LOGIKA II – WPROWADZENIE DO LOGIK NIEKLASYCZNYCH

Andrzej Indrzejczak

Katedra Logiki i Metodologii Nauk UŁ

Łódź, semestr zimowy 2008/2009

Motywy konstrukcji logik nieklasycznych

Logika klasyczna ma ograniczone zastosowania m.in. w:

Motywy konstrukcji logik nieklasycznych

Logika klasyczna ma ograniczone zastosowania m.in. w:

- formalizacji akceptowalnych form wnioskowania używanych w językach naturalnych

Motywy konstrukcji logik nieklasycznych

Logika klasyczna ma ograniczone zastosowania m.in. w:

- formalizacji akceptowalnych form wnioskowania używanych w językach naturalnych
- naukach komputerowych, informatyce, badaniach nad AI

Motywy konstrukcji logik nieklasycznych

Logika klasyczna ma ograniczone zastosowania m.in. w:

- formalizacji akceptowalnych form wnioskowania używanych w językach naturalnych
- naukach komputerowych, informatyce, badaniach nad AI
- specyficznych naukach (np. mechanika kwantowa)

Motywy konstrukcji logik nieklasycznych

Logika klasyczna ma ograniczone zastosowania m.in. w:

- formalizacji akceptowalnych form wnioskowania używanych w językach naturalnych
- naukach komputerowych, informatyce, badaniach nad AI
- specyficznych naukach (np. mechanika kwantowa)
- specjalnych działach wiedzy (np. prawoznawstwo, etyka)

Motywy konstrukcji logik nieklasycznych

Logika klasyczna ma ograniczone zastosowania m.in. w:

- formalizacji akceptowalnych form wnioskowania używanych w językach naturalnych
- naukach komputerowych, informatyce, badaniach nad AI
- specyficznych naukach (np. mechanika kwantowa)
- specjalnych działach wiedzy (np. prawoznawstwo, etyka)

Morał: Potrzebne są silniejsze lub bardziej wyspecjalizowane systemy logiczne.

Kiedy to się zaczęło

Wybrane historyczne propozycje rozwiązań nieklasycznych:

Kiedy to się zaczęło

Wybrane historyczne propozycje rozwiązań nieklasycznych:

- Sylogizmy modalne Arystotelesa

Kiedy to się zaczęło

Wybrane historyczne propozycje rozwiązań nieklasycznych:

- Sylogizmy modalne Arystotelesa
- logika zdań stoików jako uzupełnienie logiki nazw Arystotelesa

Kiedy to się zaczęło

Wybrane historyczne propozycje rozwiązań nieklasycznych:

- Sylogizmy modalne Arystotelesa
- logika zdań stoików jako uzupełnienie logiki nazw Arystotelesa
- implikacje nieklasyczne Chryzypa i Diodora jako alternatywa dla implikacji materialnej Filona

Kiedy to się zaczęło

Wybrane historyczne propozycje rozwiązań nieklasycznych:

- Sylogizmy modalne Arystotelesa
- logika zdań stoików jako uzupełnienie logiki nazw Arystotelesa
- implikacje nieklasyczne Chryzypa i Diodora jako alternatywa dla implikacji materialnej Filona
- sylogizmy temporalne Ockhama

Kiedy to się zaczęło

Wybrane historyczne propozycje rozwiązań nieklasycznych:

- Sylogizmy modalne Arystotelesa
- logika zdań stoików jako uzupełnienie logiki nazw Arystotelesa
- implikacje nieklasyczne Chryzypa i Diodora jako alternatywa dla implikacji materialnej Filona
- sylogizmy temporalne Ockhama
- sylogizmy "ukośne" Hamiltona

Logiki nieklasyczne – wstęp

Typy logik nieklasycznych

Logiki nieklasyczne – wstęp

Typy logik nieklasycznych

- Wzmocnienia logiki klasycznej (zbudowane na bogatszym języku).

Logiki nieklasyczne – wstęp

Typy logik nieklasycznych

- Wzmocnienia logiki klasycznej (zbudowane na bogatszym języku).
- Osłabienia logiki klasycznej (logiki dewiacyjne)

Logiki nieklasyczne – wstęp

Typy logik nieklasycznych

- Wzmocnienia logiki klasycznej (zbudowane na bogatszym języku).
- Osłabienia logiki klasycznej (logiki dewiacyjne) – punktem wyjścia jest kwestionowanie poprawności logiki klasycznej.

Logiki nieklasyczne – wstęp

Typy logik nieklasycznych

- Wzmocnienia logiki klasycznej (zbudowane na bogatszym języku).
- Osłabienia logiki klasycznej (logiki dewiacyjne) – punktem wyjścia jest kwestionowanie poprawności logiki klasycznej.
- Systemy krzyżujące się z logiką klasyczną

Logiki nieklasyczne – wstęp

Typy logik nieklasycznych

- Wzmocnienia logiki klasycznej (zbudowane na bogatszym języku).
- Osłabienia logiki klasycznej (logiki dewiacyjne) – punktem wyjścia jest kwestionowanie poprawności logiki klasycznej.
- Systemy krzyżujące się z logiką klasyczną
  - rozwinięcia logik dewiacyjnych na bogatszym języku

Logiki nieklasyczne – wstęp

Typy logik nieklasycznych

- Wzmocnienia logiki klasycznej (zbudowane na bogatszym języku).
- Osłabienia logiki klasycznej (logiki dewiacyjne) – punktem wyjścia jest kwestionowanie poprawności logiki klasycznej.
- Systemy krzyżujące się z logiką klasyczną
  - rozwinięcia logik dewiacyjnych na bogatszym języku
  - logiki dewiacyjne na tym samym języku (connexive logic)

Powody wprowadzania logik dewiacyjnych

Lista przykładowych tez i reguł inferencji logiki klasycznej, które często poddawano w wątpliwość:

Powody wprowadzania logik dewiacyjnych

Lista przykładowych tez i reguł inferencji logiki klasycznej, które często poddawano w wątpliwość:

- EM $p \vee \neg p$

Powody wprowadzania logik dewiacyjnych

Lista przykładowych tez i reguł inferencji logiki klasycznej, które często poddawano w wątpliwość:

- EM $p \vee \neg p$
- NSP $\neg(p \wedge \neg p)$

Powody wprowadzania logik dewiacyjnych

Lista przykładowych tez i reguł inferencji logiki klasycznej, które często poddawano w wątpliwość:

- EM $p \vee \neg p$
- NSP $\neg(p \wedge \neg p)$
- PN $\neg\neg p \to p$

Powody wprowadzania logik dewiacyjnych

Lista przykładowych tez i reguł inferencji logiki klasycznej, które często poddawano w wątpliwość:

- EM $p \vee \neg p$
- NSP $\neg(p \wedge \neg p)$
- PN $\neg\neg p \rightarrow p$
- AI $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$

Powody wprowadzania logik dewiacyjnych

Lista przykładowych tez i reguł inferencji logiki klasycznej, które często poddawano w wątpliwość:

- EM $p \vee \neg p$
- NSP $\neg(p \wedge \neg p)$
- PN $\neg\neg p \to p$
- AI $(p \to q) \vee (q \to p)$
- DS $p \to (\neg p \to q)$

Powody wprowadzania logik dewiacyjnych

Lista przykładowych tez i reguł inferencji logiki klasycznej, które często poddawano w wątpliwość:

- EM $p \vee \neg p$
- NSP $\neg(p \wedge \neg p)$
- PN $\neg\neg p \rightarrow p$
- AI $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$
- DS $p \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$ lub $p \wedge \neg p \rightarrow q$

Powody wprowadzania logik dewiacyjnych

Lista przykładowych tez i reguł inferencji logiki klasycznej, które często poddawano w wątpliwość:

- EM $p \vee \neg p$
- NSP $\neg(p \wedge \neg p)$
- PN $\neg\neg p \to p$
- AI $(p \to q) \vee (q \to p)$
- DS $p \to (\neg p \to q)$ lub $p \wedge \neg p \to q$ lub $\varphi, \neg\varphi \vdash \psi$

Powody wprowadzania logik dewiacyjnych

Lista przykładowych tez i reguł inferencji logiki klasycznej, które często poddawano w wątpliwość:

- EM $p \vee \neg p$
- NSP $\neg(p \wedge \neg p)$
- PN $\neg\neg p \to p$
- AI $(p \to q) \vee (q \to p)$
- DS $p \to (\neg p \to q)$ lub $p \wedge \neg p \to q$ lub $\varphi, \neg\varphi \vdash \psi$ lub $\bot \to \varphi$

Powody wprowadzania logik dewiacyjnych

Lista przykładowych tez i reguł inferencji logiki klasycznej, które często poddawano w wątpliwość:

- EM $p \vee \neg p$
- NSP $\neg(p \wedge \neg p)$
- PN $\neg\neg p \rightarrow p$
- AI $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$
- DS $p \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$ lub $p \wedge \neg p \rightarrow q$ lub $\varphi, \neg\varphi \vdash \psi$ lub $\perp \rightarrow \varphi$

Powody wprowadzania logik dewiacyjnych

Lista przykładowych tez i reguł inferencji logiki klasycznej, które często poddawano w wątpliwość:

Powody wprowadzania logik dewiacyjnych

Lista przykładowych tez i reguł inferencji logiki klasycznej, które często poddawano w wątpliwość:

- DP $p \to (q \to p)$

Powody wprowadzania logik dewiacyjnych

Lista przykładowych tez i reguł inferencji logiki klasycznej, które często poddawano w wątpliwość:

- DP $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ lub $\varphi \vdash \psi \rightarrow \varphi$

Powody wprowadzania logik dewiacyjnych

Lista przykładowych tez i reguł inferencji logiki klasycznej, które często poddawano w wątpliwość:

- DP $p \to (q \to p)$ lub $\varphi \vdash \psi \to \varphi$
- TI $p \to (q \to q)$, $p \to q \vee \neg q$

Powody wprowadzania logik dewiacyjnych

Lista przykładowych tez i reguł inferencji logiki klasycznej, które często poddawano w wątpliwość:

- DP $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ lub $\varphi \vdash \psi \rightarrow \varphi$
- TI $p \rightarrow (q \rightarrow q)$, $p \rightarrow q \vee \neg q$ lub $\varphi \rightarrow \top$

Powody wprowadzania logik dewiacyjnych

Lista przykładowych tez i reguł inferencji logiki klasycznej, które często poddawano w wątpliwość:

- DP $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ lub $\varphi \vdash \psi \rightarrow \varphi$
- TI $p \rightarrow (q \rightarrow q)$, $p \rightarrow q \vee \neg q$ lub $\varphi \rightarrow \top$
- OP $\varphi \rightarrow \psi \vdash \varphi \wedge \chi \rightarrow \psi$

Powody wprowadzania logik dewiacyjnych

Lista przykładowych tez i reguł inferencji logiki klasycznej, które często poddawano w wątpliwość:

- DP $p \to (q \to p)$ lub $\varphi \vdash \psi \to \varphi$
- TI $p \to (q \to q)$, $p \to q \vee \neg q$ lub $\varphi \to \top$
- OP $\varphi \to \psi \vdash \varphi \wedge \chi \to \psi$
- TR $\varphi \to \psi \vdash \neg\psi \to \neg\varphi$

Powody wprowadzania logik dewiacyjnych

Lista przykładowych tez i reguł inferencji logiki klasycznej, które często poddawano w wątpliwość:

- DP $p \to (q \to p)$ lub $\varphi \vdash \psi \to \varphi$
- TI $p \to (q \to q)$, $p \to q \vee \neg q$ lub $\varphi \to \top$
- OP $\varphi \to \psi \vdash \varphi \wedge \chi \to \psi$
- TR $\varphi \to \psi \vdash \neg\psi \to \neg\varphi$
- SH $\varphi \to \psi, \psi \to \chi \vdash \varphi \to \chi$

Powody wprowadzania logik dewiacyjnych

Lista przykładowych tez i reguł inferencji logiki klasycznej, które często poddawano w wątpliwość:

- DP $p \to (q \to p)$ lub $\varphi \vdash \psi \to \varphi$
- TI $p \to (q \to q)$, $p \to q \vee \neg q$ lub $\varphi \to \top$
- OP $\varphi \to \psi \vdash \varphi \wedge \chi \to \psi$
- TR $\varphi \to \psi \vdash \neg\psi \to \neg\varphi$
- SH $\varphi \to \psi, \psi \to \chi \vdash \varphi \to \chi$
- SDNW jeżeli $\Gamma, \neg\varphi \vdash \bot$, to $\Gamma \vdash \varphi$

Powody wprowadzania logik dewiacyjnych

Lista przykładowych tez i reguł inferencji logiki klasycznej, które często poddawano w wątpliwość:

- DP $p \to (q \to p)$ lub $\varphi \vdash \psi \to \varphi$
- TI $p \to (q \to q)$, $p \to q \vee \neg q$ lub $\varphi \to \top$
- OP $\varphi \to \psi \vdash \varphi \wedge \chi \to \psi$
- TR $\varphi \to \psi \vdash \neg\psi \to \neg\varphi$
- SH $\varphi \to \psi, \psi \to \chi \vdash \varphi \to \chi$
- SDNW jeżeli $\Gamma, \neg\varphi \vdash \bot$, to $\Gamma \vdash \varphi$
- EU $\varphi(a) \to \exists x \varphi(x)$

Powody wprowadzania logik dewiacyjnych

Lista przykładowych tez i reguł inferencji logiki klasycznej, które często poddawano w wątpliwość:

- DP $p \to (q \to p)$ lub $\varphi \vdash \psi \to \varphi$
- TI $p \to (q \to q)$, $p \to q \lor \neg q$ lub $\varphi \to \top$
- OP $\varphi \to \psi \vdash \varphi \land \chi \to \psi$
- TR $\varphi \to \psi \vdash \neg\psi \to \neg\varphi$
- SH $\varphi \to \psi, \psi \to \chi \vdash \varphi \to \chi$
- SDNW jeżeli $\Gamma, \neg\varphi \vdash \bot$, to $\Gamma \vdash \varphi$
- EU $\varphi(a) \to \exists x \varphi(x)$
- DM $\neg\exists x \neg\varphi \to \forall x \varphi$

Powody wprowadzania logik dewiacyjnych

Należy podkreślić, że występowanie tych tez czy reguł, to jedynie symptom poważniejszch trudności, które wiążą się z:

Powody wprowadzania logik dewiacyjnych

Należy podkreślić, że występowanie tych tez czy reguł, to jedynie symptom poważniejszch trudności, które wiążą się z:

- sposobem definiowania konkretnych stałych logicznych (np. logiki implikacji nieklasycznych)

Powody wprowadzania logik dewiacyjnych

Należy podkreślić, że występowanie tych tez czy reguł, to jedynie symptom poważniejszch trudności, które wiążą się z:

- sposobem definiowania konkretnych stałych logicznych (np. logiki implikacji nieklasycznych)
- bądź nawet całej semantyki (np. logiki wielowartościowe)

Powody wprowadzania logik dewiacyjnych

Należy podkreślić, że występowanie tych tez czy reguł, to jedynie symptom poważniejszch trudności, które wiążą się z:

- sposobem definiowania konkretnych stałych logicznych (np. logiki implikacji nieklasycznych)
- bądź nawet całej semantyki (np. logiki wielowartościowe)
- lub pojmowania relacji wynikania czy innych relacji logicznych, np. sprzeczności (np. logiki niemonotoniczne, parakonsystentne)

Kłopotliwe własności logiki klasycznej

Podstawowe cechy generujące logiki nieklasyczne:

Kłopotliwe własności logiki klasycznej

Podstawowe cechy generujące logiki nieklasyczne:

- formalna – logika nieformalna, teoria argumentacji, nowa retoryka (Perelmann), critical thinking – raczej pewne tendencje nauczania niż systemy

Kłopotliwe własności logiki klasycznej

Podstawowe cechy generujące logiki nieklasyczne:

- formalna – logika nieformalna, teoria argumentacji, nowa retoryka (Perelmann), critical thinking – raczej pewne tendencje nauczania niż systemy
- dedukcyjna – logika indukcji (Carnap), wnioskowania probabilistyczne, l. niemonotoniczne

Kłopotliwe własności logiki klasycznej

Podstawowe cechy generujące logiki nieklasyczne:

- formalna – logika nieformalna, teoria argumentacji, nowa retoryka (Perelmann), critical thinking – raczej pewne tendencje nauczania niż systemy
- dedukcyjna – logika indukcji (Carnap), wnioskowania probabilistyczne, l. niemonotoniczne
- 2-wartościowa – l. wielowartościowe (odrzucenie samej zasady 2-wartościowoáci), l. intuicjonistyczna i l. pośrednie, l. parakonsystentne (odrzucenie tez będących wyrazem zas. 2-wartościowości: EM lub NSP)

Kłopotliwe własności logiki klasycznej

Podstawowe cechy generujące logiki nieklasyczne:

- formalna – logika nieformalna, teoria argumentacji, nowa retoryka (Perelmann), critical thinking – raczej pewne tendencje nauczania niż systemy
- dedukcyjna – logika indukcji (Carnap), wnioskowania probabilistyczne, l. niemonotoniczne
- 2-wartościowa – l. wielowartościowe (odrzucenie samej zasady 2-wartościowoáci), l. intuicjonistyczna i l. pośrednie, l. parakonsystentne (odrzucenie tez będących wyrazem zas. 2-wartościowości: EM lub NSP)
- asertoryczna – lokalne poszerzenia: l. erotetyczne, l. norm, l. rozkazów, l. życzeń; globalne poszerzenia: logiki czynności mowy: Austin, Searle, Vanderveken, Nowak

Kłopotliwe własności logiki klasycznej

Podstawowe cechy generujące logiki nieklasyczne:

Kłopotliwe własności logiki klasycznej

Podstawowe cechy generujące logiki nieklasyczne:

- ekstensjonalna – lokalne poszerzenia: l. modalne, l. implikacji (ściłe, silne, relewantne, entailment, analityczne, conditionals); globalne poszerzenia: logika intensjonalna ogólna (Church, Montague, Fitting)

Kłopotliwe własności logiki klasycznej

Podstawowe cechy generujące logiki nieklasyczne:

- ekstensjonalna – lokalne poszerzenia: l. modalne, l. implikacji (ścisłe, silne, relewantne, entailment, analityczne, conditionals); globalne poszerzenia: logika intensjonalna ogólna (Church, Montague, Fitting)
- aczasowa – logiki tensalne i temporalne (Reichenbach, Prior)

Kłopotliwe własności logiki klasycznej

Podstawowe cechy generujące logiki nieklasyczne:

