LOGIKA II – WPROWADZENIE DO LOGIK NIEKLASYCZNYCH

Andrzej Indrzejczak

Katedra Logiki i Metodologii Nauk UŁ

Łódź, semestr zimowy 2008/2009

LOGIKI TEMPORALNE

Do czego potrzebna jest logika temporalna?

LOGIKI TEMPORALNE

Do czego potrzebna jest logika temporalna?

- tradycyjne filozoficzne problemy dotyczące natury czasu (zmiana w czasie a tożsamość, determinizm)

LOGIKI TEMPORALNE

Do czego potrzebna jest logika temporalna?

- tradycyjne filozoficzne problemy dotyczące natury czasu (zmiana w czasie a tożsamość, determinizm)
- lingwistyka; analiza czasów gramatycznych

LOGIKI TEMPORALNE

Do czego potrzebna jest logika temporalna?

- tradycyjne filozoficzne problemy dotyczące natury czasu (zmiana w czasie a tożsamość, determinizm)
- lingwistyka; analiza czasów gramatycznych
- fizyka; czas a zmiana, czas jako wymiar, wyzwania nowej fizyki

LOGIKI TEMPORALNE

Do czego potrzebna jest logika temporalna?

- tradycyjne filozoficzne problemy dotyczące natury czasu (zmiana w czasie a tożsamość, determinizm)
- lingwistyka; analiza czasów gramatycznych
- fizyka; czas a zmiana, czas jako wymiar, wyzwania nowej fizyki
- informatyka; analiza realizacji programów, ich poprawności itp.

LOGIKI TEMPORALNE

Do czego potrzebna jest logika temporalna?

- tradycyjne filozoficzne problemy dotyczące natury czasu (zmiana w czasie a tożsamość, determinizm)
- lingwistyka; analiza czasów gramatycznych
- fizyka; czas a zmiana, czas jako wymiar, wyzwania nowej fizyki
- informatyka; analiza realizacji programów, ich poprawności itp.
- AI; problemy dotyczące planowania, kolejności akcji, przetwarzania wiedzy zmieniającej się w czasie itp.

LOGIKI TEMPORALNE

Do czego potrzebna jest logika temporalna?

- tradycyjne filozoficzne problemy dotyczące natury czasu (zmiana w czasie a tożsamość, determinizm)
- lingwistyka; analiza czasów gramatycznych
- fizyka; czas a zmiana, czas jako wymiar, wyzwania nowej fizyki
- informatyka; analiza realizacji programów, ich poprawności itp.
- AI; problemy dotyczące planowania, kolejności akcji, przetwarzania wiedzy zmieniającej się w czasie itp.

LOGIKI TEMPORALNE

Historia

LOGIKI TEMPORALNE

Historia

1. paradoksy Zenona

LOGIKI TEMPORALNE

Historia

1. paradoksy Zenona
2. Arystoteles (Fizyka, bitwa morska)

LOGIKI TEMPORALNE

Historia

1. paradoksy Zenona
2. Arystoteles (Fizyka, bitwa morska)
3. Diodor Kronos (temporalne definicje modalności, argument mistrzowski)

LOGIKI TEMPORALNE

Historia

1. paradoksy Zenona
2. Arystoteles (Fizyka, bitwa morska)
3. Diodor Kronos (temporalne definicje modalności, argument mistrzowski)
4. Augustyn – czas subiektywny

LOGIKI TEMPORALNE

Historia

1. paradoksy Zenona
2. Arystoteles (Fizyka, bitwa morska)
3. Diodor Kronos (temporalne definicje modalności, argument mistrzowski)
4. Augustyn – czas subiektywny
5. przedwiedza, predestynacja, wolna wola (Augustyn, Boecjusz, Anzelm, Ockham)

LOGIKI TEMPORALNE

Historia

1. paradoksy Zenona
2. Arystoteles (Fizyka, bitwa morska)
3. Diodor Kronos (temporalne definicje modalności, argument mistrzowski)
4. Augustyn – czas subiektywny
5. przedwiedza, predestynacja, wolna wola (Augustyn, Boecjusz, Anzelm, Ockham)
6. Ockham (sylogizmy temporalne)

LOGIKI TEMPORALNE

Historia

1. paradoksy Zenona
2. Arystoteles (Fizyka, bitwa morska)
3. Diodor Kronos (temporalne definicje modalności, argument mistrzowski)
4. Augustyn – czas subiektywny
5. przedwiedza, predestynacja, wolna wola (Augustyn, Boecjusz, Anzelm, Ockham)
6. Ockham (sylogizmy temporalne)
7. Newton – czas jako wymiar

LOGIKI TEMPORALNE

Historia

1. paradoksy Zenona
2. Arystoteles (Fizyka, bitwa morska)
3. Diodor Kronos (temporalne definicje modalności, argument mistrzowski)
4. Augustyn – czas subiektywny
5. przedwiedza, predestynacja, wolna wola (Augustyn, Boecjusz, Anzelm, Ockham)
6. Ockham (sylogizmy temporalne)
7. Newton – czas jako wymiar
8. Leibniz – czas jako relacja

LOGIKI TEMPORALNE

Historia

1. paradoksy Zenona
2. Arystoteles (Fizyka, bitwa morska)
3. Diodor Kronos (temporalne definicje modalności, argument mistrzowski)
4. Augustyn – czas subiektywny
5. przedwiedza, predestynacja, wolna wola (Augustyn, Boecjusz, Anzelm, Ockham)
6. Ockham (sylogizmy temporalne)
7. Newton – czas jako wymiar
8. Leibniz – czas jako relacja
9. Kant – czas jako aprioryczna forma naoczności, pierwsza antynomia

LOGIKI TEMPORALNE

Współczesność

LOGIKI TEMPORALNE

Współczesność

1. McTaggart (nierealność czasu, seria A i B)

LOGIKI TEMPORALNE

Współczesność

1. McTaggart (nierealność czasu, seria A i B)
2. Bergson – krytyka naukowego ujęcia czasu

LOGIKI TEMPORALNE

Współczesność

1. McTaggart (nierealność czasu, seria A i B)
2. Bergson – krytyka naukowego ujęcia czasu
3. Husserl, Ingarden – fenomenologiczna analiza czasu

LOGIKI TEMPORALNE

Współczesność

1. McTaggart (nierealność czasu, seria A i B)
2. Bergson – krytyka naukowego ujęcia czasu
3. Husserl, Ingarden – fenomenologiczna analiza czasu
4. Heidegger, Sartre – egzystencjalistyczne doświadczenie czasu

LOGIKI TEMPORALNE

Współczesność

1. McTaggart (nierealność czasu, seria A i B)
2. Bergson – krytyka naukowego ujęcia czasu
3. Husserl, Ingarden – fenomenologiczna analiza czasu
4. Heidegger, Sartre – egzystencjalistyczne doświadczenie czasu
5. Einstein (podejście relatywistyczne)

LOGIKI TEMPORALNE

Współczesność

1. McTaggart (nierealność czasu, seria A i B)
2. Bergson – krytyka naukowego ujęcia czasu
3. Husserl, Ingarden – fenomenologiczna analiza czasu
4. Heidegger, Sartre – egzystencjalistyczne doświadczenie czasu
5. Einstein (podejście relatywistyczne)
6. Russell – analiza struktur interwałowych

LOGIKI TEMPORALNE

Współczesność

1. McTaggart (nierealność czasu, seria A i B)
2. Bergson – krytyka naukowego ujęcia czasu
3. Husserl, Ingarden – fenomenologiczna analiza czasu
4. Heidegger, Sartre – egzystencjalistyczne doświadczenie czasu
5. Einstein (podejście relatywistyczne)
6. Russell – analiza struktur interwałowych
7. Reichenbach – analiza czasów gramatycznych

LOGIKI TEMPORALNE

Współczesność

1. McTaggart (nierealność czasu, seria A i B)
2. Bergson – krytyka naukowego ujęcia czasu
3. Husserl, Ingarden – fenomenologiczna analiza czasu
4. Heidegger, Sartre – egzystencjalistyczne doświadczenie czasu
5. Einstein (podejście relatywistyczne)
6. Russell – analiza struktur interwałowych
7. Reichenbach – analiza czasów gramatycznych
8. Prior (standardowe logiki temporalne)

LOGIKI TEMPORALNE

Współczesność

1. McTaggart (nierealność czasu, seria A i B)
2. Bergson – krytyka naukowego ujęcia czasu
3. Husserl, Ingarden – fenomenologiczna analiza czasu
4. Heidegger, Sartre – egzystencjalistyczne doświadczenie czasu
5. Einstein (podejście relatywistyczne)
6. Russell – analiza struktur interwałowych
7. Reichenbach – analiza czasów gramatycznych
8. Prior (standardowe logiki temporalne)
9. Pnueli (logiki programów)

LOGIKI TEMPORALNE

Podstawowe kontrowersje odnośnie natury czasu

LOGIKI TEMPORALNE

Podstawowe kontrowersje odnośnie natury czasu

1. subiektywny/obiektywny

LOGIKI TEMPORALNE

Podstawowe kontrowersje odnośnie natury czasu

1. subiektywny/obiektywny
2. względny/absolutny

LOGIKI TEMPORALNE

Podstawowe kontrowersje odnośnie natury czasu

1. subiektywny/obiektywny
2. względny/absolutny
3. punkty/interwały/zdarzenia

LOGIKI TEMPORALNE

Podstawowe kontrowersje odnośnie natury czasu

1. subiektywny/obiektywny
2. względny/absolutny
3. punkty/interwały/zdarzenia
4. skończony/nieskończony

