \forall_{x_1,...,x_n \in A}(h(f_i(x_1, ..., x_n)) = f_i'(h(x_1), ..., h(x_n)))$, gdzie n to argumentowość f_i (i f_i')
3. $\forall i \leq j, \forall_{x_1,...,x_n \in A}(\langle x_1, ..., x_n \rangle \in R_i \rightarrow \langle h(x_1), ..., h(x_n) \rangle \in R_i')$, gdzie n to argumentowość R_i (i R_i')

Uwaga: jeżeli war. (3) wzmocnimy do równoważności, to mamy silny homomorfizm (w (1) i (2) nic się nie zmienia).

Morfizmy

Rodzaje morfizmów:

Morfizmy

Rodzaje morfizmów:

Niech $h \in Hom(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$ będzie silnym homomorfizmem, wtedy h jest:

Morfizmy

Rodzaje morfizmów:

Niech $h \in Hom(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$ będzie silnym homomorfizmem, wtedy h jest:

- monomorfizmem (zanurzeniem) wtw h jest injekcją

Morfizmy

Rodzaje morfizmów:

Niech $h \in Hom(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$ będzie silnym homomorfizmem, wtedy h jest:

- monomorfizmem (zanurzeniem) wtw h jest injekcją
- epimorfizmem wtw h is surjekcją

Morfizmy

Rodzaje morfizmów:

Niech $h \in Hom(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$ będzie silnym homomorfizmem, wtedy h jest:

- monomorfizmem (zanurzeniem) wtw h jest injekcją
- epimorfizmem wtw h is surjekcją
- izomorfizmem wtw h jest bijekcją

Morfizmy

Rodzaje morfizmów:

Niech $h \in Hom(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$ będzie silnym homomorfizmem, wtedy h jest:

- monomorfizmem (zanurzeniem) wtw h jest injekcją
- epimorfizmem wtw h is surjekcją
- izomorfizmem wtw h jest bijekcją

Uwaga: jeżeli $h \in Hom(\mathfrak{M}, \mathfrak{M})$ (odwzorowanie w tę samą strukturę) to nazywamy go endomorfizmem w $\mathfrak{M}$; jeżeli jest to izomorfizm, to mówimy o automorfizmie.
Przykładem homomorfizmu jest dowolna valuacja dla KRZ, a endomorfizmu operacja podstawiania.

Inne wyniki

Twierdzenie o izomorfizmie:

Niech $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{M}'$ oznacza izomorfizm 2 struktur. Łatwo sprawdzić, że relacja $\cong$ jest równoważnością (zwrotna, przechodnia, symetryczna) i że dowolne struktury izomorficzne są równoliczne.

Inne wyniki

Twierdzenie o izomorfizmie:

Niech $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{M}'$ oznacza izomorfizm 2 struktur. Łatwo sprawdzić, że relacja $\cong$ jest równoważnością (zwrotna, przechodnia, symetryczna) i że dowolne struktury izomorficzne są równoliczne.

Twierdzenie: Jeżeli h ustala $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{M}'$ a v jest dowolną waluacją w $\mathfrak{M}$, to:

Inne wyniki

Twierdzenie o izomorfizmie:

Niech $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{M}'$ oznacza izomorfizm 2 struktur. Łatwo sprawdzić, że relacja $\cong$ jest równoważnością (zwrotna, przechodnia, symetryczna) i że dowolne struktury izomorficzne są równoliczne.
Twierdzenie: Jeżeli h ustala $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{M}'$ a v jest dowolną waluacją w $\mathfrak{M}$, to:

1. $h(I_v(\tau)) = I_{h(v)}(\tau)$, gdzie $I_{h(v)}(\tau)$ jest interpretacją τ w $\mathfrak{M}'$

Inne wyniki

Twierdzenie o izomorfizmie:

Niech $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{M}'$ oznacza izomorfizm 2 struktur. Łatwo sprawdzić, że relacja $\cong$ jest równoważnością (zwrotna, przechodnia, symetryczna) i że dowolne struktury izomorficzne są równoliczne.
Twierdzenie: Jeżeli h ustala $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{M}'$ a v jest dowolną waluacją w $\mathfrak{M}$, to:

1. $h(I_v(\tau)) = I_{h(v)}(\tau)$, gdzie $I_{h(v)}(\tau)$ jest interpretacją τ w $\mathfrak{M}'$
2. $\mathfrak{M}, v \vDash \varphi$ wtw $\mathfrak{M}', h(v) \vDash \varphi$

Inne wyniki

Twierdzenie o izomorfizmie:

Niech $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{M}'$ oznacza izomorfizm 2 struktur. Łatwo sprawdzić, że relacja $\cong$ jest równoważnością (zwrotna, przechodnia, symetryczna) i że dowolne struktury izomorficzne są równoliczne.
Twierdzenie: Jeżeli h ustala $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{M}'$ a v jest dowolną waluacją w $\mathfrak{M}$, to:

1. $h(I_v(\tau)) = I_{h(v)}(\tau)$, gdzie $I_{h(v)}(\tau)$ jest interpretacją τ w $\mathfrak{M}'$
2. $\mathfrak{M}, v \vDash \varphi$ wtw $\mathfrak{M}', h(v) \vDash \varphi$
3. $E(\mathfrak{M}) = E(\mathfrak{M}')$

Twierdzenie o izomorfizmie:

Przykład struktur izomorficznych:

Twierdzenie o izomorfizmie:

Przykład struktur izomorficznych:

$\mathfrak{N} = \langle N, =, <, s, +, 0 \rangle$, gdzie N to zb. l. naturalnych i

Twierdzenie o izomorfizmie:

Przykład struktur izomorficznych:

$\mathfrak{N} = \langle N, =, <, s, +, 0 \rangle$, gdzie N to zb. l. naturalnych i
$\mathfrak{P} = \langle P, =, <, s', +, 0 \rangle$, gdzie P to zb. l. parzystych a s' jest zdefiniowane następująco:

Twierdzenie o izomorfizmie:

Przykład struktur izomorficznych:

$\mathfrak{N} = \langle N, =, <, s, +, 0 \rangle$, gdzie N to zb. l. naturalnych i
$\mathfrak{P} = \langle P, =, <, s', +, 0 \rangle$, gdzie P to zb. l. parzystych a s' jest zdefiniowane następująco:
$s'(x) = x + 2$.

Twierdzenie o izomorfizmie:

Przykład struktur izomorficznych:

$\mathfrak{N} = \langle N, =, <, s, +, 0 \rangle$, gdzie N to zb. l. naturalnych i
$\mathfrak{P} = \langle P, =, <, s', +, 0 \rangle$, gdzie P to zb. l. parzystych a s' jest zdefiniowane następująco:
$s'(x) = x + 2$.
$h(x) = 2x$ ustala $\mathfrak{N} \cong \mathfrak{P}$, gdyż jest bijekcją i spełnia warunki silnego homomorfizmu, tzn:

Twierdzenie o izomorfizmie:

Przykład struktur izomorficznych:

$\mathfrak{N} = \langle N, =, <, s, +, 0 \rangle$, gdzie N to zb. l. naturalnych i
$\mathfrak{P} = \langle P, =, <, s', +, 0 \rangle$, gdzie P to zb. l. parzystych a s' jest zdefiniowane następująco:
$s'(x) = x + 2$.
$h(x) = 2x$ ustala $\mathfrak{N} \cong \mathfrak{P}$, gdyż jest bijekcją i spełnia warunki silnego homomorfizmu, tzn:

- $x = y$ wtw $2x = 2y$ (tj. $h(x) = h(y)$)

Twierdzenie o izomorfizmie:

Przykład struktur izomorficznych:

$\mathfrak{N} = \langle N, =, <, s, +, 0 \rangle$, gdzie N to zb. l. naturalnych i
$\mathfrak{P} = \langle P, =, <, s', +, 0 \rangle$, gdzie P to zb. l. parzystych a s' jest zdefiniowane następująco:
$s'(x) = x + 2$.
$h(x) = 2x$ ustala $\mathfrak{N} \cong \mathfrak{P}$, gdyż jest bijekcją i spełnia warunki silnego homomorfizmu, tzn:

- $x = y$ wtw $2x = 2y$ (tj. $h(x) = h(y)$)
- $x < y$ wtw $2x < 2y$

Twierdzenie o izomorfizmie:

Przykład struktur izomorficznych:

$\mathfrak{N} = \langle N, =, <, s, +, 0 \rangle$, gdzie N to zb. l. naturalnych i
$\mathfrak{P} = \langle P, =, <, s', +, 0 \rangle$, gdzie P to zb. l. parzystych a s' jest zdefiniowane następująco:
$s'(x) = x + 2$.
$h(x) = 2x$ ustala $\mathfrak{N} \cong \mathfrak{P}$, gdyż jest bijekcją i spełnia warunki silnego homomorfizmu, tzn:

- $x = y$ wtw $2x = 2y$ (tj. $h(x) = h(y)$)
- $x < y$ wtw $2x < 2y$
- $h(s(x)) = s'(h(x))$ (tj. $2s(x) = 2(x + 1) = 2x + 2 = s'(2x)$)

Twierdzenie o izomorfizmie:

Przykład struktur izomorficznych:

$\mathfrak{N} = \langle N, =, <, s, +, 0\rangle$, gdzie N to zb. l. naturalnych i
$\mathfrak{P} = \langle P, =, <, s', +, 0\rangle$, gdzie P to zb. l. parzystych a s' jest zdefiniowane następująco:
$s'(x) = x + 2$.
$h(x) = 2x$ ustala $\mathfrak{N} \cong \mathfrak{P}$, gdyż jest bijekcją i spełnia warunki silnego homomorfizmu, tzn:

- $x = y$ wtw $2x = 2y$ (tj. $h(x) = h(y)$)
- $x < y$ wtw $2x < 2y$
- $h(s(x)) = s'(h(x))$ (tj. $2s(x) = 2(x + 1) = 2x + 2 = s'(2x)$)
- $h(x + y) = h(x) + h(y)$ (tj. $2(x + y) = 2x + 2y$)

Twierdzenie o izomorfizmie:

Przykład struktur izomorficznych:

$\mathfrak{N} = \langle N, =, <, s, +, 0\rangle$, gdzie N to zb. l. naturalnych i
$\mathfrak{P} = \langle P, =, <, s', +, 0\rangle$, gdzie P to zb. l. parzystych a s' jest zdefiniowane następująco:
$s'(x) = x + 2$.
$h(x) = 2x$ ustala $\mathfrak{N} \cong \mathfrak{P}$, gdyż jest bijekcją i spełnia warunki silnego homomorfizmu, tzn:

- $x = y$ wtw $2x = 2y$ (tj. $h(x) = h(y)$)
- $x < y$ wtw $2x < 2y$
- $h(s(x)) = s'(h(x))$ (tj. $2s(x) = 2(x + 1) = 2x + 2 = s'(2x)$)
- $h(x + y) = h(x) + h(y)$ (tj. $2(x + y) = 2x + 2y$)
- $h(0) = 0$ (tj. $20 = 0$)

Twierdzenie o izomorfizmie:

Przykład struktur nieizomorficznych:

Twierdzenie o izomorfizmie:

Przykład struktur nieizomorficznych:

Twierdzenie o izomorfizmie daje kryterium odróżnienia struktur nieizomorficznych (choć równolicznych).

Twierdzenie o izomorfizmie:

Przykład struktur nieizomorficznych:

Twierdzenie o izomorfizmie daje kryterium odróżnienia struktur nieizomorficznych (choć równolicznych).
Aby wykazać, że $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ nie są izomorficzne należy skonstruować takie φ, że

$$\mathfrak{M} \vDash \varphi \text{ ale } \mathfrak{M}' \nvDash \varphi$$

Przykład:

Twierdzenie o izomorfizmie:

Przykład struktur nieizomorficznych:

Twierdzenie o izomorfizmie daje kryterium odróżnienia struktur nieizomorficznych (choć równolicznych).
Aby wykazać, że $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ nie są izomorficzne należy skonstruować takie φ, że

$$\mathfrak{M} \vDash \varphi \text{ ale } \mathfrak{M}' \nvDash \varphi$$

Przykład:
$\mathfrak{N}$ nie jest izomorficzne z $\mathfrak{C}$ (l. całkowite) gdyż

Twierdzenie o izomorfizmie:

Przykład struktur nieizomorficznych:

Twierdzenie o izomorfizmie daje kryterium odróżnienia struktur nieizomorficznych (choć równolicznych).
Aby wykazać, że $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ nie są izomorficzne należy skonstruować takie φ, że

$$\mathfrak{M} \vDash \varphi \text{ ale } \mathfrak{M}' \nvDash \varphi$$

Przykład:
$\mathfrak{N}$ nie jest izomorficzne z $\mathfrak{C}$ (l. całkowite) gdyż

$$\mathfrak{N} \vDash \exists x \forall y (x \neq y \to x < y) \text{ ale}$$
$$\mathfrak{C} \nvDash \exists x \forall y (x \neq y \to x < y)$$

Twierdzenie o izomorfizmie:

Struktury izomorficzne a nieodróżnialność teorii:

Twierdzenie o izomorfizmie:

Struktury izomorficzne a nieodróżnialność teorii:

Twierdzenie o izomorfizmie można sformułować nieformalnie:

Jeżeli 2 struktury są izomorficzne, to są (matematycznie) nieodróżnialne.

Twierdzenie o izomorfizmie:

Struktury izomorficzne a nieodróżnialność teorii:

Twierdzenie o izomorfizmie można sformułować nieformalnie:

Jeżeli 2 struktury są izomorficzne, to są (matematycznie) nieodróżnialne.

Twierdzenia tego nie można odwrócić, tzn. istnieją struktury nieodróżnialne w sensie opisującego je języka 1-go rzędu (charakteryzujące semantycznie tę samą teorię) ale nieizomorficzne.

Twierdzenie o izomorfizmie:

Struktury izomorficzne a nieodróżnialność teorii:

Twierdzenie o izomorfizmie można sformułować nieformalnie:

Jeżeli 2 struktury są izomorficzne, to są (matematycznie) nieodróżnialne.

Twierdzenia tego nie można odwrócić, tzn. istnieją struktury nieodróżnialne w sensie opisującego je języka 1-go rzędu (charakteryzujące semantycznie tę samą teorię) ale nieizomorficzne.

Np. Arytmetyka l.nat. jest charakteryzowana nie tylko przez $\mathfrak{N}$ ale i przez nieizomorficzne z $\mathfrak{N}$ modele niestandardowe.