- ekstensjonalna – lokalne poszerzenia: l. modalne, l. implikacji (ścisłe, silne, relewantne, entailment, analityczne, conditionals); globalne poszerzenia: logika intensjonalna ogólna (Church, Montague, Fitting)
- aczasowa – logiki tensalne i temporalne (Reichenbach, Prior)
- uniwersalna – logiki lokalne: l. kwantowa, l. algorytmiczna (Salwicki), l. kategorialne

Kłopotliwe własności logiki klasycznej

Podstawowe cechy generujące logiki nieklasyczne:

- ekstensjonalna – lokalne poszerzenia: l. modalne, l. implikacji (ścisłe, silne, relewantne, entailment, analityczne, conditionals); globalne poszerzenia: logika intensjonalna ogólna (Church, Montague, Fitting)
- aczasowa – logiki tensalne i temporalne (Reichenbach, Prior)
- uniwersalna – logiki lokalne: l. kwantowa, l. algorytmiczna (Salwicki), l. kategorialne
- niekonstruktywna – intuicjonizm, logika modalna GL (dowiedlność arytmetyczna), logiki dowodów (Artemov, Fitting), logika linearna Girarda

Kłopotliwe własności logiki klasycznej

Podstawowe cechy generujące logiki nieklasyczne:

Kłopotliwe własności logiki klasycznej

Podstawowe cechy generujące logiki nieklasyczne:

- 1-go rzędu – l. wyższych rzędów, teorie typów (Russell/Whitehead, Chwistek, Montague)

Kłopotliwe własności logiki klasycznej

Podstawowe cechy generujące logiki nieklasyczne:

- 1-go rzędu – l. wyższych rzędów, teorie typów (Russell/Whitehead, Chwistek, Montague)
- wąskie rozumienie nazw (struktura predykatowa) – rachunki nazw, mereologia (Leśniewski)

Kłopotliwe własności logiki klasycznej

Podstawowe cechy generujące logiki nieklasyczne:

- 1-go rzędu – l. wyższych rzędów, teorie typów (Russell/Whitehead, Chwistek, Montague)
- wąskie rozumienie nazw (struktura predykatowa) – rachunki nazw, mereologia (Leśniewski)
- egzystencjalna (brak nazw pustych) – logiki wolne

Kłopotliwe własności logiki klasycznej

Podstawowe cechy generujące logiki nieklasyczne:

- 1-go rzędu – l. wyższych rzędów, teorie typów (Russell/Whitehead, Chwistek, Montague)
- wąskie rozumienie nazw (struktura predykatowa) – rachunki nazw, mereologia (Leśniewski)
- egzystencjalna (brak nazw pustych) – logiki wolne
- realistyczna (niepusta dziedzina) – logiki inkluzywne

Kłopotliwe własności logiki klasycznej

Podstawowe cechy generujące logiki nieklasyczne:

- 1-go rzędu – l. wyższych rzędów, teorie typów (Russell/Whitehead, Chwistek, Montague)
- wąskie rozumienie nazw (struktura predykatowa) – rachunki nazw, mereologia (Leśniewski)
- egzystencjalna (brak nazw pustych) – logiki wolne
- realistyczna (niepusta dziedzina) – logiki inkluzywne
- terminy jasne i wyraźne – logiki rozmyte (Pawlak – rough sets, Zadeh – fuzzy logics)

Kłopotliwe własności logiki klasycznej

Podstawowe cechy generujące logiki nieklasyczne:

- 1-go rzędu – l. wyższych rzędów, teorie typów (Russell/Whitehead, Chwistek, Montague)
- wąskie rozumienie nazw (struktura predykatowa) – rachunki nazw, mereologia (Leśniewski)
- egzystencjalna (brak nazw pustych) – logiki wolne
- realistyczna (niepusta dziedzina) – logiki inkluzywne
- terminy jasne i wyraźne – logiki rozmyte (Pawlak – rough sets, Zadeh – fuzzy logics)
- oparta na Tarskiego koncepcji wynikania – logiki podstrukturalne (intuicjonizm, relewantne, BCK-logiki), logiki niemonotoniczne, l. Q-inferencji (Malinowski)

Klasyczna koncepcja wynikania

Tarski (1928)

Własności operacji konsekwencji $Cn : \mathcal{P}(FOR) \longrightarrow \mathcal{P}(FOR)$:

Klasyczna koncepcja wynikania

Tarski (1928)

Własności operacji konsekwencji $Cn : \mathcal{P}(FOR) \longrightarrow \mathcal{P}(FOR)$:

- (ZWR) $\Gamma \subseteq Cn(\Gamma)$

Klasyczna koncepcja wynikania

Tarski (1928)

Własności operacji konsekwencji $Cn : \mathcal{P}(FOR) \longrightarrow \mathcal{P}(FOR)$:

- (ZWR) $\Gamma \subseteq Cn(\Gamma)$
- (MON) $\Gamma \subseteq \Delta \rightarrow Cn(\Gamma) \subseteq Cn(\Delta)$

Klasyczna koncepcja wynikania

Tarski (1928)

Własności operacji konsekwencji $Cn : \mathcal{P}(FOR) \longrightarrow \mathcal{P}(FOR)$:

- (ZWR) $\Gamma \subseteq Cn(\Gamma)$
- (MON) $\Gamma \subseteq \Delta \rightarrow Cn(\Gamma) \subseteq Cn(\Delta)$
- (TR) $CnCn(\Gamma) \subseteq Cn(\Gamma)$

Klasyczna koncepcja wynikania

Tarski (1928)

Własności operacji konsekwencji $Cn : \mathcal{P}(FOR) \longrightarrow \mathcal{P}(FOR)$:

- (ZWR) $\Gamma \subseteq Cn(\Gamma)$
- (MON) $\Gamma \subseteq \Delta \rightarrow Cn(\Gamma) \subseteq Cn(\Delta)$
- (TR) $CnCn(\Gamma) \subseteq Cn(\Gamma)$

lub (poprzez $\varphi \in Cn(\Gamma)$ wtw $\Gamma \models \varphi$)

Klasyczna koncepcja wynikania

Tarski (1928)

Własności operacji konsekwencji $Cn : \mathcal{P}(FOR) \longrightarrow \mathcal{P}(FOR)$:

- (ZWR) $\Gamma \subseteq Cn(\Gamma)$
- (MON) $\Gamma \subseteq \Delta \rightarrow Cn(\Gamma) \subseteq Cn(\Delta)$
- (TR) $CnCn(\Gamma) \subseteq Cn(\Gamma)$

lub (poprzez $\varphi \in Cn(\Gamma)$ wtw $\Gamma \models \varphi$)

Własności relacji wynikania $\models \subseteq \mathcal{P}(FOR) \times FOR$:

Klasyczna koncepcja wynikania

Tarski (1928)

Własności operacji konsekwencji $Cn : \mathcal{P}(FOR) \longrightarrow \mathcal{P}(FOR)$:

- (ZWR) $\Gamma \subseteq Cn(\Gamma)$
- (MON) $\Gamma \subseteq \Delta \rightarrow Cn(\Gamma) \subseteq Cn(\Delta)$
- (TR) $CnCn(\Gamma) \subseteq Cn(\Gamma)$

lub (poprzez $\varphi \in Cn(\Gamma)$ wtw $\Gamma \models \varphi$)

Własności relacji wynikania $\models \subseteq \mathcal{P}(FOR) \times FOR$:

- (ZWR) $\varphi \models \varphi$

Klasyczna koncepcja wynikania

Tarski (1928)

Własności operacji konsekwencji $Cn : \mathcal{P}(FOR) \longrightarrow \mathcal{P}(FOR)$:

- (ZWR) $\Gamma \subseteq Cn(\Gamma)$
- (MON) $\Gamma \subseteq \Delta \to Cn(\Gamma) \subseteq Cn(\Delta)$
- (TR) $CnCn(\Gamma) \subseteq Cn(\Gamma)$

lub (poprzez $\varphi \in Cn(\Gamma)$ wtw $\Gamma \models \varphi$)

Własności relacji wynikania $\models \subseteq \mathcal{P}(FOR) \times FOR$:

- (ZWR) $\varphi \models \varphi$
- (MON) $\Gamma \models \varphi \to \Gamma, \psi \models \varphi$

Klasyczna koncepcja wynikania

Tarski (1928)

Własności operacji konsekwencji $Cn : \mathcal{P}(FOR) \longrightarrow \mathcal{P}(FOR)$:

- (ZWR) $\Gamma \subseteq Cn(\Gamma)$
- (MON) $\Gamma \subseteq \Delta \rightarrow Cn(\Gamma) \subseteq Cn(\Delta)$
- (TR) $CnCn(\Gamma) \subseteq Cn(\Gamma)$

lub (poprzez $\varphi \in Cn(\Gamma)$ wtw $\Gamma \models \varphi$)

Własności relacji wynikania $\models \subseteq \mathcal{P}(FOR) \times FOR$:

- (ZWR) $\varphi \models \varphi$
- (MON) $\Gamma \models \varphi \rightarrow \Gamma, \psi \models \varphi$
- (TR) $\Gamma \models \varphi \;\&\; \varphi, \Gamma \models \psi \rightarrow \Gamma \models \psi$

LOGIKI MODALNE – WSTĘP

Trzy tradycje w badaniach nad modalnościami:

LOGIKI MODALNE – WSTĘP

Trzy tradycje w badaniach nad modalnościami:

- językoznawstwo: m. jako fenomen językowy, wskaźnik postawy nadawcy komunikatu wobec jego treści i odbiorcy

LOGIKI MODALNE – WSTĘP

Trzy tradycje w badaniach nad modalnościami:

- językoznawstwo: m. jako fenomen językowy, wskaźnik postawy nadawcy komunikatu wobec jego treści i odbiorcy
- filozoficzna: m. jako fenomen pojęciowy, kwalifikacja m.in. cech (istotne/akcydentalne), sposobów istnienia, bytów, zdarzeń i związków między nimi

LOGIKI MODALNE – WSTĘP

Trzy tradycje w badaniach nad modalnościami:

- językoznawstwo: m. jako fenomen językowy, wskaźnik postawy nadawcy komunikatu wobec jego treści i odbiorcy
- filozoficzna: m. jako fenomen pojęciowy, kwalifikacja m.in. cech (istotne/akcydentalne), sposobów istnienia, bytów, zdarzeń i związków między nimi
- logiczna: m. jako kwalifikacje prawdziwości zdań, sposobów (trybów) orzekania

LOGIKI MODALNE – WSTĘP

Różne znaczenia i rodzaje modalności:

LOGIKI MODALNE – WSTĘP

Różne znaczenia i rodzaje modalności:

1. Modalności w sensie wąskim – m. aletyczne (konieczność, możliwość, przygodność)

LOGIKI MODALNE – WSTĘP

Różne znaczenia i rodzaje modalności:

1. Modalności w sensie wąskim – m. aletyczne (konieczność, możliwość, przygodność)
2. Modalności w sensie szerokim:

LOGIKI MODALNE – WSTĘP

Różne znaczenia i rodzaje modalności:

1. Modalności w sensie wąskim – m. aletyczne (konieczność, możliwość, przygodność)
2. Modalności w sensie szerokim:
   - deontyczne (powinność, zakaz)

LOGIKI MODALNE – WSTĘP

Różne znaczenia i rodzaje modalności:

1. Modalności w sensie wąskim – m. aletyczne (konieczność, możliwość, przygodność)
2. Modalności w sensie szerokim:
   - deontyczne (powinność, zakaz)
   - epistemiczne (wiedza, wiara)

LOGIKI MODALNE – WSTĘP

Różne znaczenia i rodzaje modalności:

1. Modalności w sensie wąskim – m. aletyczne (konieczność, możliwość, przygodność)
2. Modalności w sensie szerokim:
   - deontyczne (powinność, zakaz)
   - epistemiczne (wiedza, wiara)
   - doksastyczne (mniemanie, wrażenie)

LOGIKI MODALNE – WSTĘP

Różne znaczenia i rodzaje modalności:

1. Modalności w sensie wąskim – m. aletyczne (konieczność, możliwość, przygodność)
2. Modalności w sensie szerokim:
   - deontyczne (powinność, zakaz)
   - epistemiczne (wiedza, wiara)
   - doksastyczne (mniemanie, wrażenie)
   - temporalne

LOGIKI MODALNE – WSTĘP

Wieloznaczność m. aletycznych:

LOGIKI MODALNE – WSTĘP

Wieloznaczność m. aletycznych:

- logiczna konieczność/możliwość

LOGIKI MODALNE – WSTĘP

Wieloznaczność m. aletycznych:

- logiczna konieczność/możliwość
- metafizyczna konieczność/możliwość

LOGIKI MODALNE – WSTĘP

Wieloznaczność m. aletycznych:

- logiczna konieczność/możliwość
- metafizyczna konieczność/możliwość
- nomologiczna konieczność/możliwość

LOGIKI MODALNE – WSTĘP

Wybrane (zdaniotwórcze) funktory modalne i ich popularne oznaczenia:

LOGIKI MODALNE – WSTĘP

Wybrane (zdaniotwórcze) funktory modalne i ich popularne oznaczenia:

- konieczne, że φ – $\Box\varphi$, $L\varphi$
- możliwe, że φ – $\Diamond\varphi$, $M\varphi$

LOGIKI MODALNE – WSTĘP

Wybrane (zdaniotwórcze) funktory modalne i ich popularne oznaczenia:

- konieczne, że φ – $\Box\varphi$, $L\varphi$
- możliwe, że φ – $\Diamond\varphi$, $M\varphi$
- powinno być tak, że φ – $O\varphi$
- φ jest dopuszczalne – $P\varphi$
- φ jest zakazane – $F\varphi$

LOGIKI MODALNE – WSTĘP

Wybrane (zdaniotwórcze) funktory modalne i ich popularne oznaczenia:

- konieczne, że φ – $\Box\varphi$, $L\varphi$
- możliwe, że φ – $\Diamond\varphi$, $M\varphi$
- powinno być tak, że φ – $O\varphi$
- φ jest dopuszczalne – $P\varphi$
- φ jest zakazane – $F\varphi$
- φ jest znane – $K\varphi$
- a wie, że φ – $K_a\varphi$

LOGIKI MODALNE – WSTĘP

Wybrane (zdaniotwórcze) funktory modalne i ich popularne oznaczenia:

- konieczne, że φ – $\Box\varphi$, $L\varphi$
- możliwe, że φ – $\Diamond\varphi$, $M\varphi$
- powinno być tak, że φ – $O\varphi$
- φ jest dopuszczalne – $P\varphi$
- φ jest zakazane – $F\varphi$
- φ jest znane – $K\varphi$
- a wie, że φ – $K_a\varphi$
- wierzy się, że φ – $B\varphi$
- a wierzy, że φ – $B_a\varphi$

LOGIKI MODALNE – WSTĘP

Wybrane (zdaniotwórcze) funktory modalne i ich popularne oznaczenia:

LOGIKI MODALNE – WSTĘP

Wybrane (zdaniotwórcze) funktory modalne i ich popularne oznaczenia:

- zawsze w przyszłości φ – $G\varphi, \Box^F\varphi, [F]\varphi$
- kiedyś w przyszłości φ – $F\varphi, \Diamond^F\varphi, \langle F\rangle\varphi$

LOGIKI MODALNE – WSTĘP

Wybrane (zdaniotwórcze) funktory modalne i ich popularne oznaczenia:

- zawsze w przyszłości φ – $G\varphi, \Box^F\varphi, [F]\varphi$
- kiedyś w przyszłości φ – $F\varphi, \Diamond^F\varphi, \langle F\rangle\varphi$
- zawsze w przeszłości φ – $H\varphi, \Box^P\varphi, [P]\varphi$
- kiedyś w przeszłości φ – $P\varphi, \Diamond^P\varphi, \langle P\rangle\varphi$

LOGIKI MODALNE – WSTĘP

Wybrane (zdaniotwórcze) funktory modalne i ich popularne oznaczenia:

- zawsze w przyszłości φ – $G\varphi, \Box^F\varphi, [F]\varphi$
- kiedyś w przyszłości φ – $F\varphi, \Diamond^F\varphi, \langle F\rangle\varphi$
- zawsze w przeszłości φ – $H\varphi, \Box^P\varphi, [P]\varphi$
- kiedyś w przeszłości φ – $P\varphi, \Diamond^P\varphi, \langle P\rangle\varphi$
- φ zachodzi od czasu ψ – $S(\psi, \varphi)$
- φ zachodzić będzie do czasu ψ – $U(\psi, \varphi)$

LOGIKI MODALNE – WSTĘP

Historia

LOGIKI MODALNE – WSTĘP

Historia

1. Arystoteles – sylogistyka zdań modalnych

LOGIKI MODALNE – WSTĘP

Historia

1. Arystoteles – sylogistyka zdań modalnych
2. Diodor Kronos – temporalne ujęcie modalności

LOGIKI MODALNE – WSTĘP

Historia

1. Arystoteles – sylogistyka zdań modalnych
2. Diodor Kronos – temporalne ujęcie modalności
3. Leibniz – koncepcja możliwych światów

LOGIKI MODALNE – WSTĘP

Historia

1. Arystoteles – sylogistyka zdań modalnych
2. Diodor Kronos – temporalne ujęcie modalności
3. Leibniz – koncepcja możliwych światów
4. Łukasiewicz – modalności w logice wielowartościowej

LOGIKI MODALNE – WSTĘP

Historia

1. Arystoteles – sylogistyka zdań modalnych
2. Diodor Kronos – temporalne ujęcie modalności
3. Leibniz – koncepcja możliwych światów
4. Łukasiewicz – modalności w logice wielowartościowej
5. Lewis/Langford – implikacja ścisła

LOGIKI MODALNE – WSTĘP

Historia

1. Arystoteles – sylogistyka zdań modalnych
2. Diodor Kronos – temporalne ujęcie modalności
3. Leibniz – koncepcja możliwych światów
4. Łukasiewicz – modalności w logice wielowartościowej
5. Lewis/Langford – implikacja ścisła
6. Goedel – nowoczesna formalizacja modalności

LOGIKI MODALNE – WSTĘP

Historia

1. Arystoteles – sylogistyka zdań modalnych
2. Diodor Kronos – temporalne ujęcie modalności
3. Leibniz – koncepcja możliwych światów
4. Łukasiewicz – modalności w logice wielowartościowej
5. Lewis/Langford – implikacja ścisła
6. Goedel – nowoczesna formalizacja modalności
7. Kripke – semantyka relacyjna

LOGIKI MODALNE – WSTĘP

Klasyczny podział sądów modalnych:

LOGIKI MODALNE – WSTĘP

Klasyczny podział sądów modalnych:

- wg. formy: apodyktyczne, asertoryczne, problematyczne (podział syntaktyczny)

LOGIKI MODALNE – WSTĘP

Klasyczny podział sądów modalnych:

- wg. formy: apodyktyczne, asertoryczne, problematyczne (podział syntaktyczny)
- wg. mocy: konieczne, przygodne (podział metafizyczny)