LOGIKI TEMPORALNE

Podstawowe kontrowersje odnośnie natury czasu

1. subiektywny/obiektywny
2. względny/absolutny
3. punkty/interwały/zdarzenia
4. skończony/nieskończony
5. liniowy/rozgałęziony

LOGIKI TEMPORALNE

Podstawowe kontrowersje odnośnie natury czasu

1. subiektywny/obiektywny
2. względny/absolutny
3. punkty/interwały/zdarzenia
4. skończony/nieskończony
5. liniowy/rozgałęziony
6. dyskretny/ciągły/gęsty

LOGIKI TEMPORALNE

Podstawowe kontrowersje odnośnie natury czasu

1. subiektywny/obiektywny
2. względny/absolutny
3. punkty/interwały/zdarzenia
4. skończony/nieskończony
5. liniowy/rozgałęziony
6. dyskretny/ciągły/gęsty

	subiektywny	obiektywny
względny	Augustyn	Einstein
absolutny	Kant	Newton

LOGIKI TEMPORALNE

Logiki temporalne czasu punktowego – język

LOGIKI TEMPORALNE

Logiki temporalne czasu punktowego – język

Standardowy język bimodalny z czterema jednoargumentowymi funktorami temporalnymi:

LOGIKI TEMPORALNE

Logiki temporalne czasu punktowego – język

Standardowy język bimodalny z czterema jednoargumentowymi funktorami temporalnymi:
G dla "odtąd zawsze" ($\Box_F$, $[F]$)

LOGIKI TEMPORALNE

Logiki temporalne czasu punktowego – język

Standardowy język bimodalny z czterema jednoargumentowymi funktorami temporalnymi:
G dla "odtąd zawsze" ($\Box_F$, $[F]$)
F dla "nastąpi" ($\Diamond_F$, $\langle F \rangle$)

LOGIKI TEMPORALNE

Logiki temporalne czasu punktowego – język

Standardowy język bimodalny z czterema jednoargumentowymi funktorami temporalnymi:
G dla "odtąd zawsze" ($\Box_F$, $[F]$)
F dla "nastąpi" ($\Diamond_F$, $\langle F\rangle$)
H dla "dotąd zawsze" ($\Box_P$, $[P]$)

LOGIKI TEMPORALNE

Logiki temporalne czasu punktowego – język

Standardowy język bimodalny z czterema jednoargumentowymi funktorami temporalnymi:

G dla "odtąd zawsze" ($\Box_F$, $[F]$)
F dla "nastąpi" ($\Diamond_F$, $\langle F \rangle$)
H dla "dotąd zawsze" ($\Box_P$, $[P]$)
P dla "nastąpiło" ($\Diamond_P$, $\langle P \rangle$)

LOGIKI TEMPORALNE

Logiki temporalne czasu punktowego – język

Standardowy język bimodalny z czterema jednoargumentowymi funktorami temporalnymi:
G dla "odtąd zawsze" ($\Box_F$, $[F]$)
F dla "nastąpi" ($\Diamond_F$, $\langle F \rangle$)
H dla "dotąd zawsze" ($\Box_P$, $[P]$)
P dla "nastąpiło" ($\Diamond_P$, $\langle P \rangle$)

Uwaga! G i F oraz H i P są wzajemnie definiowalne:
$G\varphi \leftrightarrow \neg F \neg \varphi$ oraz $H\varphi \leftrightarrow \neg P \neg \varphi$

LOGIKI TEMPORALNE

Przykład 1:

LOGIKI TEMPORALNE

Przykład 1:

Kazik śpi.

LOGIKI TEMPORALNE

Przykład 1:

Kazik śpi. $:= p$

LOGIKI TEMPORALNE

Przykład 1:

Kazik śpi. $:= p$
Kazik będzie spał.

LOGIKI TEMPORALNE

Przykład 1:

Kazik śpi. $:= p$

Kazik będzie spał. $:= Fp$

LOGIKI TEMPORALNE

Przykład 1:

Kazik śpi. $:= p$

Kazik będzie spał. $:= Fp$

Kazik nie spał ale miał iść spać.

LOGIKI TEMPORALNE

Przykład 1:

Kazik śpi. $:= p$
Kazik będzie spał. $:= Fp$
Kazik nie spał ale miał iść spać. $:= P(\neg p \wedge Fp)$

LOGIKI TEMPORALNE

Przykład 1:

Kazik śpi. $:= p$

Kazik będzie spał. $:= Fp$

Kazik nie spał ale miał iść spać. $:= P(\neg p \wedge Fp)$

Jeżeli Kazik spał jakiś czas temu, to już nie śpi lub kiedyś nie będzie spał.

LOGIKI TEMPORALNE

Przykład 1:

Kazik śpi. $:= p$
Kazik będzie spał. $:= Fp$
Kazik nie spał ale miał iść spać. $:= P(\neg p \wedge Fp)$
Jeżeli Kazik spał jakiś czas temu, to już nie śpi lub kiedyś nie będzie spał. $:= Pp \rightarrow \neg p \vee F\neg p$

LOGIKI TEMPORALNE

Przykład 1:

Kazik śpi. $:= p$
Kazik będzie spał. $:= Fp$
Kazik nie spał ale miał iść spać. $:= P(\neg p \wedge Fp)$
Jeżeli Kazik spał jakiś czas temu, to już nie śpi lub kiedyś nie będzie spał.
$:= Pp \rightarrow \neg p \vee F\neg p$
Kazik się wyspał albo kiedyś się wyśpi.

LOGIKI TEMPORALNE

Przykład 1:

Kazik śpi. $:= p$

Kazik będzie spał. $:= Fp$

Kazik nie spał ale miał iść spać. $:= P(\neg p \wedge Fp)$

Jeżeli Kazik spał jakiś czas temu, to już nie śpi lub kiedyś nie będzie spał. $:= Pp \rightarrow \neg p \vee F\neg p$

Kazik się wyspał albo kiedyś się wyśpi. $:= PPp \vee FPp$

LOGIKI TEMPORALNE

Semantyka relacyjna – dwa warianty

LOGIKI TEMPORALNE

Semantyka relacyjna – dwa warianty

Struktury dla bimodalnych logik temporalnych są postaci $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R}_F, \mathcal{R}_P \rangle$, gdzie $\mathcal{T}$ jest zbiorem punktów czasowych, $\mathcal{R}_F$ jest relacją następstwa w czasie, a $\mathcal{R}_P$ jest relacją poprzedzania w czasie. Dodatkowo zakładamy, że $\mathcal{R}_P$ jest konwersem $\mathcal{R}_F$. Z tego powodu można je zastąpić prostszymi strukturami z jedną relacją.

LOGIKI TEMPORALNE

Semantyka relacyjna – dwa warianty

Struktury dla bimodalnych logik temporalnych są postaci $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R}_F, \mathcal{R}_P \rangle$, gdzie $\mathcal{T}$ jest zbiorem punktów czasowych, $\mathcal{R}_F$ jest relacją następstwa w czasie, a $\mathcal{R}_P$ jest relacją poprzedzania w czasie. Dodatkowo zakładamy, że $\mathcal{R}_P$ jest konwersem $\mathcal{R}_F$. Z tego powodu można je zastąpić prostszymi strukturami z jedną relacją.
Struktura relacyjna:
<u>Strukturą relacyjną</u>, albo <u>ramą</u> (frame) jest dowolna para $\mathfrak{F} = \langle \mathcal{T}, \mathcal{R} \rangle$ gdzie:

LOGIKI TEMPORALNE

Semantyka relacyjna – dwa warianty

Struktury dla bimodalnych logik temporalnych są postaci $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R}_F, \mathcal{R}_P \rangle$, gdzie $\mathcal{T}$ jest zbiorem punktów czasowych, $\mathcal{R}_F$ jest relacją następstwa w czasie, a $\mathcal{R}_P$ jest relacją poprzedzania w czasie. Dodatkowo zakładamy, że $\mathcal{R}_P$ jest konwersem $\mathcal{R}_F$. Z tego powodu można je zastąpić prostszymi strukturami z jedną relacją.

Struktura relacyjna:

Strukturą relacyjną, albo ramą (frame) jest dowolna para $\mathfrak{F} = \langle \mathcal{T}, \mathcal{R} \rangle$ gdzie:

- dziedzina to $\mathcal{T} \neq \varnothing$, który jest zbiorem punktów czasowych (momentów);

LOGIKI TEMPORALNE

Semantyka relacyjna – dwa warianty

Struktury dla bimodalnych logik temporalnych są postaci $\langle \mathcal{T}, \mathcal{R}_F, \mathcal{R}_P \rangle$, gdzie $\mathcal{T}$ jest zbiorem punktów czasowych, $\mathcal{R}_F$ jest relacją następstwa w czasie, a $\mathcal{R}_P$ jest relacją poprzedzania w czasie. Dodatkowo zakładamy, że $\mathcal{R}_P$ jest konwersem $\mathcal{R}_F$. Z tego powodu można je zastąpić prostszymi strukturami z jedną relacją.
Struktura relacyjna:
Strukturą relacyjną, albo ramą (frame) jest dowolna para $\mathfrak{F} = \langle \mathcal{T}, \mathcal{R} \rangle$ gdzie:

- dziedzina to $\mathcal{T} \neq \varnothing$, który jest zbiorem punktów czasowych (momentów);
- $\mathcal{R}$ to binarna relacja na $\mathcal{T}$, zwana relacją następstwa czasowego.