LOGIKI MODALNE – WSTĘP

Klasyczny podział sądów modalnych:

- wg. formy: apodyktyczne, asertoryczne, problematyczne (podział syntaktyczny)
- wg. mocy: konieczne, przygodne (podział metafizyczny)

Pokrewne dystynkcje (często utożsamiane):

LOGIKI MODALNE – WSTĘP

Klasyczny podział sądów modalnych:

- wg. formy: apodyktyczne, asertoryczne, problematyczne (podział syntaktyczny)
- wg. mocy: konieczne, przygodne (podział metafizyczny)

Pokrewne dystynkcje (często utożsamiane):

- a priori/a posteriori (podział epistemologiczny)

LOGIKI MODALNE – WSTĘP

Klasyczny podział sądów modalnych:

- wg. formy: apodyktyczne, asertoryczne, problematyczne (podział syntaktyczny)
- wg. mocy: konieczne, przygodne (podział metafizyczny)

Pokrewne dystynkcje (często utożsamiane):

- a priori/a posteriori (podział epistemologiczny)
- analityczne/syntetyczne (podział semantyczny)

LOGIKI MODALNE – WSTĘP

Klasyczny podział sądów modalnych:

- wg. formy: apodyktyczne, asertoryczne, problematyczne (podział syntaktyczny)
- wg. mocy: konieczne, przygodne (podział metafizyczny)

Pokrewne dystynkcje (często utożsamiane):

- a priori/a posteriori (podział epistemologiczny)
- analityczne/syntetyczne (podział semantyczny)

φ jest zdaniem analitycznym $:= \Box\varphi \lor \Box\neg\varphi$
φ jest zdaniem syntetycznym $:= \Diamond\varphi \land \Diamond\neg\varphi$

Wieloznaczność pojęcia przygodności
(to co niekonieczne, to co możliwe, to co możliwe ale niekonieczne, to co jest ale niekoniecznie):

LOGIKI MODALNE – WSTĘP

Wieloznaczność pojęcia przygodności
(to co niekonieczne, to co możliwe, to co możliwe ale niekonieczne, to co jest ale niekoniecznie):

1. φ jest zdaniem przygodnym $:= \neg\Box\varphi$

LOGIKI MODALNE – WSTĘP

Wieloznaczność pojęcia przygodności
(to co niekonieczne, to co możliwe, to co możliwe ale niekonieczne, to co jest ale niekoniecznie):

1. φ jest zdaniem przygodnym $:= \neg\Box\varphi$
2. φ jest zdaniem przygodnym $:= \Diamond\varphi$

LOGIKI MODALNE – WSTĘP

Wieloznaczność pojęcia przygodności
(to co niekonieczne, to co możliwe, to co możliwe ale niekonieczne, to co jest ale niekoniecznie):

1. φ jest zdaniem przygodnym $:= \neg\Box\varphi$
2. φ jest zdaniem przygodnym $:= \Diamond\varphi$
3. φ jest zdaniem przygodnym $:= \Diamond\varphi \wedge \neg\Box\varphi$

LOGIKI MODALNE – WSTĘP

Wieloznaczność pojęcia przygodności
(to co niekonieczne, to co możliwe, to co możliwe ale niekonieczne, to co jest ale niekoniecznie):

1. φ jest zdaniem przygodnym $:= \neg\Box\varphi$
2. φ jest zdaniem przygodnym $:= \Diamond\varphi$
3. φ jest zdaniem przygodnym $:= \Diamond\varphi \wedge \neg\Box\varphi$
4. φ jest zdaniem przygodnym $:= \varphi \wedge \neg\Box\varphi$

LOGIKI MODALNE – WSTĘP

Wieloznaczność pojęcia przygodności
(to co niekonieczne, to co możliwe, to co możliwe ale niekonieczne, to co jest ale niekoniecznie):

1. φ jest zdaniem przygodnym $:= \neg\Box\varphi$
2. φ jest zdaniem przygodnym $:= \Diamond\varphi$
3. φ jest zdaniem przygodnym $:= \Diamond\varphi \land \neg\Box\varphi$
4. φ jest zdaniem przygodnym $:= \varphi \land \neg\Box\varphi$

1. najpopularniejsze w filozofii,

LOGIKI MODALNE – WSTĘP

Wieloznaczność pojęcia przygodności (to co niekonieczne, to co możliwe, to co możliwe ale niekonieczne, to co jest ale niekoniecznie):

1. φ jest zdaniem przygodnym $:= \neg\Box\varphi$
2. φ jest zdaniem przygodnym $:= \Diamond\varphi$
3. φ jest zdaniem przygodnym $:= \Diamond\varphi \wedge \neg\Box\varphi$
4. φ jest zdaniem przygodnym $:= \varphi \wedge \neg\Box\varphi$

1. najpopularniejsze w filozofii,
2. – błąd Arystotelesa,

LOGIKI MODALNE – WSTĘP

Wieloznaczność pojęcia przygodności
(to co niekonieczne, to co możliwe, to co możliwe ale niekonieczne, to co jest ale niekoniecznie):

1. φ jest zdaniem przygodnym $:= \neg\Box\varphi$
2. φ jest zdaniem przygodnym $:= \Diamond\varphi$
3. φ jest zdaniem przygodnym $:= \Diamond\varphi \wedge \neg\Box\varphi$
4. φ jest zdaniem przygodnym $:= \varphi \wedge \neg\Box\varphi$

1. najpopularniejsze w filozofii,
2. – błąd Arystotelesa,
3. – obustronna możliwość = zdanie syntetyczne

LOGIKI MODALNE – WSTĘP

Minimalne warunki dla modalności aletycznych:

LOGIKI MODALNE – WSTĘP

Minimalne warunki dla modalności aletycznych:

pozytywne:

LOGIKI MODALNE – WSTĘP

Minimalne warunki dla modalności aletycznych:

pozytywne:

1. wzajemna definiowalność $\Diamond$ i $\Box$:

LOGIKI MODALNE – WSTĘP

Minimalne warunki dla modalności aletycznych:

pozytywne:

1. wzajemna definiowalność $\Diamond$ i $\Box$: $\Diamond\varphi \leftrightarrow \neg\Box\neg\varphi$; $\Box\varphi \leftrightarrow \neg\Diamond\neg\varphi$

LOGIKI MODALNE – WSTĘP

Minimalne warunki dla modalności aletycznych:

pozytywne:

1. wzajemna definiowalność $\Diamond$ i $\Box$: $\Diamond\varphi \leftrightarrow \neg\Box\neg\varphi$; $\Box\varphi \leftrightarrow \neg\Diamond\neg\varphi$
2. T $\Box\varphi \rightarrow \varphi$; $\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$

LOGIKI MODALNE – WSTĘP

Minimalne warunki dla modalności aletycznych:

pozytywne:

1. wzajemna definiowalność $\Diamond$ i $\Box$: $\Diamond\varphi \leftrightarrow \neg\Box\neg\varphi$; $\quad \Box\varphi \leftrightarrow \neg\Diamond\neg\varphi$
2. T $\Box\varphi \rightarrow \varphi$; $\quad \varphi \rightarrow \Diamond\varphi$
3. D $\Box\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$ – konsekwencja T

LOGIKI MODALNE – WSTĘP

Minimalne warunki dla modalności aletycznych:

pozytywne:

1. wzajemna definiowalność $\Diamond$ i $\Box$: $\Diamond\varphi \leftrightarrow \neg\Box\neg\varphi$; $\quad \Box\varphi \leftrightarrow \neg\Diamond\neg\varphi$
2. T $\Box\varphi \rightarrow \varphi$; $\quad \varphi \rightarrow \Diamond\varphi$
3. D $\Box\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$ – konsekwencja T
4. zmodalizowane MP $\Box(\varphi \rightarrow \psi) \wedge \Box\varphi \rightarrow \Box\psi$

LOGIKI MODALNE – WSTĘP

Minimalne warunki dla modalności aletycznych:

pozytywne:

1. wzajemna definiowalność $\Diamond$ i $\Box$: $\Diamond\varphi \leftrightarrow \neg\Box\neg\varphi$; $\quad \Box\varphi \leftrightarrow \neg\Diamond\neg\varphi$
2. T $\Box\varphi \to \varphi$; $\quad \varphi \to \Diamond\varphi$
3. D $\Box\varphi \to \Diamond\varphi$ – konsekwencja T
4. zmodalizowane MP $\Box(\varphi \to \psi) \wedge \Box\varphi \to \Box\psi$
   lub K $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$

LOGIKI MODALNE – WSTĘP

Minimalne warunki dla modalności aletycznych:

pozytywne:

1. wzajemna definiowalność $\Diamond$ i $\Box$: $\Diamond\varphi \leftrightarrow \neg\Box\neg\varphi$; $\Box\varphi \leftrightarrow \neg\Diamond\neg\varphi$
2. T $\Box\varphi \to \varphi$; $\varphi \to \Diamond\varphi$
3. D $\Box\varphi \to \Diamond\varphi$ – konsekwencja T
4. zmodalizowane MP $\Box(\varphi \to \psi) \wedge \Box\varphi \to \Box\psi$
   lub K $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$
5. RG $\vdash \varphi$ / $\vdash \Box\varphi$; $\vdash \Diamond\varphi$ / $\vdash \varphi$

LOGIKI MODALNE – WSTĘP

Minimalne warunki dla modalności aletycznych:

negatywne:

LOGIKI MODALNE – WSTĘP

Minimalne warunki dla modalności aletycznych:

negatywne:

1. $\nvdash p \rightarrow \Box p$; $\nvdash \Diamond p \rightarrow p$

LOGIKI MODALNE – WSTĘP

Minimalne warunki dla modalności aletycznych:

negatywne:

1. $\nvdash p \rightarrow \Box p$; $\nvdash \Diamond p \rightarrow p$
2. $\nvdash \Diamond p$; $\nvdash \neg\Box p$

LOGIKI MODALNE – WSTĘP

Minimalne warunki dla modalności aletycznych:

negatywne:

1. $\nvDash p \to \Box p$; $\nvDash \Diamond p \to p$
2. $\nvDash \Diamond p$; $\nvDash \neg\Box p$
3. $\nvDash \Box\varphi \leftrightarrow \neg\varphi$

LOGIKI MODALNE – WSTĘP

Minimalne warunki dla modalności aletycznych:

negatywne:

1. $\nvdash p \to \Box p; \quad \nvdash \Diamond p \to p$
2. $\nvdash \Diamond p; \quad \nvdash \neg\Box p$
3. $\nvdash \Box\varphi \leftrightarrow \neg\varphi$
4. $\nvdash \Box\varphi \leftrightarrow \bot$

LOGIKI MODALNE – WSTĘP

Minimalne warunki dla modalności aletycznych:

negatywne:

1. $\nvdash p \to \Box p$; $\nvdash \Diamond p \to p$
2. $\nvdash \Diamond p$; $\nvdash \neg\Box p$
3. $\nvdash \Box\varphi \leftrightarrow \neg\varphi$
4. $\nvdash \Box\varphi \leftrightarrow \bot$
5. $\nvdash \Box\varphi \leftrightarrow \neg\bot$

LOGIKI MODALNE – SEMANTYKA RELACYJNA

Struktura:

LOGIKI MODALNE – SEMANTYKA RELACYJNA

Struktura:

<u>Strukturą relacyjną</u>, albo <u>ramą</u> (frame) jest dowolna para $\mathfrak{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$ gdzie:

LOGIKI MODALNE – SEMANTYKA RELACYJNA

Struktura:

Strukturą relacyjną, albo ramą (frame) jest dowolna para $\mathfrak{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$ gdzie:

- dziedzina to $\mathcal{W} \neq \varnothing$, który jest zbiorem punktów (światów możliwych);

LOGIKI MODALNE – SEMANTYKA RELACYJNA

Struktura:

Strukturą relacyjną, albo ramą (frame) jest dowolna para $\mathfrak{F} = \langle\, \mathcal{W}, \mathcal{R}\rangle$ gdzie:

- dziedzina to $\mathcal{W} \neq \varnothing$, który jest zbiorem punktów (światów możliwych);
- $\mathcal{R}$ to binarna relacja na $\mathcal{W}$, zwana relacją osiągalności.

LOGIKI MODALNE – SEMANTYKA RELACYJNA

Struktura:

Strukturą relacyjną, albo ramą (frame) jest dowolna para $\mathfrak{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$ gdzie:

- dziedzina to $\mathcal{W} \neq \varnothing$, który jest zbiorem punktów (światów możliwych);
- $\mathcal{R}$ to binarna relacja na $\mathcal{W}$, zwana relacją osiągalności.

W logikach modalnych aletycznych $\mathcal{R}ww'$ oznacza, że w' jest osiągalne z w (możliwe ze względu na w).

LOGIKI MODALNE – SEMANTYKA RELACYJNA

Struktura:

Strukturą relacyjną, albo ramą (frame) jest dowolna para $\mathfrak{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$ gdzie:

- dziedzina to $\mathcal{W} \neq \varnothing$, który jest zbiorem punktów (światów możliwych);
- $\mathcal{R}$ to binarna relacja na $\mathcal{W}$, zwana relacją osiągalności.

W logikach modalnych aletycznych $\mathcal{R}ww'$ oznacza, że w' jest osiągalne z w (możliwe ze względu na w).

Model na strukturze relacyjnej:

LOGIKI MODALNE – SEMANTYKA RELACYJNA

Struktura:

Strukturą relacyjną, albo ramą (frame) jest dowolna para $\mathfrak{F} = \langle\, \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$ gdzie:

- dziedzina to $\mathcal{W} \neq \varnothing$, który jest zbiorem punktów (światów możliwych);
- $\mathcal{R}$ to binarna relacja na $\mathcal{W}$, zwana relacją osiągalności.

W logikach modalnych aletycznych $\mathcal{R}ww'$ oznacza, że w' jest osiągalne z w (możliwe ze względu na w).

Model na strukturze relacyjnej:

Modelem na danej strukturze $\mathfrak{F}$ jest dowolny układ $\mathfrak{M} = \langle\, \mathfrak{F}, V \rangle$, gdzie V jest funkcją ewaluacji dla zmiennych, tj. $V : ZZ \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{W})$.

LOGIKI MODALNE – SEMANTYKA

Definicja *spełniania formuły* φ *w punkcie* w *modelu* $\mathfrak{M}$ ($\mathfrak{M}, w \models \varphi$):

LOGIKI MODALNE – SEMANTYKA

Definicja *spełniania formuły* φ *w punkcie* w *modelu* $\mathfrak{M}$ ($\mathfrak{M}, w \vDash \varphi$):

$\mathfrak{M}, w \vDash \varphi$	wtw	$w \in V(\varphi)$ dla dowolnej $\varphi \in ZZ$
$\mathfrak{M}, w \vDash \neg\varphi$	wtw	$\mathfrak{M}, w \nvDash \varphi$
$\mathfrak{M}, w \vDash \varphi \wedge \psi$	wtw	$\mathfrak{M}, w \vDash \varphi$ i $\mathfrak{M}, w \vDash \psi$
$\mathfrak{M}, w \vDash \varphi \vee \psi$	wtw	$\mathfrak{M}, w \vDash \varphi$ lub $\mathfrak{M}, w \vDash \psi$
$\mathfrak{M}, w \vDash \varphi \rightarrow \psi$	wtw	$\mathfrak{M}, w \nvDash \varphi$ lub $\mathfrak{M}, w \vDash \psi$
$\mathfrak{M}, w \vDash \Box\varphi$	wtw	$\mathfrak{M}, w' \vDash \varphi$ dla dowolnego w' takiego, że $\mathcal{R}ww'$
$\mathfrak{M}, w \vDash \Diamond\varphi$	wtw	$\mathfrak{M}, w' \vDash \varphi$ dla pewnego w' takiego, że $\mathcal{R}ww'$

LOGIKI MODALNE – SEMANTYKA

Ważne pojęcia semantyczne:

- Dla zbiorów formuł zapis $\mathfrak{M}, w \models \Gamma$ oznacza, że $\mathfrak{M}, w \models \psi$ dla $\forall_{\psi \in \Gamma}$.

LOGIKI MODALNE – SEMANTYKA

Ważne pojęcia semantyczne:

- Dla zbiorów formuł zapis $\mathfrak{M}, w \models \Gamma$ oznacza, że $\mathfrak{M}, w \models \psi$ dla $\forall_{\psi \in \Gamma}$.
- $\mathfrak{M}, w \not\models \varphi$ oznacza fałszywość formuły φ w w; $\mathfrak{M}, w \not\models \Gamma$ oznacza fałszywość co najmniej jednego elementu Γ w w.

LOGIKI MODALNE – SEMANTYKA

Ważne pojęcia semantyczne:

- Dla zbiorów formuł zapis $\mathfrak{M}, w \vDash \Gamma$ oznacza, że $\mathfrak{M}, w \vDash \psi$ dla $\forall_{\psi \in \Gamma}$.
- $\mathfrak{M}, w \nvDash \varphi$ oznacza fałszywość formuły φ w w; $\mathfrak{M}, w \nvDash \Gamma$ oznacza fałszywość co najmniej jednego elementu Γ w w.

W przypadku gdy model jest ustalony, bądź domyślny będziemy po prostu pisać $w \vDash \varphi$ (względnie $w \nvDash \varphi$) lub $w \vDash \Gamma$ (względnie $w \nvDash \Gamma$) dla zbioru.

LOGIKI MODALNE – SEMANTYKA

Ważne pojęcia semantyczne:

- Dla zbiorów formuł zapis $\mathfrak{M}, w \models \Gamma$ oznacza, że $\mathfrak{M}, w \models \psi$ dla $\forall_{\psi \in \Gamma}$.
- $\mathfrak{M}, w \not\models \varphi$ oznacza fałszywość formuły φ w w; $\mathfrak{M}, w \not\models \Gamma$ oznacza fałszywość co najmniej jednego elementu Γ w w.

W przypadku gdy model jest ustalony, bądź domyślny będziemy po prostu pisać $w \models \varphi$ (względnie $w \not\models \varphi$) lub $w \models \Gamma$ (względnie $w \not\models \Gamma$) dla zbioru. Zbiór wszystkich punktów spełniających daną formułę (zbiór) oznaczamy:

LOGIKI MODALNE – SEMANTYKA

Ważne pojęcia semantyczne:

- Dla zbiorów formuł zapis $\mathfrak{M}, w \models \Gamma$ oznacza, że $\mathfrak{M}, w \models \psi$ dla $\forall_{\psi \in \Gamma}$.
- $\mathfrak{M}, w \not\models \varphi$ oznacza fałszywość formuły φ w w; $\mathfrak{M}, w \not\models \Gamma$ oznacza fałszywość co najmniej jednego elementu Γ w w.