LOGIKI TEMPORALNE

Model na strukturze

LOGIKI TEMPORALNE

Model na strukturze

Modelem na danej strukturze $\mathfrak{F}$ jest dowolny układ $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{F}, V \rangle$, gdzie V jest funkcją waluacji dla zmiennych, tj. $V : ZZ \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{T})$. ($ZZ$ to zbiór zmiennych zdaniowych a $\mathcal{P}(\mathcal{T})$ to zbiór potęgowy na $\mathcal{T}$).

LOGIKI TEMPORALNE

Model na strukturze

Modelem na danej strukturze $\mathfrak{F}$ jest dowolny układ $\mathfrak{M} = \langle\, \mathfrak{F}, V\rangle$, gdzie V jest funkcją waluacji dla zmiennych, tj. $V : ZZ \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{T})$. ($ZZ$ to zbiór zmiennych zdaniowych a $\mathcal{P}(\mathcal{T})$ to zbiór potęgowy na $\mathcal{T}$).
Dziedzinę danego modelu $\mathfrak{M}$ będziemy oznaczać przez $\mathcal{T}_{\mathfrak{M}}$.

LOGIKI TEMPORALNE

Model na strukturze

Modelem na danej strukturze $\mathfrak{F}$ jest dowolny układ $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{F}, V \rangle$, gdzie V jest funkcją waluacji dla zmiennych, tj. $V : ZZ \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{T})$. ($ZZ$ to zbiór zmiennych zdaniowych a $\mathcal{P}(\mathcal{T})$ to zbiór potęgowy na $\mathcal{T}$).
Dziedzinę danego modelu $\mathfrak{M}$ będziemy oznaczać przez $\mathcal{T}_{\mathfrak{M}}$.
Definicję *spełniania formuły* φ *w punkcie* t *modelu* $\mathfrak{M}$ ($\mathfrak{M}, t \models \varphi$) wyrażają poniższe warunki:

LOGIKI TEMPORALNE

Spełnianie

LOGIKI TEMPORALNE

Spełnianie

$\mathfrak{M}, t \vDash p$	wtw	$t \in V(p)$
$\mathfrak{M}, t \vDash \neg\varphi$	wtw	$\mathfrak{M}, t \nvDash \varphi$
$\mathfrak{M}, t \vDash \varphi \wedge \psi$	wtw	$\mathfrak{M}, t \vDash \varphi$ i $\mathfrak{M}, t \vDash \psi$
$\mathfrak{M}, t \vDash \varphi \vee \psi$	wtw	$\mathfrak{M}, t \vDash \varphi$ lub $\mathfrak{M}, t \vDash \psi$
$\mathfrak{M}, t \vDash \varphi \rightarrow \psi$	wtw	$\mathfrak{M}, t \nvDash \varphi$ lub $\mathfrak{M}, t \vDash \psi$
$\mathfrak{M}, t \vDash G\varphi$	wtw	$\mathfrak{M}, t' \vDash \varphi$ dla dowolnego t' takiego, że $\mathcal{R}tt'$
$\mathfrak{M}, t \vDash F\varphi$	wtw	$\mathfrak{M}, t' \vDash \varphi$ dla pewnego t' takiego, że $\mathcal{R}tt'$
$\mathfrak{M}, t \vDash H\varphi$	wtw	$\mathfrak{M}, t' \vDash \varphi$ dla dowolnego t' takiego, że $\mathcal{R}t't$
$\mathfrak{M}, t \vDash P\varphi$	wtw	$\mathfrak{M}, t' \vDash \varphi$ dla pewnego t' takiego, że $\mathcal{R}t't$

LOGIKI TEMPORALNE

Logika Kt

LOGIKI TEMPORALNE

Logika Kt

Definicje spełnialności, falsyfikowalności, prawdziwości w modelu, tautologiczności, wynikania bez zmian (jak w logikach modalnych aletycznych).

LOGIKI TEMPORALNE

Logika Kt

Definicje spełnialności, falsyfikowalności, prawdziwości w modelu, tautologiczności, wynikania bez zmian (jak w logikach modalnych aletycznych).

Łatwo zauważyć, że każda z (par) modalności jest modalnością normalną tzn., że zachodzi aksjomat (K) zarówno dla G jak i dla H, oraz dla obu funktorów mamy domknięcie na regułę (RG).

Logika Kt

Definicje spełnialności, falsyfikowalności, prawdziwości w modelu, tautologiczności, wynikania bez zmian (jak w logikach modalnych aletycznych).
Łatwo zauważyć, że każda z (par) modalności jest modalnością normalną tzn., że zachodzi aksjomat (K) zarówno dla G jak i dla H, oraz dla obu funktorów mamy domknięcie na regułę (RG).
Symetrię przyszłości i przeszłości wyraża para twierdzeń (B) dotyczących interakcji obu modalności:

LOGIKI TEMPORALNE

Logika Kt

Definicje spełnialności, falsyfikowalności, prawdziwości w modelu, tautologiczności, wynikania bez zmian (jak w logikach modalnych aletycznych).

Łatwo zauważyć, że każda z (par) modalności jest modalnością normalną tzn., że zachodzi aksjomat (K) zarówno dla G jak i dla H, oraz dla obu funktorów mamy domknięcie na regułę (RG).

Symetrię przyszłości i przeszłości wyraża para twierdzeń (B) dotyczących interakcji obu modalności:

$\varphi \to GP\varphi \quad \varphi \to HF\varphi$

LOGIKI TEMPORALNE

Logika Kt

Definicje spełnialności, falsyfikowalności, prawdziwości w modelu, tautologiczności, wynikania bez zmian (jak w logikach modalnych aletycznych).
Łatwo zauważyć, że każda z (par) modalności jest modalnością normalną tzn., że zachodzi aksjomat (K) zarówno dla G jak i dla H, oraz dla obu funktorów mamy domknięcie na regułę (RG).
Symetrię przyszłości i przeszłości wyraża para twierdzeń (B) dotyczących interakcji obu modalności:
$\varphi \rightarrow GP\varphi \quad \varphi \rightarrow HF\varphi$
Najsłabsza logika temporalna (zawartość klasy wszystkich struktur), która spełnia podane warunki to **Kt**.

Logika Kt: Ujęcie aksjomatyczne

Logika Kt: Ujęcie aksjomatyczne

A. Schematy aksjomatów:

LOGIKI TEMPORALNE

Logika Kt: Ujęcie aksjomatyczne

A. Schematy aksjomatów:

- Dowolne φ, które jest schematem tezy **KRZ**

LOGIKI TEMPORALNE

Logika Kt: Ujęcie aksjomatyczne

A. Schematy aksjomatów:

- Dowolne φ, które jest schematem tezy **KRZ**
- $(Dual_F)$ $F\varphi \leftrightarrow \neg G \neg \varphi$

LOGIKI TEMPORALNE

Logika Kt: Ujęcie aksjomatyczne

A. Schematy aksjomatów:

- Dowolne φ, które jest schematem tezy **KRZ**
- $(Dual_F)$ $F\varphi \leftrightarrow \neg G \neg \varphi$
- $(Dual_P)$ $P\varphi \leftrightarrow \neg H \neg \varphi$

LOGIKI TEMPORALNE

Logika Kt: Ujęcie aksjomatyczne

A. Schematy aksjomatów:

- Dowolne φ, które jest schematem tezy **KRZ**
- $(Dual_F)$ $F\varphi \leftrightarrow \neg G \neg \varphi$
- $(Dual_P)$ $P\varphi \leftrightarrow \neg H \neg \varphi$
- (K_F) $G(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (G\varphi \rightarrow G\psi)$

LOGIKI TEMPORALNE

Logika Kt: Ujęcie aksjomatyczne

A. Schematy aksjomatów:

- Dowolne φ, które jest schematem tezy **KRZ**
- $(Dual_F)$ $F\varphi \leftrightarrow \neg G \neg \varphi$
- $(Dual_P)$ $P\varphi \leftrightarrow \neg H \neg \varphi$
- (K_F) $G(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (G\varphi \rightarrow G\psi)$
- (K_P) $H(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (H\varphi \rightarrow H\psi)$

LOGIKI TEMPORALNE

Logika Kt: Ujęcie aksjomatyczne

A. Schematy aksjomatów:

- Dowolne φ, które jest schematem tezy **KRZ**
- $(Dual_F)$ $F\varphi \leftrightarrow \neg G \neg \varphi$
- $(Dual_P)$ $P\varphi \leftrightarrow \neg H \neg \varphi$
- (K_F) $G(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (G\varphi \rightarrow G\psi)$
- (K_P) $H(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (H\varphi \rightarrow H\psi)$
- (S_F) $\varphi \rightarrow GP\varphi$

LOGIKI TEMPORALNE

Logika Kt: Ujęcie aksjomatyczne

A. Schematy aksjomatów:

- Dowolne φ, które jest schematem tezy **KRZ**
- $(Dual_F)$ $F\varphi \leftrightarrow \neg G \neg \varphi$
- $(Dual_P)$ $P\varphi \leftrightarrow \neg H \neg \varphi$
- (K_F) $G(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (G\varphi \rightarrow G\psi)$
- (K_P) $H(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (H\varphi \rightarrow H\psi)$
- (S_F) $\varphi \rightarrow GP\varphi$
- (S_P) $\varphi \rightarrow HF\varphi$

LOGIKI TEMPORALNE

Logika Kt: Ujęcie aksjomatyczne

LOGIKI TEMPORALNE

Logika Kt: Ujęcie aksjomatyczne

B. Reguły pierwotne:

LOGIKI TEMPORALNE

Logika Kt: Ujęcie aksjomatyczne

B. Reguły pierwotne:

- (MP) jeżeli $\varphi \in \mathbf{Kt}$ i $\varphi \to \psi \in \mathbf{Kt}$, to $\psi \in \mathbf{Kt}$

LOGIKI TEMPORALNE

Logika Kt: Ujęcie aksjomatyczne

B. Reguły pierwotne:

- (MP) jeżeli $\varphi \in \mathbf{Kt}$ i $\varphi \to \psi \in \mathbf{Kt}$, to $\psi \in \mathbf{Kt}$
- (RG_F) jeżeli $\varphi \in \mathbf{Kt}$, to $G\varphi \in \mathbf{Kt}$

Logika Kt: Ujęcie aksjomatyczne

B. Reguły pierwotne:

- (MP) jeżeli $\varphi \in \mathbf{Kt}$ i $\varphi \to \psi \in \mathbf{Kt}$, to $\psi \in \mathbf{Kt}$
- (RG_F) jeżeli $\varphi \in \mathbf{Kt}$, to $G\varphi \in \mathbf{Kt}$
- (RG_P) jeżeli $\varphi \in \mathbf{Kt}$, to $H\varphi \in \mathbf{Kt}$

LOGIKI TEMPORALNE

Logika Kt: Ujęcie aksjomatyczne

B. Reguły pierwotne:

- (MP) jeżeli $\varphi \in \mathbf{Kt}$ i $\varphi \to \psi \in \mathbf{Kt}$, to $\psi \in \mathbf{Kt}$
- (RG_F) jeżeli $\varphi \in \mathbf{Kt}$, to $G\varphi \in \mathbf{Kt}$
- (RG_P) jeżeli $\varphi \in \mathbf{Kt}$, to $H\varphi \in \mathbf{Kt}$

Definicje dowodu, tezy, dowiedlności bez zmian, ponadto zachodzi:

LOGIKI TEMPORALNE

Logika Kt: Ujęcie aksjomatyczne

B. Reguły pierwotne:

- (MP) jeżeli $\varphi \in \mathbf{Kt}$ i $\varphi \rightarrow \psi \in \mathbf{Kt}$, to $\psi \in \mathbf{Kt}$
- (RG_F) jeżeli $\varphi \in \mathbf{Kt}$, to $G\varphi \in \mathbf{Kt}$
- (RG_P) jeżeli $\varphi \in \mathbf{Kt}$, to $H\varphi \in \mathbf{Kt}$

Definicje dowodu, tezy, dowiedlności bez zmian, ponadto zachodzi:

Twierdzenie 3 (Adekwatność mocna)

1. $\Gamma \vdash_{Kt} \varphi$ wtw, $\Gamma \models \varphi$
2. $\Gamma \Vdash_{Kt} \varphi$ wtw, $\Gamma \mid\models \varphi$

LOGIKI TEMPORALNE

Nadlogiki Kt

LOGIKI TEMPORALNE

Nadlogiki Kt

Nadlogiki **Kt** mogą być zarówno homogeniczne, jak i heterogeniczne np. możemy przyjąć, że przeszłość jest linearna, ale przyszłość dopuszcza rozgałęzienia.

LOGIKI TEMPORALNE

Nadlogiki Kt

Nadlogiki **Kt** mogą być zarówno homogeniczne, jak i heterogeniczne np. możemy przyjąć, że przeszłość jest linearna, ale przyszłość dopuszcza rozgałęzienia.
Najbardziej elementarne własności, które wiążemy z relacją następstwa czasowego to:

LOGIKI TEMPORALNE

Nadlogiki Kt

Nadlogiki **Kt** mogą być zarówno homogeniczne, jak i heterogeniczne np. możemy przyjąć, że przeszłość jest linearna, ale przyszłość dopuszcza rozgałęzienia.
Najbardziej elementarne własności, które wiążemy z relacją następstwa czasowego to:

nazwa	warunek
przeciwzwrotność	$\forall x \neg \mathcal{R}xx$
przechodniość	$\forall xyz(\mathcal{R}xy \wedge \mathcal{R}yz \rightarrow \mathcal{R}xz)$
asymetria mocna	$\forall xy(\mathcal{R}xy \rightarrow \neg \mathcal{R}yx)$

LOGIKI TEMPORALNE

Nadlogiki Kt

Nadlogiki **Kt** mogą być zarówno homogeniczne, jak i heterogeniczne np. możemy przyjąć, że przeszłość jest linearna, ale przyszłość dopuszcza rozgałęzienia.
Najbardziej elementarne własności, które wiążemy z relacją następstwa czasowego to:

nazwa	warunek
przeciwzwrotność	$\forall x \neg \mathcal{R}xx$
przechodniość	$\forall xyz(\mathcal{R}xy \land \mathcal{R}yz \to \mathcal{R}xz)$
asymetria mocna	$\forall xy(\mathcal{R}xy \to \neg \mathcal{R}yx)$

Zawartość klasy struktur o podanych wyżej własnościach to logika **Kt4**

LOGIKI TEMPORALNE

Nadlogiki Kt

Nadlogiki **Kt** mogą być zarówno homogeniczne, jak i heterogeniczne np. możemy przyjąć, że przeszłość jest linearna, ale przyszłość dopuszcza rozgałęzienia.
Najbardziej elementarne własności, które wiążemy z relacją następstwa czasowego to:

nazwa	warunek
przeciwzwrotność	$\forall x \neg \mathcal{R}xx$
przechodniość	$\forall xyz(\mathcal{R}xy \wedge \mathcal{R}yz \rightarrow \mathcal{R}xz)$
asymetria mocna	$\forall xy(\mathcal{R}xy \rightarrow \neg \mathcal{R}yx)$

Zawartość klasy struktur o podanych wyżej własnościach to logika **Kt4**

Uwaga! ani asymetria, ani przeciwzwrotność nie jest definiowalna w standardowym języku temporalnym.

LOGIKI TEMPORALNE

Kt4 – semantyka

LOGIKI TEMPORALNE

Kt4 – semantyka

Twierdzenie

(a) jeżeli $\mathcal{R}$ jest mocno asymetryczna, to jest przeciwzwrotna;

LOGIKI TEMPORALNE

Kt4 – semantyka

Twierdzenie
(a) jeżeli $\mathcal{R}$ jest mocno asymetryczna, to jest przeciwzwrotna;
(b) jeżeli $\mathcal{R}$ jest przechodnia i przeciwzwrotna, to jest mocno asymetryczna;

LOGIKI TEMPORALNE

Kt4 – semantyka

Twierdzenie

(a) jeżeli $\mathcal{R}$ jest mocno asymetryczna, to jest przeciwzwrotna;
(b) jeżeli $\mathcal{R}$ jest przechodnia i przeciwzwrotna, to jest mocno asymetryczna;
(c) jeżeli $\mathcal{R}$ jest przechodnia, to jej konwers też jest przechodni.

LOGIKI TEMPORALNE

Kt4 – semantyka

Twierdzenie
(a) jeżeli $\mathcal{R}$ jest mocno asymetryczna, to jest przeciwzwrotna;
(b) jeżeli $\mathcal{R}$ jest przechodnia i przeciwzwrotna, to jest mocno asymetryczna;
(c) jeżeli $\mathcal{R}$ jest przechodnia, to jej konwers też jest przechodni.

Twierdzenie
$\mathcal{F} \models G\varphi \rightarrow GG\varphi$ wtw, $\mathcal{F}$ jest przechodnia

LOGIKI TEMPORALNE

Kt4 – semantyka

Twierdzenie
(a) jeżeli $\mathcal{R}$ jest mocno asymetryczna, to jest przeciwzwrotna;
(b) jeżeli $\mathcal{R}$ jest przechodnia i przeciwzwrotna, to jest mocno asymetryczna;
(c) jeżeli $\mathcal{R}$ jest przechodnia, to jej konwers też jest przechodni.

Twierdzenie
$\mathcal{F} \models G\varphi \rightarrow GG\varphi$ wtw, $\mathcal{F}$ jest przechodnia
$\mathcal{F} \models FF\varphi \rightarrow F\varphi$ wtw, $\mathcal{F}$ jest przechodnia

LOGIKI TEMPORALNE

Kt4 – semantyka

Twierdzenie

(a) jeżeli $\mathcal{R}$ jest mocno asymetryczna, to jest przeciwzwrotna;
(b) jeżeli $\mathcal{R}$ jest przechodnia i przeciwzwrotna, to jest mocno asymetryczna;
(c) jeżeli $\mathcal{R}$ jest przechodnia, to jej konwers też jest przechodni.