W przypadku gdy model jest ustalony, bądź domyślny będziemy po prostu pisać $w \models \varphi$ (względnie $w \not\models \varphi$) lub $w \models \Gamma$ (względnie $w \not\models \Gamma$) dla zbioru. Zbiór wszystkich punktów spełniających daną formułę (zbiór) oznaczamy:

- $\|\varphi\|_{\mathfrak{M}} = \{w \in \mathcal{W}_{\mathfrak{M}} : w \models \varphi\}$;

LOGIKI MODALNE – SEMANTYKA

Ważne pojęcia semantyczne:

- Dla zbiorów formuł zapis $\mathfrak{M}, w \vDash \Gamma$ oznacza, że $\mathfrak{M}, w \vDash \psi$ dla $\forall_{\psi \in \Gamma}$.
- $\mathfrak{M}, w \nvDash \varphi$ oznacza fałszywość formuły φ w w; $\mathfrak{M}, w \nvDash \Gamma$ oznacza fałszywość co najmniej jednego elementu Γ w w.

W przypadku gdy model jest ustalony, bądź domyślny będziemy po prostu pisać $w \vDash \varphi$ (względnie $w \nvDash \varphi$) lub $w \vDash \Gamma$ (względnie $w \nvDash \Gamma$) dla zbioru. Zbiór wszystkich punktów spełniających daną formułę (zbiór) oznaczamy:

- $\|\varphi\|_{\mathfrak{M}} = \{w \in \mathcal{W}_{\mathfrak{M}} : w \vDash \varphi\}$;
- $\|\Gamma\|_{\mathfrak{M}} = \bigcap \|\psi\|_{\mathfrak{M}}$ dla $\forall_{\psi \in \Gamma}$

LOGIKI MODALNE – SEMANTYKA

Ważne pojęcia semantyczne:

- Dla zbiorów formuł zapis $\mathfrak{M}, w \vDash \Gamma$ oznacza, że $\mathfrak{M}, w \vDash \psi$ dla $\forall_{\psi \in \Gamma}$.
- $\mathfrak{M}, w \nvDash \varphi$ oznacza fałszywość formuły φ w w; $\mathfrak{M}, w \nvDash \Gamma$ oznacza fałszywość co najmniej jednego elementu Γ w w.

W przypadku gdy model jest ustalony, bądź domyślny będziemy po prostu pisać $w \vDash \varphi$ (względnie $w \nvDash \varphi$) lub $w \vDash \Gamma$ (względnie $w \nvDash \Gamma$) dla zbioru. Zbiór wszystkich punktów spełniających daną formułę (zbiór) oznaczamy:

- $\|\varphi\|_{\mathfrak{M}} = \{w \in \mathcal{W}_{\mathfrak{M}} : w \vDash \varphi\}$;
- $\|\Gamma\|_{\mathfrak{M}} = \bigcap \|\psi\|_{\mathfrak{M}}$ dla $\forall_{\psi \in \Gamma}$

Zazwyczaj używać będziemy notacji skróconej $\|\varphi\|$ ($\|\Gamma\|$) przy $\mathfrak{M}$ domyślnym lub ustalonym.

LOGIKI MODALNE – SEMANTYKA

Ważne pojęcia semantyczne:

- Dla zbiorów formuł zapis $\mathfrak{M}, w \models \Gamma$ oznacza, że $\mathfrak{M}, w \models \psi$ dla $\forall_{\psi \in \Gamma}$.
- $\mathfrak{M}, w \not\models \varphi$ oznacza fałszywość formuły φ w w; $\mathfrak{M}, w \not\models \Gamma$ oznacza fałszywość co najmniej jednego elementu Γ w w.

W przypadku gdy model jest ustalony, bądź domyślny będziemy po prostu pisać $w \models \varphi$ (względnie $w \not\models \varphi$) lub $w \models \Gamma$ (względnie $w \not\models \Gamma$) dla zbioru.
Zbiór wszystkich punktów spełniających daną formułę (zbiór) oznaczamy:

- $\|\varphi\|_{\mathfrak{M}} = \{w \in \mathcal{W}_{\mathfrak{M}} : w \models \varphi\}$;
- $\|\Gamma\|_{\mathfrak{M}} = \bigcap \|\psi\|_{\mathfrak{M}}$ dla $\forall_{\psi \in \Gamma}$

Zazwyczaj używać będziemy notacji skróconej $\|\varphi\|$ ($\|\Gamma\|$) przy $\mathfrak{M}$ domyślnym lub ustalonym.
$\|\varphi\|$ będziemy czytać dla wygody zwyczajowo jako "sąd φ" (intensja φ) w danym $\mathfrak{M}$.

LOGIKI MODALNE – SEMANTYKA

Przykład 1:

Rozważmy strukturę $\mathfrak{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$ gdzie: $\mathcal{W} = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$, a $\mathcal{R} = \{\langle w_1, w_2\rangle, \langle w_1, w_3\rangle, \langle w_2, w_2\rangle, \langle w_3, w_4\rangle, \langle w_4, w_3\rangle\}$. Niech $\mathfrak{M}_1 = \langle \mathfrak{F}, V_1\rangle$, gdzie $V_1(p) = \{w_2, w_3\}$, $V_1(q) = \{w_1, w_4\}$, a $\mathfrak{M}_2 = \langle \mathfrak{F}, V_2\rangle$, gdzie $V_2(p) = \varnothing$, $V_2(q) = \{w_1, w_3, w_4\}$.

LOGIKI MODALNE – SEMANTYKA

Przykład 1:

Rozważmy strukturę $\mathfrak{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}\rangle$ gdzie: $\mathcal{W} = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$, a $\mathcal{R} = \{\langle w_1, w_2\rangle, \langle w_1, w_3\rangle, \langle w_2, w_2\rangle, \langle w_3, w_4\rangle, \langle w_4, w_3\rangle\}$. Niech $\mathfrak{M}_1 = \langle \mathfrak{F}, V_1\rangle$, gdzie $V_1(p) = \{w_2, w_3\}$, $V_1(q) = \{w_1, w_4\}$, a $\mathfrak{M}_2 = \langle \mathfrak{F}, V_2\rangle$, gdzie $V_2(p) = \varnothing$, $V_2(q) = \{w_1, w_3, w_4\}$.

- $\mathfrak{M}_1, w_1 \models \Box p$

LOGIKI MODALNE – SEMANTYKA

Przykład 1:

Rozważmy strukturę $\mathfrak{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$ gdzie: $\mathcal{W} = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$, a $\mathcal{R} = \{\langle w_1, w_2\rangle, \langle w_1, w_3\rangle, \langle w_2, w_2\rangle, \langle w_3, w_4\rangle, \langle w_4, w_3\rangle\}$. Niech $\mathfrak{M}_1 = \langle \mathfrak{F}, V_1\rangle$, gdzie $V_1(p) = \{w_2, w_3\}$, $V_1(q) = \{w_1, w_4\}$, a $\mathfrak{M}_2 = \langle \mathfrak{F}, V_2\rangle$, gdzie $V_2(p) = \varnothing$, $V_2(q) = \{w_1, w_3, w_4\}$.

- $\mathfrak{M}_1, w_1 \models \Box p \qquad \mathfrak{M}_2, w_1 \not\models \Box p$

LOGIKI MODALNE – SEMANTYKA

Przykład 1:

Rozważmy strukturę $\mathfrak{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$ gdzie: $\mathcal{W} = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$, a $\mathcal{R} = \{\langle w_1, w_2 \rangle, \langle w_1, w_3 \rangle, \langle w_2, w_2 \rangle, \langle w_3, w_4 \rangle, \langle w_4, w_3 \rangle\}$. Niech $\mathfrak{M}_1 = \langle \mathfrak{F}, V_1 \rangle$, gdzie $V_1(p) = \{w_2, w_3\}$, $V_1(q) = \{w_1, w_4\}$, a $\mathfrak{M}_2 = \langle \mathfrak{F}, V_2 \rangle$, gdzie $V_2(p) = \varnothing$, $V_2(q) = \{w_1, w_3, w_4\}$.

- $\mathfrak{M}_1, w_1 \models \Box p$ $\quad$ $\mathfrak{M}_2, w_1 \not\models \Box p$
- $\mathfrak{M}_2, w_1 \models \Diamond q$

LOGIKI MODALNE – SEMANTYKA

Przykład 1:

Rozważmy strukturę $\mathfrak{F} = \langle\, \mathcal{W}, \mathcal{R}\rangle$ gdzie: $\mathcal{W} = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$, a $\mathcal{R} = \{\langle w_1, w_2\rangle, \langle w_1, w_3\rangle, \langle w_2, w_2\rangle, \langle w_3, w_4\rangle, \langle w_4, w_3\rangle\}$. Niech $\mathfrak{M}_1 = \langle \mathfrak{F}, V_1\rangle$, gdzie $V_1(p) = \{w_2, w_3\}$, $V_1(q) = \{w_1, w_4\}$, a $\mathfrak{M}_2 = \langle \mathfrak{F}, V_2\rangle$, gdzie $V_2(p) = \varnothing$, $V_2(q) = \{w_1, w_3, w_4\}$.

- $\mathfrak{M}_1, w_1 \models \Box p$ $\qquad \mathfrak{M}_2, w_1 \not\models \Box p$
- $\mathfrak{M}_2, w_1 \models \Diamond q$ $\qquad \mathfrak{M}_1, w_1 \models \Diamond\Box q$

LOGIKI MODALNE – SEMANTYKA

Przykład 1:

Rozważmy strukturę $\mathfrak{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$ gdzie: $\mathcal{W} = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$, a $\mathcal{R} = \{\langle w_1, w_2\rangle, \langle w_1, w_3\rangle, \langle w_2, w_2\rangle, \langle w_3, w_4\rangle, \langle w_4, w_3\rangle\}$. Niech $\mathfrak{M}_1 = \langle \mathfrak{F}, V_1\rangle$, gdzie $V_1(p) = \{w_2, w_3\}$, $V_1(q) = \{w_1, w_4\}$, a $\mathfrak{M}_2 = \langle \mathfrak{F}, V_2\rangle$, gdzie $V_2(p) = \varnothing$, $V_2(q) = \{w_1, w_3, w_4\}$.

- $\mathfrak{M}_1, w_1 \models \Box p$ $\quad$ $\mathfrak{M}_2, w_1 \not\models \Box p$
- $\mathfrak{M}_2, w_1 \models \Diamond q$ $\quad$ $\mathfrak{M}_1, w_1 \models \Diamond\Box q$
- $\mathfrak{M}_1, w_3 \models \Box\Box p$

LOGIKI MODALNE – SEMANTYKA

Przykład 1:

Rozważmy strukturę $\mathfrak{F} = \langle\, \mathcal{W}, \mathcal{R}\rangle$ gdzie: $\mathcal{W} = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$, a $\mathcal{R} = \{\langle w_1, w_2\rangle, \langle w_1, w_3\rangle, \langle w_2, w_2\rangle, \langle w_3, w_4\rangle, \langle w_4, w_3\rangle\}$. Niech $\mathfrak{M}_1 = \langle \mathfrak{F}, V_1\rangle$, gdzie $V_1(p) = \{w_2, w_3\}$, $V_1(q) = \{w_1, w_4\}$, a $\mathfrak{M}_2 = \langle \mathfrak{F}, V_2\rangle$, gdzie $V_2(p) = \varnothing$, $V_2(q) = \{w_1, w_3, w_4\}$.

- $\mathfrak{M}_1, w_1 \models \Box p$ $\qquad \mathfrak{M}_2, w_1 \not\models \Box p$
- $\mathfrak{M}_2, w_1 \models \Diamond q$ $\qquad \mathfrak{M}_1, w_1 \models \Diamond\Box q$
- $\mathfrak{M}_1, w_3 \models \Box\Box p$ $\qquad \mathfrak{M}_1, w_1 \not\models \Box p \to p$

LOGIKI MODALNE – SEMANTYKA

Przykład 1:

Rozważmy strukturę $\mathfrak{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$ gdzie: $\mathcal{W} = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$, a $\mathcal{R} = \{\langle w_1, w_2 \rangle, \langle w_1, w_3 \rangle, \langle w_2, w_2 \rangle, \langle w_3, w_4 \rangle, \langle w_4, w_3 \rangle\}$. Niech $\mathfrak{M}_1 = \langle \mathfrak{F}, V_1 \rangle$, gdzie $V_1(p) = \{w_2, w_3\}$, $V_1(q) = \{w_1, w_4\}$, a $\mathfrak{M}_2 = \langle \mathfrak{F}, V_2 \rangle$, gdzie $V_2(p) = \varnothing$, $V_2(q) = \{w_1, w_3, w_4\}$.

- $\mathfrak{M}_1, w_1 \vDash \Box p$ $\quad$ $\mathfrak{M}_2, w_1 \nvDash \Box p$
- $\mathfrak{M}_2, w_1 \vDash \Diamond q$ $\quad$ $\mathfrak{M}_1, w_1 \vDash \Diamond\Box q$
- $\mathfrak{M}_1, w_3 \vDash \Box\Box p$ $\quad$ $\mathfrak{M}_1, w_1 \nvDash \Box p \rightarrow p$
- $\mathfrak{M}_1, w_2 \vDash \Box p \rightarrow p$

LOGIKI MODALNE – SEMANTYKA

Przykład 1:

Rozważmy strukturę $\mathfrak{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$ gdzie: $\mathcal{W} = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$, a $\mathcal{R} = \{\langle w_1, w_2\rangle, \langle w_1, w_3\rangle, \langle w_2, w_2\rangle, \langle w_3, w_4\rangle, \langle w_4, w_3\rangle\}$. Niech $\mathfrak{M}_1 = \langle \mathfrak{F}, V_1\rangle$, gdzie $V_1(p) = \{w_2, w_3\}$, $V_1(q) = \{w_1, w_4\}$, a $\mathfrak{M}_2 = \langle \mathfrak{F}, V_2\rangle$, gdzie $V_2(p) = \varnothing$, $V_2(q) = \{w_1, w_3, w_4\}$.

- $\mathfrak{M}_1, w_1 \models \Box p$ $\quad$ $\mathfrak{M}_2, w_1 \not\models \Box p$
- $\mathfrak{M}_2, w_1 \models \Diamond q$ $\quad$ $\mathfrak{M}_1, w_1 \models \Diamond\Box q$
- $\mathfrak{M}_1, w_3 \models \Box\Box p$ $\quad$ $\mathfrak{M}_1, w_1 \not\models \Box p \to p$
- $\mathfrak{M}_1, w_2 \models \Box p \to p$ $\quad$ $\mathfrak{M}_1, w_2 \models \Diamond p \to p$

LOGIKI MODALNE – SEMANTYKA

Przykład 1:

Rozważmy strukturę $\mathfrak{F} = \langle\, \mathcal{W}, \mathcal{R}\rangle$ gdzie: $\mathcal{W} = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$, a $\mathcal{R} = \{\langle w_1, w_2\rangle, \langle w_1, w_3\rangle, \langle w_2, w_2\rangle, \langle w_3, w_4\rangle, \langle w_4, w_3\rangle\}$. Niech $\mathfrak{M}_1 = \langle\mathfrak{F}, V_1\rangle$, gdzie $V_1(p) = \{w_2, w_3\}$, $V_1(q) = \{w_1, w_4\}$, a $\mathfrak{M}_2 = \langle\mathfrak{F}, V_2\rangle$, gdzie $V_2(p) = \varnothing$, $V_2(q) = \{w_1, w_3, w_4\}$.

- $\mathfrak{M}_1, w_1 \vDash \Box p \qquad \mathfrak{M}_2, w_1 \nvDash \Box p$
- $\mathfrak{M}_2, w_1 \vDash \Diamond q \qquad \mathfrak{M}_1, w_1 \vDash \Diamond\Box q$
- $\mathfrak{M}_1, w_3 \vDash \Box\Box p \qquad \mathfrak{M}_1, w_1 \nvDash \Box p \to p$
- $\mathfrak{M}_1, w_2 \vDash \Box p \to p \qquad \mathfrak{M}_1, w_2 \vDash \Diamond p \to p$
- $\mathfrak{M}_2, w_1 \vDash \Diamond\Box^n q$, dla dowolnego $n > 0$

LOGIKI MODALNE – SEMANTYKA

Spełnialność, falsyfikowalność

- φ (Γ) jest spełnialna w modelu $\mathfrak{M}$ wtw, $\|\varphi\| \neq \varnothing$ ($\|\Gamma\| \neq \varnothing$).

LOGIKI MODALNE – SEMANTYKA

Spełnialność, falsyfikowalność

- φ (Γ) jest <u>spełnialna w modelu $\mathfrak{M}$</u> wtw, $\|\varphi\| \neq \varnothing$ ($\|\Gamma\| \neq \varnothing$).
- φ (Γ) jest <u>spełnialna</u> wtw, istnieje model, w którym jest spełnialna.

LOGIKI MODALNE – SEMANTYKA

Spełnialność, falsyfikowalność

- φ (Γ) jest spełnialna w modelu $\mathfrak{M}$ wtw, $\|\varphi\| \neq \varnothing$ ($\|\Gamma\| \neq \varnothing$).
- φ (Γ) jest spełnialna wtw, istnieje model, w którym jest spełnialna.
- φ (Γ) jest sfalsyfikowana w modelu $\mathfrak{M}$ wtw, $\|\varphi\| \neq \mathcal{W}_{\mathfrak{M}}$ ($\|\Gamma\| \neq \mathcal{W}_{\mathfrak{M}}$)

LOGIKI MODALNE – SEMANTYKA

Spełnialność, falsyfikowalność

- φ (Γ) jest <u>spełnialna w modelu $\mathfrak{M}$</u> wtw, $\|\varphi\| \neq \varnothing$ ($\|\Gamma\| \neq \varnothing$).
- φ (Γ) jest <u>spełnialna</u> wtw, istnieje model, w którym jest spełnialna.
- φ (Γ) jest <u>sfalsyfikowana w modelu $\mathfrak{M}$</u> wtw, $\|\varphi\| \neq \mathcal{W}_{\mathfrak{M}}$ ($\|\Gamma\| \neq \mathcal{W}_{\mathfrak{M}}$) (inaczej: $\mathfrak{M}$ falsyfikuje φ (Γ)).

LOGIKI MODALNE – SEMANTYKA

Spełnialność, falsyfikowalność

- φ (Γ) jest spełnialna w modelu $\mathfrak{M}$ wtw, $\|\varphi\| \neq \varnothing$ ($\|\Gamma\| \neq \varnothing$).
- φ (Γ) jest spełnialna wtw, istnieje model, w którym jest spełnialna.
- φ (Γ) jest sfalsyfikowana w modelu $\mathfrak{M}$ wtw, $\|\varphi\| \neq \mathcal{W}_{\mathfrak{M}}$ ($\|\Gamma\| \neq \mathcal{W}_{\mathfrak{M}}$) (inaczej: $\mathfrak{M}$ falsyfikuje φ (Γ)).
- φ (Γ) jest sfalsyfikowana wtw, istnieje model, w którym jest sfalsyfikowana.