Twierdzenie

$\mathcal{F} \models G\varphi \rightarrow GG\varphi$ wtw, $\mathcal{F}$ jest przechodnia
$\mathcal{F} \models FF\varphi \rightarrow F\varphi$ wtw, $\mathcal{F}$ jest przechodnia
$\mathcal{F} \models H\varphi \rightarrow HH\varphi$ wtw, $\mathcal{F}$ jest przechodnia

LOGIKI TEMPORALNE

Kt4 – semantyka

Twierdzenie
(a) jeżeli $\mathcal{R}$ jest mocno asymetryczna, to jest przeciwzwrotna;
(b) jeżeli $\mathcal{R}$ jest przechodnia i przeciwzwrotna, to jest mocno asymetryczna;
(c) jeżeli $\mathcal{R}$ jest przechodnia, to jej konwers też jest przechodni.

Twierdzenie
$\mathcal{F} \models G\varphi \rightarrow GG\varphi$ wtw, $\mathcal{F}$ jest przechodnia
$\mathcal{F} \models FF\varphi \rightarrow F\varphi$ wtw, $\mathcal{F}$ jest przechodnia
$\mathcal{F} \models H\varphi \rightarrow HH\varphi$ wtw, $\mathcal{F}$ jest przechodnia
$\mathcal{F} \models PP\varphi \rightarrow P\varphi$ wtw, $\mathcal{F}$ jest przechodnia

LOGIKI TEMPORALNE

Pierwsza antynomia Kanta

LOGIKI TEMPORALNE

Pierwsza antynomia Kanta

Teza: Świat ma początek w czasie.

LOGIKI TEMPORALNE

Pierwsza antynomia Kanta

Teza: Świat ma początek w czasie.
Antyteza: Świat nie ma początku w czasie.

LOGIKI TEMPORALNE

Pierwsza antynomia Kanta

Teza: Świat ma początek w czasie.
Antyteza: Świat nie ma początku w czasie.

nazwa	warunek
początek	$\exists x \forall y (\mathcal{R}xy \lor x = y)$
koniec	$\exists x \forall y (\mathcal{R}yx \lor x = y)$
F-serialność	$\forall x \exists y \mathcal{R}xy$
P-serialność	$\forall x \exists y \mathcal{R}yx$

LOGIKI TEMPORALNE

Pierwsza antynomia Kanta

Teza: Świat ma początek w czasie.
Antyteza: Świat nie ma początku w czasie.

nazwa	warunek
początek	$\exists x \forall y(\mathcal{R}xy \vee x = y)$
koniec	$\exists x \forall y(\mathcal{R}yx \vee x = y)$
F-serialność	$\forall x \exists y \mathcal{R}xy$
P-serialność	$\forall x \exists y \mathcal{R}yx$

Twierdzenie

$\mathcal{F} \vDash H\bot \vee PH\bot$ wtw, $\mathcal{F}$ ma punkt najmniejszy

LOGIKI TEMPORALNE

Pierwsza antynomia Kanta

Teza: Świat ma początek w czasie.
Antyteza: Świat nie ma początku w czasie.

nazwa	warunek
początek	$\exists x \forall y(\mathcal{R}xy \vee x = y)$
koniec	$\exists x \forall y(\mathcal{R}yx \vee x = y)$
F-serialność	$\forall x \exists y \mathcal{R}xy$
P-serialność	$\forall x \exists y \mathcal{R}yx$

Twierdzenie

$\mathcal{F} \models H\bot \vee PH\bot$ wtw, $\mathcal{F}$ ma punkt najmniejszy
$\mathcal{F} \models G\bot \vee FG\bot$ wtw, $\mathcal{F}$ ma punkt największy

LOGIKI TEMPORALNE

Pierwsza antynomia Kanta

Teza: Świat ma początek w czasie.
Antyteza: Świat nie ma początku w czasie.

nazwa	warunek
początek	$\exists x \forall y (\mathcal{R}xy \vee x = y)$
koniec	$\exists x \forall y (\mathcal{R}yx \vee x = y)$
F-serialność	$\forall x \exists y \mathcal{R}xy$
P-serialność	$\forall x \exists y \mathcal{R}yx$

Twierdzenie

$\mathcal{F} \models H\bot \vee PH\bot$ wtw, $\mathcal{F}$ ma punkt najmniejszy
$\mathcal{F} \models G\bot \vee FG\bot$ wtw, $\mathcal{F}$ ma punkt największy
$\mathcal{F} \models G\varphi \rightarrow F\varphi$ wtw, $\mathcal{F}$ jest F-serialna

LOGIKI TEMPORALNE

Pierwsza antynomia Kanta

Teza: Świat ma początek w czasie.
Antyteza: Świat nie ma początku w czasie.

nazwa	warunek
początek	$\exists x \forall y (\mathcal{R}xy \vee x = y)$
koniec	$\exists x \forall y (\mathcal{R}yx \vee x = y)$
F-serialność	$\forall x \exists y \mathcal{R}xy$
P-serialność	$\forall x \exists y \mathcal{R}yx$

Twierdzenie

$\mathcal{F} \models H\bot \vee PH\bot$ wtw, $\mathcal{F}$ ma punkt najmniejszy
$\mathcal{F} \models G\bot \vee FG\bot$ wtw, $\mathcal{F}$ ma punkt największy
$\mathcal{F} \models G\varphi \to F\varphi$ wtw, $\mathcal{F}$ jest F-serialna
$\mathcal{F} \models H\varphi \to P\varphi$ wtw, $\mathcal{F}$ jest P-serialna

LOGIKI TEMPORALNE

Pierwsza antynomia Kanta

Teza: Świat ma początek w czasie.
Antyteza: Świat nie ma początku w czasie.

nazwa	warunek
początek	$\exists x \forall y (\mathcal{R}xy \vee x = y)$
koniec	$\exists x \forall y (\mathcal{R}yx \vee x = y)$
F-serialność	$\forall x \exists y \mathcal{R}xy$
P-serialność	$\forall x \exists y \mathcal{R}yx$

Twierdzenie

$\mathcal{F} \models H\bot \vee PH\bot$ wtw, $\mathcal{F}$ ma punkt najmniejszy
$\mathcal{F} \models G\bot \vee FG\bot$ wtw, $\mathcal{F}$ ma punkt największy
$\mathcal{F} \models G\varphi \to F\varphi$ wtw, $\mathcal{F}$ jest F-serialna
$\mathcal{F} \models H\varphi \to P\varphi$ wtw, $\mathcal{F}$ jest P-serialna

Uwaga! F-serialność w połączeniu z przeciwzwrotnością implikuje F-nieskończoność (analogicznie dla P-serialności i P-nieskończoności).

LOGIKI TEMPORALNE

Logiki czasu liniowego

LOGIKI TEMPORALNE

Logiki czasu liniowego

nazwa	warunek
liniowość mocna	$\forall xy(\mathcal{R}xy \lor \mathcal{R}yx)$
liniowość słaba	$\forall xy(\mathcal{R}xy \lor \mathcal{R}yx \lor x = y)$
F-spójność mocna	$\forall xyz(\mathcal{R}xy \land \mathcal{R}xz \to \mathcal{R}yz \lor \mathcal{R}zy)$
F-spójność słaba	$\forall xyz(\mathcal{R}xy \land \mathcal{R}xz \to \mathcal{R}yz \lor \mathcal{R}zy \lor y = z)$
P-spójność mocna	$\forall xyz(\mathcal{R}yx \land \mathcal{R}zx \to \mathcal{R}yz \lor \mathcal{R}zy)$
P-spójność słaba	$\forall xyz(\mathcal{R}yx \land \mathcal{R}zx \to \mathcal{R}yz \lor \mathcal{R}zy \lor y = z)$

LOGIKI TEMPORALNE

Logiki czasu liniowego

nazwa	warunek
liniowość mocna	$\forall xy(\mathcal{R}xy \vee \mathcal{R}yx)$
liniowość słaba	$\forall xy(\mathcal{R}xy \vee \mathcal{R}yx \vee x = y)$
F-spójność mocna	$\forall xyz(\mathcal{R}xy \wedge \mathcal{R}xz \rightarrow \mathcal{R}yz \vee \mathcal{R}zy)$
F-spójność słaba	$\forall xyz(\mathcal{R}xy \wedge \mathcal{R}xz \rightarrow \mathcal{R}yz \vee \mathcal{R}zy \vee y = z)$
P-spójność mocna	$\forall xyz(\mathcal{R}yx \wedge \mathcal{R}zx \rightarrow \mathcal{R}yz \vee \mathcal{R}zy)$
P-spójność słaba	$\forall xyz(\mathcal{R}yx \wedge \mathcal{R}zx \rightarrow \mathcal{R}yz \vee \mathcal{R}zy \vee y = z)$

Twierdzenie

$\mathcal{F} \models PF\varphi \rightarrow P\varphi \vee F\varphi$ wtw, $\mathcal{F}$ jest mocno F-spójna

LOGIKI TEMPORALNE

Logiki czasu liniowego

nazwa	warunek
liniowość mocna	$\forall xy(\mathcal{R}xy \vee \mathcal{R}yx)$
liniowość słaba	$\forall xy(\mathcal{R}xy \vee \mathcal{R}yx \vee x = y)$
F-spójność mocna	$\forall xyz(\mathcal{R}xy \wedge \mathcal{R}xz \rightarrow \mathcal{R}yz \vee \mathcal{R}zy)$
F-spójność słaba	$\forall xyz(\mathcal{R}xy \wedge \mathcal{R}xz \rightarrow \mathcal{R}yz \vee \mathcal{R}zy \vee y = z)$
P-spójność mocna	$\forall xyz(\mathcal{R}yx \wedge \mathcal{R}zx \rightarrow \mathcal{R}yz \vee \mathcal{R}zy)$
P-spójność słaba	$\forall xyz(\mathcal{R}yx \wedge \mathcal{R}zx \rightarrow \mathcal{R}yz \vee \mathcal{R}zy \vee y = z)$

Twierdzenie

$\mathcal{F} \models PF\varphi \rightarrow P\varphi \vee F\varphi$ wtw, $\mathcal{F}$ jest mocno F-spójna
$\mathcal{F} \models FP\varphi \rightarrow P\varphi \vee F\varphi$ wtw, $\mathcal{F}$ jest mocno P-spójna

LOGIKI TEMPORALNE

Logiki czasu liniowego

nazwa	warunek
liniowość mocna	$\forall xy(\mathcal{R}xy \vee \mathcal{R}yx)$
liniowość słaba	$\forall xy(\mathcal{R}xy \vee \mathcal{R}yx \vee x = y)$
F-spójność mocna	$\forall xyz(\mathcal{R}xy \wedge \mathcal{R}xz \rightarrow \mathcal{R}yz \vee \mathcal{R}zy)$
F-spójność słaba	$\forall xyz(\mathcal{R}xy \wedge \mathcal{R}xz \rightarrow \mathcal{R}yz \vee \mathcal{R}zy \vee y = z)$
P-spójność mocna	$\forall xyz(\mathcal{R}yx \wedge \mathcal{R}zx \rightarrow \mathcal{R}yz \vee \mathcal{R}zy)$
P-spójność słaba	$\forall xyz(\mathcal{R}yx \wedge \mathcal{R}zx \rightarrow \mathcal{R}yz \vee \mathcal{R}zy \vee y = z)$

Twierdzenie

$\mathcal{F} \models PF\varphi \rightarrow P\varphi \vee F\varphi$ wtw, $\mathcal{F}$ jest mocno F-spójna
$\mathcal{F} \models FP\varphi \rightarrow P\varphi \vee F\varphi$ wtw, $\mathcal{F}$ jest mocno P-spójna
$\mathcal{F} \models PF\varphi \rightarrow P\varphi \vee F\varphi \vee \varphi$ wtw, $\mathcal{F}$ jest słabo F-spójna

LOGIKI TEMPORALNE

Logiki czasu liniowego

nazwa	warunek
liniowość mocna	$\forall xy(\mathcal{R}xy \vee \mathcal{R}yx)$
liniowość słaba	$\forall xy(\mathcal{R}xy \vee \mathcal{R}yx \vee x = y)$
F-spójność mocna	$\forall xyz(\mathcal{R}xy \wedge \mathcal{R}xz \rightarrow \mathcal{R}yz \vee \mathcal{R}zy)$
F-spójność słaba	$\forall xyz(\mathcal{R}xy \wedge \mathcal{R}xz \rightarrow \mathcal{R}yz \vee \mathcal{R}zy \vee y = z)$
P-spójność mocna	$\forall xyz(\mathcal{R}yx \wedge \mathcal{R}zx \rightarrow \mathcal{R}yz \vee \mathcal{R}zy)$
P-spójność słaba	$\forall xyz(\mathcal{R}yx \wedge \mathcal{R}zx \rightarrow \mathcal{R}yz \vee \mathcal{R}zy \vee y = z)$

Twierdzenie

$\mathcal{F} \models PF\varphi \rightarrow P\varphi \vee F\varphi$ wtw, $\mathcal{F}$ jest mocno F-spójna
$\mathcal{F} \models FP\varphi \rightarrow P\varphi \vee F\varphi$ wtw, $\mathcal{F}$ jest mocno P-spójna
$\mathcal{F} \models PF\varphi \rightarrow P\varphi \vee F\varphi \vee \varphi$ wtw, $\mathcal{F}$ jest słabo F-spójna
$\mathcal{F} \models FP\varphi \rightarrow P\varphi \vee F\varphi \vee \varphi$ wtw, $\mathcal{F}$ jest słabo P-spójna

LOGIKI TEMPORALNE

Następujące formuły są na gruncie **Kt4** równoważne

LOGIKI TEMPORALNE

Następujące formuły są na gruncie **Kt4** równoważne

$PF\varphi \rightarrow P\varphi \vee F\varphi \vee \varphi$

LOGIKI TEMPORALNE

Następujące formuły są na gruncie Kt4 równoważne

$PF\varphi \rightarrow P\varphi \vee F\varphi \vee \varphi$
$H\varphi \wedge G\varphi \wedge \varphi \rightarrow HG\varphi$

LOGIKI TEMPORALNE

Następujące formuły są na gruncie **Kt4** równoważne

$PF\varphi \to P\varphi \vee F\varphi \vee \varphi$
$H\varphi \wedge G\varphi \wedge \varphi \to HG\varphi$
$F\varphi \wedge F\psi \to F(\varphi \wedge F\psi) \vee F(F\varphi \wedge \psi) \vee F(\varphi \wedge \psi)$

LOGIKI TEMPORALNE

Następujące formuły są na gruncie Kt4 równoważne

$PF\varphi \rightarrow P\varphi \vee F\varphi \vee \varphi$
$H\varphi \wedge G\varphi \wedge \varphi \rightarrow HG\varphi$
$F\varphi \wedge F\psi \rightarrow F(\varphi \wedge F\psi) \vee F(F\varphi \wedge \psi) \vee F(\varphi \wedge \psi)$
$G(G\varphi \wedge \varphi \rightarrow \psi) \vee G(G\psi \wedge \psi \rightarrow \varphi)$

LOGIKI TEMPORALNE

Bazowa logika linearna Kt4.3 – Ujęcie aksjomatyczne

LOGIKI TEMPORALNE

Bazowa logika linearna Kt4.3 – Ujęcie aksjomatyczne

Kt4.3 to najmniejsza logika zawierająca **Kt** i wszystkie tezy o postaci:

LOGIKI TEMPORALNE

Bazowa logika linearna Kt4.3 – Ujęcie aksjomatyczne

Kt4.3 to najmniejsza logika zawierająca **Kt** i wszystkie tezy o postaci:

- (4_F) $G\varphi \rightarrow GG\varphi$

Bazowa logika linearna Kt4.3 – Ujęcie aksjomatyczne

Kt4.3 to najmniejsza logika zawierająca **Kt** i wszystkie tezy o postaci:

- (4_F) $G\varphi \to GG\varphi$
- (3_F) $PF\varphi \to P\varphi \vee F\varphi \vee \varphi$

LOGIKI TEMPORALNE

Bazowa logika linearna Kt4.3 – Ujęcie aksjomatyczne

Kt4.3 to najmniejsza logika zawierająca **Kt** i wszystkie tezy o postaci:

- (4_F) $G\varphi \rightarrow GG\varphi$
- (3_F) $PF\varphi \rightarrow P\varphi \vee F\varphi \vee \varphi$
- (3_P) $FP\varphi \rightarrow P\varphi \vee F\varphi \vee \varphi$

LOGIKI TEMPORALNE

Bazowa logika linearna Kt4.3 – Ujęcie aksjomatyczne

Kt4.3 to najmniejsza logika zawierająca **Kt** i wszystkie tezy o postaci:

- (4_F) $G\varphi \to GG\varphi$
- (3_F) $PF\varphi \to P\varphi \vee F\varphi \vee \varphi$
- (3_P) $FP\varphi \to P\varphi \vee F\varphi \vee \varphi$

Uwaga! zamiast (3_F) i (3_P) można użyć:
(3) $PF\varphi \vee FP\varphi \to P\varphi \vee F\varphi \vee \varphi$

LOGIKI TEMPORALNE

Bazowa logika linearna Kt4.3 – Ujęcie aksjomatyczne

Kt4.3 to najmniejsza logika zawierająca **Kt** i wszystkie tezy o postaci:

- (4_F) $G\varphi \to GG\varphi$
- (3_F) $PF\varphi \to P\varphi \vee F\varphi \vee \varphi$
- (3_P) $FP\varphi \to P\varphi \vee F\varphi \vee \varphi$

Uwaga! zamiast (3_F) i (3_P) można użyć:
(3) $PF\varphi \vee FP\varphi \to P\varphi \vee F\varphi \vee \varphi$

Bazowa logika linearna Kt4.3 – Ujęcie semantyczne

LOGIKI TEMPORALNE

Bazowa logika linearna Kt4.3 – Ujęcie aksjomatyczne

Kt4.3 to najmniejsza logika zawierająca **Kt** i wszystkie tezy o postaci:

- (4_F) $G\varphi \rightarrow GG\varphi$
- (3_F) $PF\varphi \rightarrow P\varphi \vee F\varphi \vee \varphi$
- (3_P) $FP\varphi \rightarrow P\varphi \vee F\varphi \vee \varphi$

Uwaga! zamiast (3_F) i (3_P) można użyć:
(3) $PF\varphi \vee FP\varphi \rightarrow P\varphi \vee F\varphi \vee \varphi$

Bazowa logika linearna Kt4.3 – Ujęcie semantyczne

Kt4.3 $= E(\mathcal{F})$, gdzie $\mathcal{F}$ to klasa struktur ze ścisłym porządkiem liniowym.