LOGIKI MODALNE – SEMANTYKA

Spełnialność, falsyfikowalność

- φ (Γ) jest spełnialna w modelu $\mathfrak{M}$ wtw, $\|\varphi\| \neq \varnothing$ $(\|\Gamma\| \neq \varnothing)$.
- φ (Γ) jest spełnialna wtw, istnieje model, w którym jest spełnialna.
- φ (Γ) jest sfalsyfikowana w modelu $\mathfrak{M}$ wtw, $\|\varphi\| \neq \mathcal{W}_{\mathfrak{M}}$ $(\|\Gamma\| \neq \mathcal{W}_{\mathfrak{M}})$ (inaczej: $\mathfrak{M}$ falsyfikuje φ (Γ)).
- φ (Γ) jest sfalsyfikowana wtw, istnieje model, w którym jest sfalsyfikowana.

Przykład 2: $\Diamond p \wedge \Box(p \rightarrow \Diamond\neg p)$ jest spełnialne.

LOGIKI MODALNE – SEMANTYKA

Definicja spełniania formuły (czy zbioru formuł) w modelu daje nam *lokalną* charakterystykę prawdziwości.

LOGIKI MODALNE – SEMANTYKA

Definicja spełniania formuły (czy zbioru formuł) w modelu daje nam *lokalną* charakterystykę prawdziwości.
Dalszym krokiem jest wprowadzenie pojęcia *globalnej prawdziwości*:

LOGIKI MODALNE – SEMANTYKA

Definicja spełniania formuły (czy zbioru formuł) w modelu daje nam *lokalną* charakterystykę prawdziwości.
Dalszym krokiem jest wprowadzenie pojęcia *globalnej prawdziwości*:

Prawdziwość w modelu

$\mathfrak{M} \vDash \varphi$ wtw, $\forall_{w \in \mathcal{W}_{\mathfrak{M}}}, \mathfrak{M}, w \vDash \varphi$ (lub $\|\varphi\|_{\mathfrak{M}} = \mathcal{W}_{\mathfrak{M}}$);

LOGIKI MODALNE – SEMANTYKA

Definicja spełniania formuły (czy zbioru formuł) w modelu daje nam *lokalną* charakterystykę prawdziwości.
Dalszym krokiem jest wprowadzenie pojęcia *globalnej prawdziwości*:

Prawdziwość w modelu

$\mathfrak{M} \vDash \varphi$ wtw, $\forall_{w \in \mathcal{W}_{\mathfrak{M}}}, \mathfrak{M}, w \vDash \varphi$ (lub $\|\varphi\|_{\mathfrak{M}} = \mathcal{W}_{\mathfrak{M}}$);
analogicznie dla Γ, $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$ wtw, $\|\Gamma\|_{\mathfrak{M}} = \mathcal{W}_{\mathfrak{M}}$.

LOGIKI MODALNE – SEMANTYKA

Definicja spełniania formuły (czy zbioru formuł) w modelu daje nam *lokalną* charakterystykę prawdziwości.
Dalszym krokiem jest wprowadzenie pojęcia *globalnej prawdziwości*:

Prawdziwość w modelu

$\mathfrak{M} \vDash \varphi$ wtw, $\forall_{w \in \mathcal{W}_{\mathfrak{M}}}, \mathfrak{M}, w \vDash \varphi$ (lub $\|\varphi\|_{\mathfrak{M}} = \mathcal{W}_{\mathfrak{M}}$);
analogicznie dla Γ, $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$ wtw, $\|\Gamma\|_{\mathfrak{M}} = \mathcal{W}_{\mathfrak{M}}$.

LOGIKI MODALNE – SEMANTYKA

Trzeci poziom prawdziwości to tautologiczność, czyli prawdziwość w każdym modelu.

LOGIKI MODALNE – SEMANTYKA

Trzeci poziom prawdziwości to tautologiczność, czyli prawdziwość w każdym modelu.

Prawdziwość w każdym modelu

$$\models \varphi \textit{ wtw}, \ \forall_{\mathfrak{M}}, \mathfrak{M} \models \varphi$$

LOGIKI MODALNE – SEMANTYKA

Trzeci poziom prawdziwości to tautologiczność, czyli prawdziwość w każdym modelu.

Prawdziwość w każdym modelu

$$\models \varphi \textit{ wtw}, \ \forall_{\mathfrak{M}}, \mathfrak{M} \vDash \varphi$$

$\not\models \varphi$ oznacza formułę nietautologiczną, czyli falsyfikowalną.

LOGIKI MODALNE – SEMANTYKA

Lemat 1 (tautologie)

Następujące schematy generują formuły prawdziwe we wszystkich modelach:

LOGIKI MODALNE – SEMANTYKA

Lemat 1 (tautologie)

Następujące schematy generują formuły prawdziwe we wszystkich modelach:

- $\Diamond\varphi \leftrightarrow \neg\Box\neg\varphi$
- $\Box\varphi \leftrightarrow \neg\Diamond\neg\varphi$

LOGIKI MODALNE – SEMANTYKA

Lemat 1 (tautologie)

Następujące schematy generują formuły prawdziwe we wszystkich modelach:

- $\Diamond\varphi \leftrightarrow \neg\Box\neg\varphi$
- $\Box\varphi \leftrightarrow \neg\Diamond\neg\varphi$
- $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$
- $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Diamond\varphi \to \Diamond\psi)$

LOGIKI MODALNE – SEMANTYKA

Lemat 1 (tautologie)

Następujące schematy generują formuły prawdziwe we wszystkich modelach:

- $\Diamond\varphi \leftrightarrow \neg\Box\neg\varphi$
- $\Box\varphi \leftrightarrow \neg\Diamond\neg\varphi$
- $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$
- $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Diamond\varphi \to \Diamond\psi)$
- $\Box\varphi \vee \Box\psi \to \Box(\varphi \vee \psi)$
- $\Diamond(\varphi \wedge \psi) \to \Diamond\varphi \wedge \Diamond\psi$

LOGIKI MODALNE – SEMANTYKA

Lemat 1 (tautologie)

Następujące schematy generują formuły prawdziwe we wszystkich modelach:

- $\Diamond\varphi \leftrightarrow \neg\Box\neg\varphi$
- $\Box\varphi \leftrightarrow \neg\Diamond\neg\varphi$
- $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$
- $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Diamond\varphi \to \Diamond\psi)$
- $\Box\varphi \vee \Box\psi \to \Box(\varphi \vee \psi)$
- $\Diamond(\varphi \wedge \psi) \to \Diamond\varphi \wedge \Diamond\psi$
- $\Box(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \Box\varphi \wedge \Box\psi$
- $\Diamond(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \Diamond\varphi \vee \Diamond\psi$

LOGIKI MODALNE – SEMANTYKA

Lemat 2 (formuły falsyfikowalne)

Następujące schematy nie są schematami tautologii:

LOGIKI MODALNE – SEMANTYKA

Lemat 2 (formuły falsyfikowalne)

Następujące schematy nie są schematami tautologii:

- (D) $\Box\varphi \to \Diamond\varphi$

LOGIKI MODALNE – SEMANTYKA

Lemat 2 (formuły falsyfikowalne)

Następujące schematy nie są schematami tautologii:

- (D) $\Box\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$
- (T) $\Box\varphi \rightarrow \varphi$

LOGIKI MODALNE – SEMANTYKA

Lemat 2 (formuły falsyfikowalne)

Następujące schematy nie są schematami tautologii:

- (D) $\Box\varphi \to \Diamond\varphi$
- (T) $\Box\varphi \to \varphi$
- (T') $\varphi \to \Diamond\varphi$

LOGIKI MODALNE – SEMANTYKA

Lemat 2 (formuły falsyfikowalne)

Następujące schematy nie są schematami tautologii:

- (D) $\Box\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$
- (T) $\Box\varphi \rightarrow \varphi$
- (T') $\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$
- (4) $\Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$

LOGIKI MODALNE – SEMANTYKA

Lemat 2 (formuły falsyfikowalne)

Następujące schematy nie są schematami tautologii:

- (D) $\Box\varphi \to \Diamond\varphi$
- (T) $\Box\varphi \to \varphi$
- (T') $\varphi \to \Diamond\varphi$
- (4) $\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$
- (5) $\Diamond\varphi \to \Box\Diamond\varphi$

LOGIKI MODALNE – SEMANTYKA

Lemat 2 (formuły falsyfikowalne)

Następujące schematy nie są schematami tautologii:

- (D) $\Box\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$
- (T) $\Box\varphi \rightarrow \varphi$
- (T') $\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$
- (4) $\Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$
- (5) $\Diamond\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$
- (B) $\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$

LOGIKI MODALNE – UJĘCIE AKSJOMATYCZNE

Bazowa logika **K** standardowo jest charakteryzowane następująco:

LOGIKI MODALNE – UJĘCIE AKSJOMATYCZNE

Bazowa logika **K** standardowo jest charakteryzowane następująco:

- Dowolne φ, które jest schematem tezy **KRZ**

LOGIKI MODALNE – UJĘCIE AKSJOMATYCZNE

Bazowa logika **K** standardowo jest charakteryzowane następująco:

- Dowolne φ, które jest schematem tezy **KRZ**
- (Dual) $\Diamond\varphi \leftrightarrow \neg\Box\neg\varphi$

LOGIKI MODALNE – UJĘCIE AKSJOMATYCZNE

Bazowa logika **K** standardowo jest charakteryzowane następująco:

- Dowolne φ, które jest schematem tezy **KRZ**
- (Dual) $\Diamond\varphi \leftrightarrow \neg\Box\neg\varphi$
- (K) $\Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi)$

LOGIKI MODALNE – UJĘCIE AKSJOMATYCZNE

Bazowa logika **K** standardowo jest charakteryzowane następująco:

- Dowolne φ, które jest schematem tezy **KRZ**
- (Dual) $\Diamond\varphi \leftrightarrow \neg\Box\neg\varphi$
- (K) $\Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi)$
- (MP) jeżeli $\varphi \in$ **K** i $\varphi \rightarrow \psi \in$ **K**, to $\psi \in$ **K**

LOGIKI MODALNE – UJĘCIE AKSJOMATYCZNE

Bazowa logika **K** standardowo jest charakteryzowane następująco:

- Dowolne φ, które jest schematem tezy **KRZ**
- (Dual) $\Diamond\varphi \leftrightarrow \neg\Box\neg\varphi$
- (K) $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$
- (MP) jeżeli $\varphi \in$ **K** i $\varphi \to \psi \in$ **K**, to $\psi \in$ **K**
- (RG) jeżeli $\varphi \in$ **K**, to $\Box\varphi \in$ **K**

LOGIKI MODALNE – UJĘCIE AKSJOMATYCZNE

dowód, teza

Dowodem formuły φ jest skończony ciąg, którego dowolny element to aksjomat lub formuła wydedukowana z wcześniejszych elementów za pomocą regułpierwotnych, a ostatni element ciągu to φ.

LOGIKI MODALNE – UJĘCIE AKSJOMATYCZNE

dowód, teza

Dowodem formuły φ jest skończony ciąg, którego dowolny element to aksjomat lub formuła wydedukowana z wcześniejszych elementów za pomocą regułpierwotnych, a ostatni element ciągu to φ.
φ jest tezą **K** ($\vdash_K \varphi$) wtw, φ ma dowód.

LOGIKI MODALNE – UJĘCIE AKSJOMATYCZNE

dowód, teza

Dowodem formuły φ jest skończony ciąg, którego dowolny element to aksjomat lub formuła wydedukowana z wcześniejszych elementów za pomocą regułpierwotnych, a ostatni element ciągu to φ.
φ jest tezą **K** ($\vdash_K \varphi$) wtw, φ ma dowód.

Twierdzenie 1 (Przystosowanie, pełność, adekwatność (słaba))

LOGIKI MODALNE – UJĘCIE AKSJOMATYCZNE

dowód, teza

Dowodem formuły φ jest skończony ciąg, którego dowolny element to aksjomat lub formuła wydedukowana z wcześniejszych elementów za pomocą regułpierwotnych, a ostatni element ciągu to φ.
φ jest tezą **K** ($\vdash_K \varphi$) wtw, φ ma dowód.

Twierdzenie 1 (Przystosowanie, pełność, adekwatność (słaba))

1. Jeżeli $\vdash_K \varphi$, to $\models \varphi$.

LOGIKI MODALNE – UJĘCIE AKSJOMATYCZNE

dowód, teza

Dowodem formuły φ jest skończony ciąg, którego dowolny element to aksjomat lub formuła wydedukowana z wcześniejszych elementów za pomocą regułpierwotnych, a ostatni element ciągu to φ.
φ jest tezą **K** ($\vdash_K \varphi$) wtw, φ ma dowód.

Twierdzenie 1 (Przystosowanie, pełność, adekwatność (słaba))

1. Jeżeli $\vdash_K \varphi$, to $\models \varphi$.
2. Jeżeli $\models \varphi$, to $\vdash_K \varphi$.

LOGIKI MODALNE – UJĘCIE AKSJOMATYCZNE

dowód, teza

Dowodem formuły φ jest skończony ciąg, którego dowolny element to aksjomat lub formuła wydedukowana z wcześniejszych elementów za pomocą regułpierwotnych, a ostatni element ciągu to φ.
φ jest tezą **K** ($\vdash_K \varphi$) wtw, φ ma dowód.

Twierdzenie 1 (Przystosowanie, pełność, adekwatność (słaba))

1. Jeżeli $\vdash_K \varphi$, to $\models \varphi$.
2. Jeżeli $\models \varphi$, to $\vdash_K \varphi$.
3. $\models \varphi$ wtw, $\vdash_K \varphi$.

LOGIKI MODALNE – UJĘCIE AKSJOMATYCZNE

Mocniejsze normalne logiki monomodalne

Rozważmy następujące schematy formuł:

LOGIKI MODALNE – UJĘCIE AKSJOMATYCZNE

Mocniejsze normalne logiki monomodalne

Rozważmy następujące schematy formuł:

nazwa	aksjomat
(T)	$\Box\varphi \to \varphi$
(4)	$\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$
(B)	$\varphi \to \Box\Diamond\varphi$

Z ich użyciem można zaksjomatyzować kolejne 3 ważne logiki modalne:

LOGIKI MODALNE – UJĘCIE AKSJOMATYCZNE

Mocniejsze normalne logiki monomodalne

Rozważmy następujące schematy formuł:

nazwa	aksjomat
(T)	$\Box\varphi \to \varphi$
(4)	$\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$
(B)	$\varphi \to \Box\Diamond\varphi$

Z ich użyciem można zaksjomatyzować kolejne 3 ważne logiki modalne:
$\mathbf{K}$+(T) = $\mathbf{T}$

LOGIKI MODALNE – UJĘCIE AKSJOMATYCZNE

Mocniejsze normalne logiki monomodalne

Rozważmy następujące schematy formuł:

nazwa	aksjomat
(T)	$\Box\varphi \to \varphi$
(4)	$\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$
(B)	$\varphi \to \Box\Diamond\varphi$

Z ich użyciem można zaksjomatyzować kolejne 3 ważne logiki modalne:

K+(T) = **T**

T+(4) = **S4**

LOGIKI MODALNE – UJĘCIE AKSJOMATYCZNE

Mocniejsze normalne logiki monomodalne

Rozważmy następujące schematy formuł:

nazwa	aksjomat
(T)	$\Box\varphi \rightarrow \varphi$
(4)	$\Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$
(B)	$\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$

Z ich użyciem można zaksjomatyzować kolejne 3 ważne logiki modalne:

K+(T) = **T**

T+(4) = **S4**

S4+(B) = **S5**

LOGIKI MODALNE – UJĘCIE AKSJOMATYCZNE

Mocniejsze normalne logiki monomodalne

Rozważmy następujące schematy formuł:

nazwa	aksjomat
(T)	$\Box\varphi \to \varphi$
(4)	$\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$
(B)	$\varphi \to \Box\Diamond\varphi$

Z ich użyciem można zaksjomatyzować kolejne 3 ważne logiki modalne:

K+(T) = **T**

T+(4) = **S4**

S4+(B) = **S5**

Mamy więc następującą sytuację:

K $\subset$ **T** $\subset$ **S4** $\subset$ **S5**

LOGIKI MODALNE – SEMANTYKA

Aby scharakteryzować semantycznie inne logiki normalne musimy wprowadzić dodatkową terminologię:

LOGIKI MODALNE – SEMANTYKA

Aby scharakteryzować semantycznie inne logiki normalne musimy wprowadzić dodatkową terminologię:

Prawdziwość w strukturach

- $\mathfrak{F} \vDash \varphi$ *wtw*, $\forall_{\mathfrak{M} \in MOD(\mathfrak{F})}, \mathfrak{M} \vDash \varphi$

LOGIKI MODALNE – SEMANTYKA

Aby scharakteryzować semantycznie inne logiki normalne musimy wprowadzić dodatkową terminologię:

Prawdziwość w strukturach

- $\mathfrak{F} \vDash \varphi$ *wtw*, $\forall_{\mathfrak{M} \in MOD(\mathfrak{F})}, \mathfrak{M} \vDash \varphi$
  (gdzie $MOD(\mathfrak{F})$ to klasa wszystkich modeli zbudowanych na strukturze $\mathfrak{F}$)

LOGIKI MODALNE – SEMANTYKA

Aby scharakteryzować semantycznie inne logiki normalne musimy wprowadzić dodatkową terminologię:

Prawdziwość w strukturach

- $\mathfrak{F} \vDash \varphi$ *wtw*, $\forall_{\mathfrak{M} \in MOD(\mathfrak{F})}, \mathfrak{M} \vDash \varphi$
  (gdzie $MOD(\mathfrak{F})$ to klasa wszystkich modeli zbudowanych na strukturze $\mathfrak{F}$)
- Niech $\mathcal{F}$ oznacza dowolną klasę struktur, wtedy:
  $\mathcal{F} \vDash \varphi$ *wtw*, $\forall_{\mathfrak{F} \in \mathcal{F}}, \mathfrak{F} \vDash \varphi$.