LOGIKI TEMPORALNE

Ważne logiki czasu liniowego

LOGIKI TEMPORALNE

Ważne logiki czasu liniowego

Niech $\mathfrak{F}_N = \langle \mathbf{N}, < \rangle$, $\mathfrak{F}_C = \langle \mathbf{C}, < \rangle$, $\mathfrak{F}_W = \langle \mathbf{W}, < \rangle$, $\mathfrak{F}_R = \langle \mathbf{R}, < \rangle$, gdzie **N** to zbiór liczb naturalnych, **C** – całkowitych, **W** – wymiernych, **R** – rzeczywistych.

LOGIKI TEMPORALNE

Ważne logiki czasu liniowego

Niech $\mathfrak{F}_N = \langle \mathbf{N}, < \rangle$, $\mathfrak{F}_C = \langle \mathbf{C}, < \rangle$, $\mathfrak{F}_W = \langle \mathbf{W}, < \rangle$, $\mathfrak{F}_R = \langle \mathbf{R}, < \rangle$, gdzie **N** to zbiór liczb naturalnych, **C** – całkowitych, **W** – wymiernych, **R** – rzeczywistych.

$E(\mathfrak{F}_N) =$ **Kt4.3** z dodatkiem:

LOGIKI TEMPORALNE

Ważne logiki czasu liniowego

Niech $\mathfrak{F}_N = \langle \mathbf{N}, < \rangle$, $\mathfrak{F}_C = \langle \mathbf{C}, < \rangle$, $\mathfrak{F}_W = \langle \mathbf{W}, < \rangle$, $\mathfrak{F}_R = \langle \mathbf{R}, < \rangle$, gdzie **N** to zbiór liczb naturalnych, **C** – całkowitych, **W** – wymiernych, **R** – rzeczywistych.

$E(\mathfrak{F}_N) =$ **Kt4.3** z dodatkiem:

- (S_F) $G\varphi \rightarrow F\varphi$

LOGIKI TEMPORALNE

Ważne logiki czasu liniowego

Niech $\mathfrak{F}_N = \langle \mathbf{N}, < \rangle$, $\mathfrak{F}_C = \langle \mathbf{C}, < \rangle$, $\mathfrak{F}_W = \langle \mathbf{W}, < \rangle$, $\mathfrak{F}_R = \langle \mathbf{R}, < \rangle$, gdzie **N** to zbiór liczb naturalnych, **C** – całkowitych, **W** – wymiernych, **R** – rzeczywistych.

$E(\mathfrak{F}_N) =$ **Kt4.3** z dodatkiem:

- (S_F) $G\varphi \to F\varphi$
- (D_F) $G(G\varphi \to \varphi) \to (FG\varphi \to G\varphi)$

LOGIKI TEMPORALNE

Ważne logiki czasu liniowego

Niech $\mathfrak{F}_N = \langle \mathbf{N}, < \rangle$, $\mathfrak{F}_C = \langle \mathbf{C}, < \rangle$, $\mathfrak{F}_W = \langle \mathbf{W}, < \rangle$, $\mathfrak{F}_R = \langle \mathbf{R}, < \rangle$, gdzie **N** to zbiór liczb naturalnych, **C** – całkowitych, **W** – wymiernych, **R** – rzeczywistych.

$E(\mathfrak{F}_N) =$ **Kt4.3** z dodatkiem:

- (S_F) $G\varphi \to F\varphi$
- (D_F) $G(G\varphi \to \varphi) \to (FG\varphi \to G\varphi)$
- (WF) $H(H\varphi \to \varphi) \to H\varphi$

LOGIKI TEMPORALNE

Ważne logiki czasu liniowego

Niech $\mathfrak{F}_N = \langle \mathbf{N}, < \rangle$, $\mathfrak{F}_C = \langle \mathbf{C}, < \rangle$, $\mathfrak{F}_W = \langle \mathbf{W}, < \rangle$, $\mathfrak{F}_R = \langle \mathbf{R}, < \rangle$, gdzie **N** to zbiór liczb naturalnych, **C** – całkowitych, **W** – wymiernych, **R** – rzeczywistych.
$E(\mathfrak{F}_N) =$ **Kt4.3** z dodatkiem:

- (S_F) $G\varphi \rightarrow F\varphi$
- (D_F) $G(G\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow (FG\varphi \rightarrow G\varphi)$
- (WF) $H(H\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow H\varphi$

Uwaga! aksjomat (WF) odpowiada dobremu uporządkowaniu, (D_F) – dyskretności

LOGIKI TEMPORALNE

Ważne logiki czasu liniowego – liczby całkowite

$E(\mathfrak{F}_C) =$ **Kt4.3** z dodatkiem:

LOGIKI TEMPORALNE

Ważne logiki czasu liniowego – liczby całkowite

$E(\mathfrak{F}_C) =$ **Kt4.3** z dodatkiem:

- $(S_F)\ G\varphi \rightarrow F\varphi \quad (S_P)\ H\varphi \rightarrow P\varphi$

LOGIKI TEMPORALNE

Ważne logiki czasu liniowego – liczby całkowite

$E(\mathfrak{F}_C)$ = **Kt4.3** z dodatkiem:

- $(S_F)\ G\varphi \to F\varphi \quad (S_P)\ H\varphi \to P\varphi$
- $(D_F)\ G(G\varphi \to \varphi) \to (FG\varphi \to G\varphi)$

LOGIKI TEMPORALNE

Ważne logiki czasu liniowego – liczby całkowite

$E(\mathfrak{F}_C)$ = **Kt4.3** z dodatkiem:

- (S_F) $G\varphi \to F\varphi$ $\quad$ (S_P) $H\varphi \to P\varphi$
- (D_F) $G(G\varphi \to \varphi) \to (FG\varphi \to G\varphi)$
- (D_P) $H(H\varphi \to \varphi) \to (PH\varphi \to H\varphi)$

LOGIKI TEMPORALNE

Ważne logiki czasu liniowego – liczby całkowite

$E(\mathfrak{F}_C) =$ **Kt4.3** z dodatkiem:

- (S_F) $G\varphi \to F\varphi$ (S_P) $H\varphi \to P\varphi$
- (D_F) $G(G\varphi \to \varphi) \to (FG\varphi \to G\varphi)$
- (D_P) $H(H\varphi \to \varphi) \to (PH\varphi \to H\varphi)$

Uwaga! aksjomaty $(D_F), (D_P)$ odpowiadają dyskretności

LOGIKI TEMPORALNE

Ważne logiki czasu liniowego – liczby wymierne

$E(\mathfrak{F}_W) =$ **Kt4.3** z dodatkiem:

LOGIKI TEMPORALNE

Ważne logiki czasu liniowego – liczby wymierne

$E(\mathfrak{F}_W) =$ **Kt4.3** z dodatkiem:

- $(S_F)\ G\varphi \rightarrow F\varphi \quad (S_P)\ H\varphi \rightarrow P\varphi$

LOGIKI TEMPORALNE

Ważne logiki czasu liniowego – liczby wymierne

$E(\mathfrak{F}_W) =$ **Kt4.3** z dodatkiem:

- (S_F) $G\varphi \rightarrow F\varphi$ (S_P) $H\varphi \rightarrow P\varphi$
- (G) $GG\varphi \rightarrow G\varphi$

LOGIKI TEMPORALNE

Ważne logiki czasu liniowego – liczby wymierne

$E(\mathfrak{F}_W) =$ **Kt4.3** z dodatkiem:

- (S_F) $G\varphi \to F\varphi$ (S_P) $H\varphi \to P\varphi$
- (G) $GG\varphi \to G\varphi$

Liczby rzeczywiste

$E(\mathfrak{F}_R) = E(\mathfrak{F}_W)$ z dodatkiem:

- (C) $(H\varphi \to FH\varphi) \wedge G(H\varphi \to FH\varphi) \wedge H(H\varphi \to FH\varphi) \to (H\varphi \to G\varphi)$

LOGIKI TEMPORALNE

Ważne logiki czasu liniowego – liczby wymierne

$E(\mathfrak{F}_W) =$ **Kt4.3** z dodatkiem:

- (S_F) $G\varphi \to F\varphi$ (S_P) $H\varphi \to P\varphi$
- (G) $GG\varphi \to G\varphi$

Liczby rzeczywiste

$E(\mathfrak{F}_R) = E(\mathfrak{F}_W)$ z dodatkiem:

- (C) $(H\varphi \to FH\varphi) \wedge G(H\varphi \to FH\varphi) \wedge H(H\varphi \to FH\varphi) \to (H\varphi \to G\varphi)$

Uwaga! aksjomat (G) odpowiada gęstości, a (C) – ciągłości.

LOGIKI TEMPORALNE

Dygresja: logika czasu stoików

LOGIKI TEMPORALNE

Dygresja: logika czasu stoików

Jeżeli do **Kt4** dodamy następujące aksjomaty:

LOGIKI TEMPORALNE

Dygresja: logika czasu stoików

Jeżeli do **Kt4** dodamy następujące aksjomaty:

- (T_F) $G\varphi \rightarrow \varphi$

LOGIKI TEMPORALNE

Dygresja: logika czasu stoików

Jeżeli do **Kt4** dodamy następujące aksjomaty:

- (T_F) $G\varphi \to \varphi$
- (Sym) $G\varphi \to H\varphi$

LOGIKI TEMPORALNE

Dygresja: logika czasu stoików

Jeżeli do **Kt4** dodamy następujące aksjomaty:

- (T_F) $G\varphi \rightarrow \varphi$
- (Sym) $G\varphi \rightarrow H\varphi$

to otrzymamy logikę czasu kołowego.