LOGIKI MODALNE – SEMANTYKA

Aby scharakteryzować semantycznie inne logiki normalne musimy wprowadzić dodatkową terminologię:

Prawdziwość w strukturach

- $\mathfrak{F} \models \varphi$ *wtw*, $\forall_{\mathfrak{M} \in MOD(\mathfrak{F})}, \mathfrak{M} \models \varphi$
  (gdzie $MOD(\mathfrak{F})$ to klasa wszystkich modeli zbudowanych na strukturze $\mathfrak{F}$)
- Niech $\mathcal{F}$ oznacza dowolną klasę struktur, wtedy:
  $\mathcal{F} \models \varphi$ *wtw*, $\forall_{\mathfrak{F} \in \mathcal{F}}, \mathfrak{F} \models \varphi$.
- Zawartością struktury $\mathfrak{F}$ nazywamy zbiór $E(\mathfrak{F}) = \{\varphi : \mathfrak{F} \models \varphi\}$.

LOGIKI MODALNE – SEMANTYKA

Aby scharakteryzować semantycznie inne logiki normalne musimy wprowadzić dodatkową terminologię:

Prawdziwość w strukturach

- $\mathfrak{F} \vDash \varphi$ *wtw*, $\forall_{\mathfrak{M} \in MOD(\mathfrak{F})}, \mathfrak{M} \vDash \varphi$
  (gdzie $MOD(\mathfrak{F})$ to klasa wszystkich modeli zbudowanych na strukturze $\mathfrak{F}$)
- Niech $\mathcal{F}$ oznacza dowolną klasę struktur, wtedy:
  $\mathcal{F} \vDash \varphi$ *wtw*, $\forall_{\mathfrak{F} \in \mathcal{F}}, \mathfrak{F} \vDash \varphi$.
- Zawartością struktury $\mathfrak{F}$ nazywamy zbiór $E(\mathfrak{F}) = \{\varphi : \mathfrak{F} \vDash \varphi\}$.
- Zawartością klasy struktur $\mathcal{F}$ nazywamy zbiór $E(\mathcal{F}) = \{\varphi : \mathcal{F} \vDash \varphi\}$.

LOGIKI MODALNE – SEMANTYKA

Aby scharakteryzować semantycznie inne logiki normalne musimy wprowadzić dodatkową terminologię:

Prawdziwość w strukturach

- $\mathfrak{F} \vDash \varphi$ *wtw*, $\forall_{\mathfrak{M} \in MOD(\mathfrak{F})}, \mathfrak{M} \vDash \varphi$ (gdzie $MOD(\mathfrak{F})$ to klasa wszystkich modeli zbudowanych na strukturze $\mathfrak{F}$)
- Niech $\mathcal{F}$ oznacza dowolną klasę struktur, wtedy: $\mathcal{F} \vDash \varphi$ *wtw*, $\forall_{\mathfrak{F} \in \mathcal{F}}, \mathfrak{F} \vDash \varphi$.
- Zawartością struktury $\mathfrak{F}$ nazywamy zbiór $E(\mathfrak{F}) = \{\varphi : \mathfrak{F} \vDash \varphi\}$.
- Zawartością klasy struktur $\mathcal{F}$ nazywamy zbiór $E(\mathcal{F}) = \{\varphi : \mathcal{F} \vDash \varphi\}$.

Twierdzenie: Zawartość dowolnej $\mathfrak{F}$ ($\mathcal{F}$) jest logiką normalną.

LOGIKI MODALNE – SEMANTYKA

Nośnik danej struktury (charakter jego elementów i liczność) nie ma wpływu na określenie danej logiki, natomiast strukturalne własności relacji osiągalności mają, więc będziemy mówić o klasach struktur jednolitych pod względem własności relacji osiągalności. Oto najważniejsze z nich:

LOGIKI MODALNE – SEMANTYKA

Nośnik danej struktury (charakter jego elementów i liczność) nie ma wpływu na określenie danej logiki, natomiast strukturalne własności relacji osiągalności mają, więc będziemy mówić o klasach struktur jednolitych pod względem własności relacji osiągalności. Oto najważniejsze z nich:

Warunki relacyjne:

nazwa	warunek
serialność	$\forall x \exists y \mathcal{R}xy$
zwrotność	$\forall x \mathcal{R}xx$
przechodniość	$\forall xyz(\mathcal{R}xy \wedge \mathcal{R}yz \rightarrow \mathcal{R}xz)$
symetria	$\forall xy(\mathcal{R}xy \rightarrow \mathcal{R}yx)$
euklidesowość	$\forall xyz(\mathcal{R}xy \wedge \mathcal{R}xz \rightarrow \mathcal{R}yz)$

LOGIKI MODALNE – SEMANTYKA

Nośnik danej struktury (charakter jego elementów i liczność) nie ma wpływu na określenie danej logiki, natomiast strukturalne własności relacji osiągalności mają, więc będziemy mówić o klasach struktur jednolitych pod względem własności relacji osiągalności. Oto najważniejsze z nich:

Warunki relacyjne:

nazwa	warunek
serialność	$\forall x \exists y \mathcal{R}xy$
zwrotność	$\forall x \mathcal{R}xx$
przechodniość	$\forall xyz(\mathcal{R}xy \land \mathcal{R}yz \to \mathcal{R}xz)$
symetria	$\forall xy(\mathcal{R}xy \to \mathcal{R}yx)$
euklidesowość	$\forall xyz(\mathcal{R}xy \land \mathcal{R}xz \to \mathcal{R}yz)$

Struktury i klasy struktur (a także modele na nich ufundowane) będziemy określać według własności, które posiadają ich relacje osiągalności. Np. powiemy, że $\mathcal{F}$ ($\mathfrak{F}, \mathfrak{M}$) jest klasą (strukturą, modelem) zwrotną, gdy każda struktura $\mathfrak{F} \in \mathcal{F}$ jest strukturą zwrotną.

LOGIKI MODALNE – ADEKWATNOŚĆ

Twierdzenie 5

Zachodzą następujące równoważności dla formuł (D), (T), (4), (5) i (B):

LOGIKI MODALNE – ADEKWATNOŚĆ

Twierdzenie 5

Zachodzą następujące równoważności dla formuł (D), (T), (4), (5) i (B):

- $\mathcal{F} \models \Box\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$ wtw, $\mathcal{F}$ jest serialna

LOGIKI MODALNE – ADEKWATNOŚĆ

Twierdzenie 5

Zachodzą następujące równoważności dla formuł (D), (T), (4), (5) i (B):

- $\mathcal{F} \models \Box\varphi \to \Diamond\varphi$ wtw, $\mathcal{F}$ jest serialna
- $\mathcal{F} \models \Box\varphi \to \varphi$ wtw, $\mathcal{F}$ jest zwrotna

LOGIKI MODALNE – ADEKWATNOŚĆ

Twierdzenie 5

Zachodzą następujące równoważności dla formuł (D), (T), (4), (5) i (B):

- $\mathcal{F} \models \Box\varphi \to \Diamond\varphi$ wtw, $\mathcal{F}$ jest serialna
- $\mathcal{F} \models \Box\varphi \to \varphi$ wtw, $\mathcal{F}$ jest zwrotna
- $\mathcal{F} \models \Box\varphi \to \Box\Box\varphi$ wtw, $\mathcal{F}$ jest przechodnia

LOGIKI MODALNE – ADEKWATNOŚĆ

Twierdzenie 5

Zachodzą następujące równoważności dla formuł (D), (T), (4), (5) i (B):

- $\mathcal{F} \models \Box\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$ wtw, $\mathcal{F}$ jest serialna
- $\mathcal{F} \models \Box\varphi \rightarrow \varphi$ wtw, $\mathcal{F}$ jest zwrotna
- $\mathcal{F} \models \Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$ wtw, $\mathcal{F}$ jest przechodnia
- $\mathcal{F} \models \Diamond\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$ wtw, $\mathcal{F}$ jest euklidesowa

LOGIKI MODALNE – ADEKWATNOŚĆ

Twierdzenie 5

Zachodzą następujące równoważności dla formuł (D), (T), (4), (5) i (B):

- $\mathcal{F} \models \Box\varphi \to \Diamond\varphi$ wtw, $\mathcal{F}$ jest serialna
- $\mathcal{F} \models \Box\varphi \to \varphi$ wtw, $\mathcal{F}$ jest zwrotna
- $\mathcal{F} \models \Box\varphi \to \Box\Box\varphi$ wtw, $\mathcal{F}$ jest przechodnia
- $\mathcal{F} \models \Diamond\varphi \to \Box\Diamond\varphi$ wtw, $\mathcal{F}$ jest euklidesowa
- $\mathcal{F} \models \varphi \to \Box\Diamond\varphi$ wtw, $\mathcal{F}$ jest symetryczna.

LOGIKI MODALNE – ADEKWATNOŚĆ

Twierdzenie 5

Zachodzą następujące równoważności dla formuł (D), (T), (4), (5) i (B):

- $\mathcal{F} \models \Box\varphi \to \Diamond\varphi$ wtw, $\mathcal{F}$ jest serialna
- $\mathcal{F} \models \Box\varphi \to \varphi$ wtw, $\mathcal{F}$ jest zwrotna
- $\mathcal{F} \models \Box\varphi \to \Box\Box\varphi$ wtw, $\mathcal{F}$ jest przechodnia
- $\mathcal{F} \models \Diamond\varphi \to \Box\Diamond\varphi$ wtw, $\mathcal{F}$ jest euklidesowa
- $\mathcal{F} \models \varphi \to \Box\Diamond\varphi$ wtw, $\mathcal{F}$ jest symetryczna.

Twierdzenie 4: Zawartość dowolnej $\mathfrak{F}$ ($\mathcal{F}$) jest logiką normalną.

LOGIKI MODALNE – ADEKWATNOŚĆ

Adekwatność względem klas struktur

Ogólna postać twierdzenia o przystosowaniu logiki **L** względem klasy struktur $\mathcal{F}$ mówi, że:

LOGIKI MODALNE – ADEKWATNOŚĆ

Adekwatność względem klas struktur

Ogólna postać twierdzenia o przystosowaniu logiki **L** względem klasy struktur $\mathcal{F}$ mówi, że:

Twierdzenie 1 (Przystosowanie): Jeżeli $\vdash_L \varphi$, to $\models_{\mathcal{F}} \varphi$.

LOGIKI MODALNE – ADEKWATNOŚĆ

Adekwatność względem klas struktur

Ogólna postać twierdzenia o przystosowaniu logiki **L** względem klasy struktur $\mathcal{F}$ mówi, że:

Twierdzenie 1 (Przystosowanie): Jeżeli $\vdash_L \varphi$, to $\models_{\mathcal{F}} \varphi$.

Twierdzenie o pełności logiki **L** względem klasy struktur $\mathcal{F}$ mówi, że:

LOGIKI MODALNE – ADEKWATNOŚĆ

Adekwatność względem klas struktur

Ogólna postać twierdzenia o przystosowaniu logiki **L** względem klasy struktur $\mathcal{F}$ mówi, że:

Twierdzenie 1 (Przystosowanie): Jeżeli $\vdash_L \varphi$, to $\models_{\mathcal{F}} \varphi$.

Twierdzenie o pełności logiki **L** względem klasy struktur $\mathcal{F}$ mówi, że:

Twierdzenie 2 (Pełność): Jeżeli $\models_{\mathcal{F}} \varphi$, to $\vdash_L \varphi$.

LOGIKI MODALNE – ADEKWATNOŚĆ

Adekwatność względem klas struktur

Ogólna postać twierdzenia o przystosowaniu logiki **L** względem klasy struktur $\mathcal{F}$ mówi, że:
Twierdzenie 1 (Przystosowanie): Jeżeli $\vdash_L \varphi$, to $\models_{\mathcal{F}} \varphi$.
Twierdzenie o pełności logiki **L** względem klasy struktur $\mathcal{F}$ mówi, że:
Twierdzenie 2 (Pełność): Jeżeli $\models_{\mathcal{F}} \varphi$, to $\vdash_L \varphi$.
Oba twierdzenia dają nam twierdzenie o słabej adekwatności **L** względem klasy $\mathcal{F}$: $\mathbf{L}=E(\mathcal{F})$.

LOGIKI MODALNE – ADEKWATNOŚĆ

Adekwatność względem klas struktur

Ogólna postać twierdzenia o przystosowaniu logiki **L** względem klasy struktur $\mathcal{F}$ mówi, że:

Twierdzenie 1 (Przystosowanie): Jeżeli $\vdash_L \varphi$, to $\models_{\mathcal{F}} \varphi$.

Twierdzenie o pełności logiki **L** względem klasy struktur $\mathcal{F}$ mówi, że:

Twierdzenie 2 (Pełność): Jeżeli $\models_{\mathcal{F}} \varphi$, to $\vdash_L \varphi$.

Oba twierdzenia dają nam twierdzenie o słabej adekwatności **L** względem klasy $\mathcal{F}$: $\mathbf{L}=E(\mathcal{F})$.

Mówimy wtedy, że $\mathcal{F}$ *determinuje*, albo charakteryzuje **L**. $\mathcal{F}$ jest wtedy określane jako klasa **L**-struktur, a każdy model należący do MOD($\mathcal{F}$), to **L**-model. Powiemy też, że φ (Γ) jest **L**-spełnialny (lub **L**-falsyfikowalny) wtw, jest spełnialny (falsyfikowalny) w jakimś **L**-modelu.

LOGIKI MODALNE – ADEKWATNOŚĆ

Adekwatność względem klas struktur

Tabela zestawia wyniki dotyczące determinacji wyróżnionych wcześniej logik.

LOGIKI MODALNE – ADEKWATNOŚĆ

Adekwatność względem klas struktur

Tabela zestawia wyniki dotyczące determinacji wyróżnionych wcześniej logik.

L	**L**-struktury
K	dowolne
T	zwrotne
S4	zwrotne i przechodnie
S5	równoważnościowe

LOGIKI MODALNE – ETYKIETOWANE DIAGRAMY BETHA

Konwencje zapisu – formuły klasyczne:

LOGIKI MODALNE – ETYKIETOWANE DIAGRAMY BETHA

Konwencje zapisu – formuły klasyczne:

α	α_1	α_2	β	β_1	β_2
$+\varphi \wedge \psi$	$+\varphi$	$+\psi$	$-\varphi \wedge \psi$	$-\varphi$	$-\psi$
$-\varphi \vee \psi$	$-\varphi$	$-\psi$	$+\varphi \vee \psi$	$+\varphi$	$+\psi$
$-\varphi \rightarrow \psi$	$+\varphi$	$-\psi$	$+\varphi \rightarrow \psi$	$-\varphi$	$+\psi$

LOGIKI MODALNE – ETYKIETOWANE DIAGRAMY BETHA

Konwencje zapisu – formuły klasyczne:

α	α_1	α_2	β	β_1	β_2
$+\varphi \wedge \psi$	$+\varphi$	$+\psi$	$-\varphi \wedge \psi$	$-\varphi$	$-\psi$
$-\varphi \vee \psi$	$-\varphi$	$-\psi$	$+\varphi \vee \psi$	$+\varphi$	$+\psi$
$-\varphi \to \psi$	$+\varphi$	$-\psi$	$+\varphi \to \psi$	$-\varphi$	$+\psi$

Konwencje zapisu – formuły modalne:

LOGIKI MODALNE – ETYKIETOWANE DIAGRAMY BETHA

Konwencje zapisu – formuły klasyczne:

α	α_1	α_2	β	β_1	β_2
$+\varphi \wedge \psi$	$+\varphi$	$+\psi$	$-\varphi \wedge \psi$	$-\varphi$	$-\psi$
$-\varphi \vee \psi$	$-\varphi$	$-\psi$	$+\varphi \vee \psi$	$+\varphi$	$+\psi$
$-\varphi \rightarrow \psi$	$+\varphi$	$-\psi$	$+\varphi \rightarrow \psi$	$-\varphi$	$+\psi$

Konwencje zapisu – formuły modalne:

π	ν	$\pi' = \nu'$
$+\Diamond\varphi$	$+\Box\varphi$	$+\varphi$
$-\Box\varphi$	$-\Diamond\varphi$	$-\varphi$

LOGIKI MODALNE – ETYKIETOWANE DIAGRAMY BETHA

Etykiety

LOGIKI MODALNE – ETYKIETOWANE DIAGRAMY BETHA

Etykiety

1. $1 \in$ET
2. Jeżeli $\sigma \in$ET, to $\sigma.k \in$ET

LOGIKI MODALNE – ETYKIETOWANE DIAGRAMY BETHA

Etykiety

1. $1 \in$ET
2. Jeżeli $\sigma \in$ET, to $\sigma.k \in$ET

$\sigma.k$ denotuje etykietę, której ostatni element to k; $\sigma\tau$: oznacza etykietę, która jest konkatenacją dwóch ciągów;

LOGIKI MODALNE – ETYKIETOWANE DIAGRAMY BETHA

Etykiety

1. $1 \in$ET
2. Jeżeli $\sigma \in$ET, to $\sigma.k \in$ET

$\sigma.k$ denotuje etykietę, której ostatni element to k; $\sigma\tau$: oznacza etykietę, która jest konkatenacją dwóch ciągów;
Będziemy nazywali etykietę σ *rodzicem* a $\sigma.i$ *dzieckiem*; oprócz 1. każda inna etykieta jest dzieckiem.

LOGIKI MODALNE – ETYKIETOWANE DIAGRAMY BETHA

Etykiety

1. $1 \in$ET
2. Jeżeli $\sigma \in$ET, to $\sigma.k \in$ET

$\sigma.k$ denotuje etykietę, której ostatni element to k; $\sigma\tau$: oznacza etykietę, która jest konkatenacją dwóch ciągów;
Będziemy nazywali etykietę σ *rodzicem* a $\sigma.i$ *dzieckiem*; oprócz 1. każda inna etykieta jest dzieckiem.

LOGIKI MODALNE – ETYKIETOWANE DIAGRAMY BETHA

Przykład i interpretacja

LOGIKI MODALNE – ETYKIETOWANE DIAGRAMY BETHA

Przykład i interpretacja

1, 1.2.1.1.5, 1.1.1.1.3, są etykietami, a 4.1.3.7., czy 1.3.0.5. etykietami nie są.

LOGIKI MODALNE – ETYKIETOWANE DIAGRAMY BETHA

Przykład i interpretacja

1, 1.2.1.1.5, 1.1.1.1.3, są etykietami, a 4.1.3.7., czy 1.3.0.5. etykietami nie są.
Nieformalnie, etykieta jest nazwą określonego świata w konstruowanym modelu, a jej struktura pokazuje, jakie punkty w tym modelu ją poprzedzają przez $\mathcal{R}$,

LOGIKI MODALNE – ETYKIETOWANE DIAGRAMY BETHA

Przykład i interpretacja

1, 1.2.1.1.5, 1.1.1.1.3, są etykietami, a 4.1.3.7., czy 1.3.0.5. etykietami nie są.
Nieformalnie, etykieta jest nazwą określonego świata w konstruowanym modelu, a jej struktura pokazuje, jakie punkty w tym modelu ją poprzedzają przez $\mathcal{R}$, np. drugi przykład etykiety można odczytać jako (częściowy) opis modelu, w którym $1, 1.2, 1.2.1, 1.2.1.1$, i 1.2.1.1.5, należą do $\mathcal{W}$ a pary $\langle 1, 1.2\rangle, \langle 1.2, 1.2.1\rangle, ..., \langle 1.2.1.1, 1.2.1.1.5\rangle$ należą do $\mathcal{R}$.

LOGIKI MODALNE – ETYKIETOWANE DIAGRAMY BETHA

Przykład i interpretacja

1, 1.2.1.1.5, 1.1.1.1.3, są etykietami, a 4.1.3.7., czy 1.3.0.5. etykietami nie są.
Nieformalnie, etykieta jest nazwą określonego świata w konstruowanym modelu, a jej struktura pokazuje, jakie punkty w tym modelu ją poprzedzają przez $\mathcal{R}$, np. drugi przykład etykiety można odczytać jako (częściowy) opis modelu, w którym $1, 1.2, 1.2.1, 1.2.1.1$, i $1.2.1.1.5$, należą do $\mathcal{W}$ a pary $\langle 1, 1.2\rangle, \langle 1.2, 1.2.1\rangle, ..., \langle 1.2.1.1, 1.2.1.1.5\rangle$ należą do $\mathcal{R}$.
Ogólnie, dla dowolnych dwóch etykiet, z których jedna jest dzieckiem drugiej, oznacza to, że $\sigma.i$ jest osiągalne przez $\mathcal{R}$ z σ.

LOGIKI MODALNE – ETYKIETOWANE DIAGRAMY BETHA

Przykład i interpretacja

1, 1.2.1.1.5, 1.1.1.1.3, są etykietami, a 4.1.3.7., czy 1.3.0.5. etykietami nie są.
Nieformalnie, etykieta jest nazwą określonego świata w konstruowanym modelu, a jej struktura pokazuje, jakie punkty w tym modelu ją poprzedzają przez $\mathcal{R}$, np. drugi przykład etykiety można odczytać jako (częściowy) opis modelu, w którym $1, 1.2, 1.2.1, 1.2.1.1$, i $1.2.1.1.5$, należą do $\mathcal{W}$ a pary $\langle 1, 1.2\rangle, \langle 1.2, 1.2.1\rangle, ..., \langle 1.2.1.1, 1.2.1.1.5\rangle$ należą do $\mathcal{R}$.
Ogólnie, dla dowolnych dwóch etykiet, z których jedna jest dzieckiem drugiej, oznacza to, że $\sigma.i$ jest osiągalne przez $\mathcal{R}$ z σ.

LOGIKI MODALNE – ETYKIETOWANE DIAGRAMY BETHA

Formuły etykietowane

LOGIKI MODALNE – ETYKIETOWANE DIAGRAMY BETHA

Formuły etykietowane

Jeżeli $\varphi \in FOR(\mathbf{MOD})$ a $\sigma \in$ET, to $\sigma : +\varphi$ i $\sigma : -\varphi$ są formułami etykietowanymi.

LOGIKI MODALNE – ETYKIETOWANE DIAGRAMY BETHA

Formuły etykietowane

Jeżeli $\varphi \in \mathit{FOR}(\mathbf{MOD})$ a $\sigma \in$ET, to $\sigma : +\varphi$ i $\sigma : -\varphi$ są formułami etykietowanymi.
Intuicyjnie $\sigma : +\varphi$ oznacza, że φ jest spełnione w modelu w punkcie σ a $\sigma : -\varphi$, że φ jest fałszywa w σ.

LOGIKI MODALNE – ETYKIETOWANE DIAGRAMY BETHA

Formuły etykietowane

Jeżeli $\varphi \in FOR(\mathbf{MOD})$ a $\sigma \in$ET, to $\sigma : +\varphi$ i $\sigma : -\varphi$ są formułami etykietowanymi.
Intuicyjnie $\sigma : +\varphi$ oznacza, że φ jest spełnione w modelu w punkcie σ a $\sigma : -\varphi$, że φ jest fałszywa w σ.

LOGIKI MODALNE – ETYKIETOWANE DIAGRAMY BETHA

Reguły – Bazowa formalizacja (**K**-EDB)

LOGIKI MODALNE – ETYKIETOWANE DIAGRAMY BETHA

Reguły – Bazowa formalizacja (**K**-EDB)

$(\bot)$ $\sigma : +\varphi, \sigma : -\varphi \;/\; \bot$

$(\neg)$ $\sigma : +\neg\varphi \;/\; \sigma : -\varphi \quad \sigma : -\neg\varphi \;/\; \sigma : +\varphi$

(α) $\sigma : \alpha \;/\; \sigma : \alpha_1,\ \sigma : \alpha_2$

(β) $\sigma : \beta, \;/\; \sigma : \beta_1 \;\mid\; \sigma : \beta_2$,

LOGIKI MODALNE – ETYKIETOWANE DIAGRAMY BETHA

Reguły – Bazowa formalizacja (**K**-EDB)

($\bot$) $\sigma : +\varphi, \sigma : -\varphi \;/\; \bot$
($\neg$) $\sigma : +\neg\varphi \;/\; \sigma : -\varphi \quad \sigma : -\neg\varphi \;/\; \sigma : +\varphi$
(α) $\sigma : \alpha \;/\; \sigma : \alpha_1, \; \sigma : \alpha_2$
(β) $\sigma : \beta, \;/\; \sigma : \beta_1 \;\mid\; \sigma : \beta_2$,
(π) $\sigma : \pi \;/\; \sigma.k : \pi'$, gdzie $\sigma.k$ jest nową etykietą
(ν) $\sigma : \nu \;/\; \sigma.k : \nu'$, gdzie $\sigma.k$ jest dowolną etykietą

LOGIKI MODALNE – ETYKIETOWANE DIAGRAMY BETHA

Reguły – Bazowa formalizacja (**K**-EDB)

$(\bot)$ $\sigma : +\varphi, \sigma : -\varphi \ / \ \bot$
$(\neg)$ $\sigma : +\neg\varphi \ / \ \sigma : -\varphi \quad \sigma : -\neg\varphi \ / \ \sigma : +\varphi$
(α) $\sigma : \alpha \ / \ \sigma : \alpha_1, \ \sigma : \alpha_2$
(β) $\sigma : \beta, \ / \ \sigma : \beta_1 \ \mid \ \sigma : \beta_2$,
(π) $\sigma : \pi \ / \ \sigma.k : \pi'$, gdzie $\sigma.k$ jest nową etykietą
(ν) $\sigma : \nu \ / \ \sigma.k : \nu'$, gdzie $\sigma.k$ jest dowolną etykietą

Reguły dodatkowe:

LOGIKI MODALNE – ETYKIETOWANE DIAGRAMY BETHA

Reguły – Bazowa formalizacja (**K**-EDB)

($\perp$) $\sigma : +\varphi, \sigma : -\varphi \ / \ \perp$
($\neg$) $\sigma : +\neg\varphi \ / \ \sigma : -\varphi \quad \sigma : -\neg\varphi \ / \ \sigma : +\varphi$
(α) $\sigma : \alpha \ / \ \sigma : \alpha_1, \ \sigma : \alpha_2$
(β) $\sigma : \beta, \ / \ \sigma : \beta_1 \ \mid \ \sigma : \beta_2$,
(π) $\sigma : \pi \ / \ \sigma.k : \pi'$, gdzie $\sigma.k$ jest nową etykietą
(ν) $\sigma : \nu \ / \ \sigma.k : \nu'$, gdzie $\sigma.k$ jest dowolną etykietą

Reguły dodatkowe:

(T) $\sigma : \nu \ / \ \sigma : \nu'$

LOGIKI MODALNE – ETYKIETOWANE DIAGRAMY BETHA

Reguły – Bazowa formalizacja (**K**-EDB)

($\bot$) $\sigma : +\varphi, \sigma : -\varphi \;/\; \bot$
($\neg$) $\sigma : +\neg\varphi \;/\; \sigma : -\varphi \quad \sigma : -\neg\varphi \;/\; \sigma : +\varphi$
(α) $\sigma : \alpha \;/\; \sigma : \alpha_1,\ \sigma : \alpha_2$
(β) $\sigma : \beta, \;/\; \sigma : \beta_1 \;\mid\; \sigma : \beta_2$,
(π) $\sigma : \pi \;/\; \sigma.k : \pi'$, gdzie $\sigma.k$ jest nową etykietą
(ν) $\sigma : \nu \;/\; \sigma.k : \nu'$, gdzie $\sigma.k$ jest dowolną etykietą

Reguły dodatkowe:

(T) $\sigma : \nu \;/\; \sigma : \nu'$
(4) $\sigma : \nu \;/\; \sigma.k : \nu$, gdzie $\sigma.k$ jest dowolną etykietą

LOGIKI MODALNE – ETYKIETOWANE DIAGRAMY BETHA

Reguły – Bazowa formalizacja (**K**-EDB)

($\perp$) $\sigma : +\varphi, \sigma : -\varphi \ / \ \perp$
($\neg$) $\sigma : +\neg\varphi \ / \ \sigma : -\varphi \quad \sigma : -\neg\varphi \ / \ \sigma : +\varphi$
(α) $\sigma : \alpha \ / \ \sigma : \alpha_1, \ \sigma : \alpha_2$
(β) $\sigma : \beta, \ / \ \sigma : \beta_1 \ \mid \ \sigma : \beta_2$,
(π) $\sigma : \pi \ / \ \sigma.k : \pi'$, gdzie $\sigma.k$ jest nową etykietą
(ν) $\sigma : \nu \ / \ \sigma.k : \nu'$, gdzie $\sigma.k$ jest dowolną etykietą

Reguły dodatkowe:

(T) $\sigma : \nu \ / \ \sigma : \nu'$
(4) $\sigma : \nu \ / \ \sigma.k : \nu$, gdzie $\sigma.k$ jest dowolną etykietą
(B) $\sigma.k : \nu \ / \ \sigma : \nu$, gdzie $\sigma.k$ jest dowolną etykietą

LOGIKI MODALNE – ETYKIETOWANE DIAGRAMY BETHA

Reguły – Bazowa formalizacja (**K**-EDB)

($\perp$) $\sigma : +\varphi, \sigma : -\varphi \ / \ \perp$
($\neg$) $\sigma : +\neg\varphi \ / \ \sigma : -\varphi \quad \sigma : -\neg\varphi \ / \ \sigma : +\varphi$
(α) $\sigma : \alpha \ / \ \sigma : \alpha_1, \ \sigma : \alpha_2$
(β) $\sigma : \beta, \ / \ \sigma : \beta_1 \ \mid \ \sigma : \beta_2$,
(π) $\sigma : \pi \ / \ \sigma.k : \pi'$, gdzie $\sigma.k$ jest nową etykietą
(ν) $\sigma : \nu \ / \ \sigma.k : \nu'$, gdzie $\sigma.k$ jest dowolną etykietą

Reguły dodatkowe:

(T) $\sigma : \nu \ / \ \sigma : \nu'$
(4) $\sigma : \nu \ / \ \sigma.k : \nu$, gdzie $\sigma.k$ jest dowolną etykietą
(B) $\sigma.k : \nu \ / \ \sigma : \nu$, gdzie $\sigma.k$ jest dowolną etykietą

LOGIKI MODALNE – ETYKIETOWANE DIAGRAMY BETHA

Formalizacje znanych logik normalnych można uzyskać przez następujące kombinacje podanych reguł:

LOGIKI MODALNE – ETYKIETOWANE DIAGRAMY BETHA

Formalizacje znanych logik normalnych można uzyskać przez następujące kombinacje podanych reguł:

T-EDB = **K**-EDB + (T)

LOGIKI MODALNE – ETYKIETOWANE DIAGRAMY BETHA

Formalizacje znanych logik normalnych można uzyskać przez następujące kombinacje podanych reguł:

T-EDB $=$ **K**-EDB $+$ (T)
S4-EDB $=$ **T**-EDB $+$ (4)

LOGIKI MODALNE – ETYKIETOWANE DIAGRAMY BETHA

Formalizacje znanych logik normalnych można uzyskać przez następujące kombinacje podanych reguł:

T-EDB = **K**-EDB + (T)
S4-EDB = **T**-EDB + (4)
S5-EDB = **S4**-EDB + (B)

LOGIKI MODALNE – ETYKIETOWANE DIAGRAMY BETHA

Formalizacje znanych logik normalnych można uzyskać przez następujące kombinacje podanych reguł:

T-EDB = **K**-EDB + (T)
S4-EDB = **T**-EDB + (4)
S5-EDB = **S4**-EDB + (B)

Definicja:
φ ma dowód w **L**-EDB wtw istnieje zamknięte drzewo dla $1 : -\varphi$.

LOGIKI MODALNE – ETYKIETOWANE DIAGRAMY BETHA

Formalizacje znanych logik normalnych można uzyskać przez następujące kombinacje podanych reguł:

T-EDB = **K**-EDB + (T)
S4-EDB = **T**-EDB + (4)
S5-EDB = **S4**-EDB + (B)

Definicja:
φ ma dowód w **L**-EDB wtw istnieje zamknięte drzewo dla $1 : -\varphi$.
Adekwatność diagramów Betha:

LOGIKI MODALNE – ETYKIETOWANE DIAGRAMY BETHA

Formalizacje znanych logik normalnych można uzyskać przez następujące kombinacje podanych reguł:

T-EDB = **K**-EDB + (T)
S4-EDB = **T**-EDB + (4)
S5-EDB = **S4**-EDB + (B)

Definicja:
φ ma dowód w **L**-EDB wtw istnieje zamknięte drzewo dla $1 : -\varphi$.
Adekwatność diagramów Betha:
Twierdzenie $\models_L \varphi$ wtw $1 : -\varphi$ ma dowód w **L**-EDB

LOGIKI MODALNE – ETYKIETOWANE DIAGRAMY BETHA

Przykład dowodu (drzewo zamknięte)

$$
\begin{array}{l}
1 : -\Box p \vee \Box q \rightarrow \Box(p \vee q) \\
1 : +\Box p \vee \Box q \\
1 : -\Box(p \vee q) \\
1.1 : -p \vee q \\
1.1 : -p \\
1.1 : -q
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
/ & & \backslash \\
1 : +\Box p & & 1 : +\Box q \\
1.1 : +p & & 1.1 : +q \\
\bot & & \bot
\end{array}
$$

LOGIKI MODALNE – WYNIKANIE I DOWIEDLNOŚĆ

Wynikanie lokalne i globalne

1. φ wynika lokalnie z Γ w logice **L**:

LOGIKI MODALNE – WYNIKANIE I DOWIEDLNOŚĆ

Wynikanie lokalne i globalne

1. φ wynika lokalnie z Γ w logice **L**:
$\Gamma \models_L \varphi$

LOGIKI MODALNE – WYNIKANIE I DOWIEDLNOŚĆ

Wynikanie lokalne i globalne

1. φ wynika lokalnie z Γ w logice **L**:
$\Gamma \models_L \varphi$ wtw, $\forall_{\mathfrak{M} \in MOD(\mathbf{L})}(\|\Gamma\|_{\mathfrak{M}} \subseteq \|\varphi\|_{\mathfrak{M}})$

LOGIKI MODALNE – WYNIKANIE I DOWIEDLNOŚĆ

Wynikanie lokalne i globalne

1. φ wynika lokalnie z Γ w logice **L**:
$\Gamma \models_L \varphi$ wtw, $\forall_{\mathfrak{M} \in MOD(\mathbf{L})}(\|\Gamma\|_{\mathfrak{M}} \subseteq \|\varphi\|_{\mathfrak{M}})$
(inaczej: $\forall_{\mathfrak{M} \in MOD(\mathbf{L})}, \forall_{w \in \mathcal{W}_{\mathfrak{M}}}$ (jeżeli $\mathfrak{M}, w \vDash \Gamma$, to $\mathfrak{M}, w \vDash \varphi$))

LOGIKI MODALNE – WYNIKANIE I DOWIEDLNOŚĆ

Wynikanie lokalne i globalne

1. φ wynika lokalnie z Γ w logice $\mathbf{L}$:
$\Gamma \models_L \varphi$ wtw, $\forall_{\mathfrak{M} \in MOD(\mathbf{L})}(\|\Gamma\|_{\mathfrak{M}} \subseteq \|\varphi\|_{\mathfrak{M}})$
(inaczej: $\forall_{\mathfrak{M} \in MOD(\mathbf{L})}, \forall_{w \in \mathcal{W}_{\mathfrak{M}}}$ (jeżeli $\mathfrak{M}, w \vDash \Gamma$, to $\mathfrak{M}, w \vDash \varphi$))
2. φ wynika globalnie z Γ w logice $\mathbf{L}$:

LOGIKI MODALNE – WYNIKANIE I DOWIEDLNOŚĆ

Wynikanie lokalne i globalne

1. φ wynika lokalnie z Γ w logice **L**:
$\Gamma \models_L \varphi$ wtw, $\forall_{\mathfrak{M} \in MOD(\mathbf{L})}(\|\Gamma\|_{\mathfrak{M}} \subseteq \|\varphi\|_{\mathfrak{M}})$
(inaczej: $\forall_{\mathfrak{M} \in MOD(\mathbf{L})}, \forall_{w \in \mathcal{W}_{\mathfrak{M}}}$ (jeżeli $\mathfrak{M}, w \models \Gamma$, to $\mathfrak{M}, w \models \varphi$))
2. φ wynika globalnie z Γ w logice **L**:
$\Gamma \mid\models_L \varphi$

LOGIKI MODALNE – WYNIKANIE I DOWIEDLNOŚĆ

Wynikanie lokalne i globalne

1. φ wynika lokalnie z Γ w logice **L**:
$\Gamma \models_L \varphi$ wtw, $\forall_{\mathfrak{M} \in MOD(\mathbf{L})}(\|\Gamma\|_{\mathfrak{M}} \subseteq \|\varphi\|_{\mathfrak{M}})$
(inaczej: $\forall_{\mathfrak{M} \in MOD(\mathbf{L})}, \forall_{w \in \mathcal{W}_{\mathfrak{M}}}$ (jeżeli $\mathfrak{M}, w \models \Gamma$, to $\mathfrak{M}, w \models \varphi$))
2. φ wynika globalnie z Γ w logice **L**:
$\Gamma \mid\models_L \varphi$ wtw $\forall_{\mathfrak{M} \in MOD(\mathbf{L})}$

LOGIKI MODALNE – WYNIKANIE I DOWIEDLNOŚĆ

Wynikanie lokalne i globalne

1. φ wynika lokalnie z Γ w logice **L**:
$\Gamma \models_L \varphi$ wtw, $\forall_{\mathfrak{M} \in MOD(\mathbf{L})}(\|\Gamma\|_{\mathfrak{M}} \subseteq \|\varphi\|_{\mathfrak{M}})$
(inaczej: $\forall_{\mathfrak{M} \in MOD(\mathbf{L})}, \forall_{w \in \mathcal{W}_{\mathfrak{M}}}$ (jeżeli $\mathfrak{M}, w \models \Gamma$, to $\mathfrak{M}, w \models \varphi$))
2. φ wynika globalnie z Γ w logice **L**:
$\Gamma \mid\models_L \varphi$ wtw $\forall_{\mathfrak{M} \in MOD(\mathbf{L})}$
(jeżeli $\mathfrak{M} \models \Gamma$, to $\mathfrak{M} \models \varphi$))

LOGIKI MODALNE – WYNIKANIE I DOWIEDLNOŚĆ

Wynikanie lokalne i globalne

1. φ wynika lokalnie z Γ w logice **L**:
$\Gamma \models_L \varphi$ wtw, $\forall_{\mathfrak{M} \in MOD(\mathbf{L})}(\|\Gamma\|_{\mathfrak{M}} \subseteq \|\varphi\|_{\mathfrak{M}})$
(inaczej: $\forall_{\mathfrak{M} \in MOD(\mathbf{L})}, \forall_{w \in \mathcal{W}_{\mathfrak{M}}}$ (jeżeli $\mathfrak{M}, w \models \Gamma$, to $\mathfrak{M}, w \models \varphi$))
2. φ wynika globalnie z Γ w logice **L**:
$\Gamma \Vdash\!\models_L \varphi$ wtw $\forall_{\mathfrak{M} \in MOD(\mathbf{L})}$
(jeżeli $\mathfrak{M} \models \Gamma$, to $\mathfrak{M} \models \varphi$))

Twierdzenie Jeżeli $\Gamma \models_L \varphi$, to $\Gamma \Vdash\!\models_L \varphi$, ale nie odwrotnie.

LOGIKI MODALNE – WYNIKANIE I DOWIEDLNOŚĆ

Wynikanie lokalne i globalne

1. φ wynika lokalnie z Γ w logice **L**:
$\Gamma \models_L \varphi$ wtw, $\forall_{\mathfrak{M} \in MOD(\mathbf{L})}(\|\Gamma\|_{\mathfrak{M}} \subseteq \|\varphi\|_{\mathfrak{M}})$
(inaczej: $\forall_{\mathfrak{M} \in MOD(\mathbf{L})}, \forall_{w \in \mathcal{W}_{\mathfrak{M}}}$ (jeżeli $\mathfrak{M}, w \vDash \Gamma$, to $\mathfrak{M}, w \vDash \varphi$))
2. φ wynika globalnie z Γ w logice **L**:
$\Gamma \mid\models_L \varphi$ wtw $\forall_{\mathfrak{M} \in MOD(\mathbf{L})}$
(jeżeli $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$, to $\mathfrak{M} \vDash \varphi$))

Twierdzenie Jeżeli $\Gamma \models_L \varphi$, to $\Gamma \mid\models_L \varphi$, ale nie odwrotnie.

Przykład:
$\varphi \mid\models_L \Box\varphi$, ale $\varphi \not\models_L \Box\varphi$.

LOGIKI MODALNE – WYNIKANIE I DOWIEDLNOŚĆ

Dowiedlność lokalna i globalna

LOGIKI MODALNE – WYNIKANIE I DOWIEDLNOŚĆ

Dowiedlność lokalna i globalna

1. $\Gamma \vdash_L \varphi$ wtw $\vdash_L \bigwedge\Gamma' \rightarrow \varphi$, dla pewnego skończonego $\Gamma' \subseteq \Gamma$

LOGIKI MODALNE – WYNIKANIE I DOWIEDLNOŚĆ

Dowiedlność lokalna i globalna

1. $\Gamma \vdash_L \varphi$ wtw $\vdash_L \bigwedge\Gamma' \to \varphi$, dla pewnego skończonego $\Gamma' \subseteq \Gamma$
2. $\Gamma \Vdash_L \varphi$ wtw istnieje dowód φ z Γ na gruncie **L**

LOGIKI MODALNE – WYNIKANIE I DOWIEDLNOŚĆ

Dowiedlność lokalna i globalna

1. $\Gamma \vdash_L \varphi$ wtw $\vdash_L \bigwedge\Gamma' \to \varphi$, dla pewnego skończonego $\Gamma' \subseteq \Gamma$
2. $\Gamma \Vdash_L \varphi$ wtw istnieje dowód φ z Γ na gruncie **L**

$\Vdash$ jest relacją mocniejszą od $\vdash$, gdyż dla $\Vdash$ nie zachodzi *twierdzenie o dedukcji*, które w przypadku $\vdash$ jest spełnione z definicji. Dla przykładu, mamy $p \Vdash_L \Box p$ (z racji domknięcia na (RG)), ale $p \nvdash_L \Box p$ (bo $\nvdash_L p \to \Box p$). Natomiast zachodzi zależność jednostronna:
Jeżeli $\Gamma \vdash_L \varphi$, to $\Gamma \Vdash_L \varphi$

LOGIKI MODALNE – WYNIKANIE I DOWIEDLNOŚĆ

Mocna adekwatność

Wynikanie lokalne odpowiada dowiedlności typu $\vdash_L$, a globalne dowiedlności typu $\Vdash_L$, w tym sensie, że twierdzenie 1. i 2. można wzmocnić otrzymując mocne twierdzenia o adekwatności:

LOGIKI MODALNE – WYNIKANIE I DOWIEDLNOŚĆ

Mocna adekwatność

Wynikanie lokalne odpowiada dowiedlności typu $\vdash_L$, a globalne dowiedlności typu $\Vdash_L$, w tym sensie, że twierdzenie 1. i 2. można wzmocnić otrzymując mocne twierdzenia o adekwatności:

Twierdzenie

LOGIKI MODALNE – WYNIKANIE I DOWIEDLNOŚĆ

Mocna adekwatność

Wynikanie lokalne odpowiada dowiedlności typu $\vdash_L$, a globalne dowiedlności typu $\Vdash_L$, w tym sensie, że twierdzenie 1. i 2. można wzmocnić otrzymując mocne twierdzenia o adekwatności:

Twierdzenie

1. $\Gamma \vdash_L \varphi$ *wtw*, $\Gamma \models_L \varphi$

LOGIKI MODALNE – WYNIKANIE I DOWIEDLNOŚĆ

Mocna adekwatność

Wynikanie lokalne odpowiada dowiedlności typu $\vdash_L$, a globalne dowiedlności typu $\Vdash_L$, w tym sensie, że twierdzenie 1. i 2. można wzmocnić otrzymując mocne twierdzenia o adekwatności:

Twierdzenie

1. $\Gamma \vdash_L \varphi$ *wtw*, $\Gamma \models_L \varphi$
2. $\Gamma \Vdash_L \varphi$ *wtw*, $\Gamma \mid\models_L \varphi$

LOGIKI MODALNE – WYNIKANIE I DOWIEDLNOŚĆ

Mocna adekwatność

Wynikanie lokalne odpowiada dowiedlności typu $\vdash_L$, a globalne dowiedlności typu $\Vdash_L$, w tym sensie, że twierdzenie 1. i 2. można wzmocnić otrzymując mocne twierdzenia o adekwatności:

Twierdzenie

1. $\Gamma \vdash_L \varphi$ *wtw*, $\Gamma \models_L \varphi$
2. $\Gamma \Vdash_L \varphi$ *wtw*, $\Gamma \mid\models_L \varphi$
3. $\Gamma \models_L \varphi$ *wtw*, $\{1 : +\psi_1,\ ...,\ 1 : +\psi_n,\ 1 : -\varphi\}$ ma dowód w **L**-EDB

LOGIKI MODALNE – WYNIKANIE I DOWIEDLNOŚĆ

Mocna adekwatność

Wynikanie lokalne odpowiada dowiedlności typu $\vdash_L$, a globalne dowiedlności typu $\Vdash_L$, w tym sensie, że twierdzenie 1. i 2. można wzmocnić otrzymując mocne twierdzenia o adekwatności:

Twierdzenie

1. $\Gamma \vdash_L \varphi$ *wtw*, $\Gamma \models_L \varphi$
2. $\Gamma \Vdash_L \varphi$ *wtw*, $\Gamma \mid\models_L \varphi$
3. $\Gamma \models_L \varphi$ *wtw*, $\{1 : +\psi_1, \ldots, 1 : +\psi_n, 1 : -\varphi\}$ ma dowód w **L**-EDB

gdzie $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \subseteq \Gamma$

LOGIKI MODALNE – DEDUKCJA NATURALNA

Reguły inferencji:

- ($Dual$) $\neg\Box\varphi$ / $\Diamond\neg\varphi$; $\neg\Diamond\varphi$ / $\Box\neg\varphi$

LOGIKI MODALNE – DEDUKCJA NATURALNA

Reguły inferencji:

- (Dual) $\neg\Box\varphi$ / $\Diamond\neg\varphi$; $\neg\Diamond\varphi$ / $\Box\neg\varphi$
- $(\Box E)$ $\Box\varphi$ / φ; $(\Diamond D)$ φ / $\Diamond\varphi$

LOGIKI MODALNE – DEDUKCJA NATURALNA

Reguły inferencji:

- ($Dual$) $\neg\Box\varphi$ / $\Diamond\neg\varphi$; $\neg\Diamond\varphi$ / $\Box\neg\varphi$
- ($\Box E$) $\Box\varphi$ / φ; ($\Diamond D$) φ / $\Diamond\varphi$
- ($\Box D$) φ / $\Box\varphi$, gdzie φ jest tezą **L**

LOGIKI MODALNE – DEDUKCJA NATURALNA

Reguły inferencji:

- $(Dual)$ $\neg\Box\varphi$ / $\Diamond\neg\varphi$; $\neg\Diamond\varphi$ / $\Box\neg\varphi$
- $(\Box E)$ $\Box\varphi$ / φ; $(\Diamond D)$ φ / $\Diamond\varphi$
- $(\Box D)$ φ / $\Box\varphi$, gdzie φ jest tezą **L**
- $(\Diamond E)$ $\Diamond\varphi$ / φ, gdzie φ jest tezą **L**

LOGIKI MODALNE – DEDUKCJA NATURALNA

Reguły inferencji:

- $(Dual)$ $\neg\Box\varphi$ / $\Diamond\neg\varphi$; $\neg\Diamond\varphi$ / $\Box\neg\varphi$
- $(\Box E)$ $\Box\varphi$ / φ; $(\Diamond D)$ φ / $\Diamond\varphi$
- $(\Box D)$ φ / $\Box\varphi$, gdzie φ jest tezą **L**
- $(\Diamond E)$ $\Diamond\varphi$ / φ, gdzie φ jest tezą **L**
- $(\Box D')$ φ / $\Box\varphi$, gdzie φ jest formułą modalną lub tezą **L**

LOGIKI MODALNE – DEDUKCJA NATURALNA

Reguły inferencji:

- $(Dual)$ $\neg\Box\varphi$ / $\Diamond\neg\varphi$; $\neg\Diamond\varphi$ / $\Box\neg\varphi$
- $(\Box E)$ $\Box\varphi$ / φ; $(\Diamond D)$ φ / $\Diamond\varphi$
- $(\Box D)$ φ / $\Box\varphi$, gdzie φ jest tezą **L**
- $(\Diamond E)$ $\Diamond\varphi$ / φ, gdzie φ jest tezą **L**
- $(\Box D')$ φ / $\Box\varphi$, gdzie φ jest formułą modalną lub tezą **L**
- $(\Diamond E')$ $\Diamond\varphi$ / φ, gdzie φ jest formułą modalną lub tezą **L**

LOGIKI MODALNE – DEDUKCJA NATURALNA

Reguły inferencji:

- $(Dual)$ $\neg\Box\varphi$ / $\Diamond\neg\varphi$; $\neg\Diamond\varphi$ / $\Box\neg\varphi$
- $(\Box E)$ $\Box\varphi$ / φ; $(\Diamond D)$ φ / $\Diamond\varphi$
- $(\Box D)$ φ / $\Box\varphi$, gdzie φ jest tezą **L**
- $(\Diamond E)$ $\Diamond\varphi$ / φ, gdzie φ jest tezą **L**
- $(\Box D')$ φ / $\Box\varphi$, gdzie φ jest formułą modalną lub tezą **L**
- $(\Diamond E')$ $\Diamond\varphi$ / φ, gdzie φ jest formułą modalną lub tezą **L**
- schemat meta-reguły:
  (MOD) $\Box\varphi_1, ..., \Box\varphi_n$ / $\Box\psi$ pod warunkiem, że $\varphi_1, ..., \varphi_n \vdash_L \psi$

LOGIKI MODALNE – DEDUKCJA NATURALNA

System DN dla **K, T, S4, S5**

Do systemu DN Słupeckiego/Borkowskiego należy dodać:

LOGIKI MODALNE – DEDUKCJA NATURALNA

System DN dla K, T, S4, S5

Do systemu DN Słupeckiego/Borkowskiego należy dodać:

a) dla **K** – $(MOD), (Dual), (\Box D), (\Diamond E)$

LOGIKI MODALNE – DEDUKCJA NATURALNA

System DN dla **K, T, S4, S5**

Do systemu DN Słupeckiego/Borkowskiego należy dodać:

a) dla **K** – $(MOD), (Dual), (\Box D), (\Diamond E)$

b) dla **T** – do DN-**K** dodajemy $(\Box E), (\Diamond D)$

LOGIKI MODALNE – DEDUKCJA NATURALNA

System DN dla **K**, **T**, **S4**, **S5**

Do systemu DN Słupeckiego/Borkowskiego należy dodać:
a) dla **K** – $(MOD), (Dual), (\Box D), (\Diamond E)$
b) dla **T** – do DN-**K** dodajemy $(\Box E), (\Diamond D)$
c) dla **S4** – w DN-**T** zamieniamy $(\Box D), (\Diamond E)$ na $(\Box D'), (\Diamond E')$, gdzie przez formułę modalną w przypadku $(\Box D')$ rozumiemy dowolną formułę postaci $\Box\varphi$ lub $\neg\Diamond\varphi$, a w przypadku $(\Diamond E')$ dowolną formułę postaci $\Diamond\varphi$ lub $\neg\Box\varphi$

LOGIKI MODALNE – DEDUKCJA NATURALNA

System DN dla **K, T, S4, S5**

Do systemu DN Słupeckiego/Borkowskiego należy dodać:
a) dla **K** – $(MOD), (Dual), (\Box D), (\Diamond E)$
b) dla **T** – do DN-**K** dodajemy $(\Box E), (\Diamond D)$
c) dla **S4** – w DN-**T** zamieniamy $(\Box D), (\Diamond E)$ na $(\Box D'), (\Diamond E')$, gdzie przez formułę modalną w przypadku $(\Box D')$ rozumiemy dowolną formułę postaci $\Box\varphi$ lub $\neg\Diamond\varphi$, a w przypadku $(\Diamond E')$ dowolną formułę postaci $\Diamond\varphi$ lub $\neg\Box\varphi$
d) dla **S5** – DN-**S4** ale formuła modalna w obu przypadkach to dowolna formuła postaci $\Box\varphi, \Diamond\varphi, \neg\Box\varphi$ lub $\neg\Diamond\varphi$

LOGIKI MODALNE – DEDUKCJA NATURALNA

Przykład dowodu 1

$\vdash_K (\Box p \to \Diamond q) \to \Diamond(p \to q)$

1.	$\Box p \to \Diamond q$	z
2.	$\neg\Diamond(p \to q)$	zn
3.	$\Box\neg(p \to q)$	$(Dual, 2)$
4.	$\Box(p \land \neg q)$	$(MOD, 3)$
5.	$\Box p$	$(MOD, 4)$
6.	$\Box\neg q$	$(MOD, 4)$
7.	$\Diamond q$	$(\to E, 1, 5)$
8.	$\neg\Diamond q$	$(Dual, 6)$
9.	$\bot$	$(7, 8)$

LOGIKI MODALNE – DEDUKCJA NATURALNA

Przykład dowodu 2

$\vdash_{S5} \Box(p \to \Box q) \to (\Diamond p \to q)$

1.	$\Box(p \to \Box q)$	z
2.	$\Diamond p$	z
3.	$\neg q$	zn
4.	$\Diamond\neg q$	$(\Diamond D, 3)$
5.	$\neg\Box q$	$(Dual, 4)$
6.	$\Box\neg\Box q$	$(\Box D', 5)$
7.	$\Box\neg p$	$(MOD, 1, 6)$
8.	$\neg\Diamond p$	$(Dual, 7)$
9.	$\bot$	$(2, 8)$

LOGIKI MODALNE – DYGRESJA I

Ontologiczny dowód istnienia Boga

LOGIKI MODALNE – DYGRESJA I

Ontologiczny dowód istnienia Boga

Anzelm

LOGIKI MODALNE – DYGRESJA I

Ontologiczny dowód istnienia Boga

Anzelm $\Longrightarrow$ Malcolm, Hartshorne, Purtill

LOGIKI MODALNE – DYGRESJA I

Ontologiczny dowód istnienia Boga

Anzelm $\Longrightarrow$ Malcolm, Hartshorne, Purtill

Dwa założenia:

LOGIKI MODALNE – DYGRESJA I

Ontologiczny dowód istnienia Boga

Anzelm $\Longrightarrow$ Malcolm, Hartshorne, Purtill

Dwa założenia:

1. Możliwość istnienia – $\Diamond B$

LOGIKI MODALNE – DYGRESJA I

Ontologiczny dowód istnienia Boga

Anzelm $\Longrightarrow$ Malcolm, Hartshorne, Purtill

Dwa założenia:

1. Możliwość istnienia – $\Diamond B$
2. Nieprzypadkowość istnienia – $\Box(B \rightarrow \Box B)$

LOGIKI MODALNE – DYGRESJA I

Ontologiczny dowód istnienia Boga

Anzelm $\Longrightarrow$ Malcolm, Hartshorne, Purtill

Dwa założenia:

1. Możliwość istnienia – $\Diamond B$
2. Nieprzypadkowość istnienia – $\Box(B \to \Box B)$ (lub $\neg\Diamond(B \wedge \Diamond\neg B)$)

LOGIKI MODALNE – DYGRESJA I

Ontologiczny dowód istnienia Boga

Anzelm $\Longrightarrow$ Malcolm, Hartshorne, Purtill

Dwa założenia:

1. Możliwość istnienia – $\Diamond B$
2. Nieprzypadkowość istnienia – $\Box(B \rightarrow \Box B)$ (lub $\neg\Diamond(B \wedge \Diamond\neg B)$)

S5$+1+2 \vdash B$

gdyż $\vdash_{S5} \Box(B \rightarrow \Box B) \rightarrow (\Diamond B \rightarrow B)$