LOGIKI TEMPORALNE

Dygresja: logika czasu stoików

Jeżeli do **Kt4** dodamy następujące aksjomaty:

- (T_F) $G\varphi \to \varphi$
- (Sym) $G\varphi \to H\varphi$

to otrzymamy logikę czasu kołowego.
(T_F) odpowiada zwrotności, a (Sym) – symetrii $\mathcal{R}$.

LOGIKI TEMPORALNE

Dygresja: logika czasu stoików

Jeżeli do **Kt4** dodamy następujące aksjomaty:

- (T_F) $G\varphi \to \varphi$
- (Sym) $G\varphi \to H\varphi$

to otrzymamy logikę czasu kołowego.
(T_F) odpowiada zwrotności, a (Sym) – symetrii $\mathcal{R}$.
W systemie takim tezami są:

Dygresja: logika czasu stoików

Jeżeli do **Kt4** dodamy następujące aksjomaty:

- (T_F) $G\varphi \to \varphi$
- (Sym) $G\varphi \to H\varphi$

to otrzymamy logikę czasu kołowego.
(T_F) odpowiada zwrotności, a (Sym) – symetrii $\mathcal{R}$.
W systemie takim tezami są:
$G\varphi \leftrightarrow H\varphi$

Dygresja: logika czasu stoików

Jeżeli do **Kt4** dodamy następujące aksjomaty:

- (T_F) $G\varphi \rightarrow \varphi$
- (Sym) $G\varphi \rightarrow H\varphi$

to otrzymamy logikę czasu kołowego.
(T_F) odpowiada zwrotności, a (Sym) – symetrii $\mathcal{R}$.
W systemie takim tezami są:
$G\varphi \leftrightarrow H\varphi \quad F\varphi \leftrightarrow P\varphi$

Dygresja: logika czasu stoików

Jeżeli do **Kt4** dodamy następujące aksjomaty:

- (T_F) $G\varphi \rightarrow \varphi$
- (Sym) $G\varphi \rightarrow H\varphi$

to otrzymamy logikę czasu kołowego.
(T_F) odpowiada zwrotności, a (Sym) – symetrii $\mathcal{R}$.
W systemie takim tezami są:
$G\varphi \leftrightarrow H\varphi \qquad F\varphi \leftrightarrow P\varphi$
co prowadzi do utożsamienia przeszłości i przyszłości.

LOGIKI TEMPORALNE

Wzmocnienie języka

LOGIKI TEMPORALNE

Wzmocnienie języka

1. Modalności temporalne (Diodorowska i Arystotelesowska):

LOGIKI TEMPORALNE

Wzmocnienie języka

1. Modalności temporalne (Diodorowska i Arystotelesowska):

$\Box\varphi := \varphi \wedge G\varphi \qquad \Diamond\varphi := \varphi \vee F\varphi$

LOGIKI TEMPORALNE

Wzmocnienie języka

1. Modalności temporalne (Diodorowska i Arystotelesowska):

$\Box\varphi := \varphi \wedge G\varphi \quad \Diamond\varphi := \varphi \vee F\varphi$

$A\varphi := \varphi \wedge G\varphi \wedge H\varphi$

LOGIKI TEMPORALNE

Wzmocnienie języka

1. Modalności temporalne (Diodorowska i Arystotelesowska):
$\Box\varphi := \varphi \wedge G\varphi \quad \Diamond\varphi := \varphi \vee F\varphi$
$A\varphi := \varphi \wedge G\varphi \wedge H\varphi$
2. Następnik i poprzednik:

LOGIKI TEMPORALNE

Wzmocnienie języka

1. Modalności temporalne (Diodorowska i Arystotelesowska):
$\Box\varphi := \varphi \wedge G\varphi \quad \Diamond\varphi := \varphi \vee F\varphi$
$A\varphi := \varphi \wedge G\varphi \wedge H\varphi$
2. Następnik i poprzednik:
$\bigcirc\varphi$ – czytamy "w następnym momencie φ".

LOGIKI TEMPORALNE

Wzmocnienie języka

1. Modalności temporalne (Diodorowska i Arystotelesowska):
$\Box\varphi := \varphi \land G\varphi \quad \Diamond\varphi := \varphi \lor F\varphi$
$A\varphi := \varphi \land G\varphi \land H\varphi$
2. Następnik i poprzednik:
$\bigcirc\varphi$ – czytamy "w następnym momencie φ".
$\mathfrak{M}, t \vDash \bigcirc\varphi$ wtw $\mathfrak{M}, t' \vDash \varphi$ dla dowolnego $t' \in \mathcal{R}(t)$ takiego, że $\neg\exists t''(\mathcal{R}tt'' \land \mathcal{R}t''t')$

LOGIKI TEMPORALNE

Wzmocnienie języka

1. Modalności temporalne (Diodorowska i Arystotelesowska):
$\Box\varphi := \varphi \wedge G\varphi \quad \Diamond\varphi := \varphi \vee F\varphi$
$A\varphi := \varphi \wedge G\varphi \wedge H\varphi$
2. Następnik i poprzednik:
$\bigcirc\varphi$ – czytamy "w następnym momencie φ".
$\mathfrak{M}, t \vDash \bigcirc\varphi$ wtw $\mathfrak{M}, t' \vDash \varphi$ dla dowolnego $t' \in \mathcal{R}(t)$ takiego, że $\neg\exists t''(\mathcal{R}tt'' \wedge \mathcal{R}t''t')$
dualnie charakteryzujemy $*\varphi$ ("w poprzednim momencie").

LOGIKI TEMPORALNE

Wzmocnienie języka

LOGIKI TEMPORALNE

Wzmocnienie języka

3. "Since" i "Until":

LOGIKI TEMPORALNE

Wzmocnienie języka

3. "Since" i "Until":

$\varphi S \psi$ czytamy "zachodziło φ odkąd zaszło ψ"

LOGIKI TEMPORALNE

Wzmocnienie języka

3. "Since" i "Until":

$\varphi S \psi$ czytamy "zachodziło φ odkąd zaszło ψ"

$\mathfrak{M}, t \vDash \varphi S \psi$ wtw $\mathfrak{M}, t' \vDash \psi$ dla pewnego $t' \in \mathcal{R}^{-}(t)$ oraz $\mathfrak{M}, t'' \vDash \varphi$ dla każdego t'' takiego, że $\mathcal{R}t't''$ i $\mathcal{R}t''t$

LOGIKI TEMPORALNE

Wzmocnienie języka

3. "Since" i "Until":

$\varphi S \psi$ czytamy "zachodziło φ odkąd zaszło ψ"

$\mathfrak{M}, t \vDash \varphi S \psi$ wtw $\mathfrak{M}, t' \vDash \psi$ dla pewnego $t' \in \mathcal{R}^{-}(t)$ oraz $\mathfrak{M}, t'' \vDash \varphi$ dla każdego t'' takiego, że $\mathcal{R}t't''$ i $\mathcal{R}t''t$

dualnie charakteryzujemy $\varphi U \psi$ ("będzie zachodzić φ aż zajdzie ψ").

LOGIKI TEMPORALNE

Wzmocnienie języka

3. "Since" i "Until":

$\varphi S \psi$ czytamy "zachodziło φ odkąd zaszło ψ"

$\mathfrak{M}, t \vDash \varphi S \psi$ wtw $\mathfrak{M}, t' \vDash \psi$ dla pewnego $t' \in \mathcal{R}^{-}(t)$ oraz $\mathfrak{M}, t'' \vDash \varphi$ dla każdego t'' takiego, że $\mathcal{R}t't''$ i $\mathcal{R}t''t$

dualnie charakteryzujemy $\varphi U \psi$ ("będzie zachodzić φ aż zajdzie ψ").

Twierdzenie Kampa

LOGIKI TEMPORALNE

Wzmocnienie języka

3. "Since" i "Until":

$\varphi S \psi$ czytamy "zachodziło φ odkąd zaszło ψ"

$\mathfrak{M}, t \vDash \varphi S \psi$ wtw $\mathfrak{M}, t' \vDash \psi$ dla pewnego $t' \in \mathcal{R}^{-}(t)$ oraz $\mathfrak{M}, t'' \vDash \varphi$ dla każdego t'' takiego, że $\mathcal{R}t't''$ i $\mathcal{R}t''t$

dualnie charakteryzujemy $\varphi U \psi$ ("będzie zachodzić φ aż zajdzie ψ").

Twierdzenie Kampa

W klasie liniowych i ciągłych struktur każdy funktor temporalny może być zdefiniowany z pomocą S i U.

LOGIKI TEMPORALNE

Wzmocnienie języka

3. "Since" i "Until":

$\varphi S \psi$ czytamy "zachodziło φ odkąd zaszło ψ"

$\mathfrak{M}, t \vDash \varphi S \psi$ wtw $\mathfrak{M}, t' \vDash \psi$ dla pewnego $t' \in \mathcal{R}^{-}(t)$ oraz $\mathfrak{M}, t'' \vDash \varphi$ dla każdego t'' takiego, że $\mathcal{R}t't''$ i $\mathcal{R}t''t$

dualnie charakteryzujemy $\varphi U \psi$ ("będzie zachodzić φ aż zajdzie ψ").

Twierdzenie Kampa

W klasie liniowych i ciągłych struktur każdy funktor temporalny może być zdefiniowany z pomocą S i U.

Przykładowo:

LOGIKI TEMPORALNE

Wzmocnienie języka

3. "Since" i "Until":

$\varphi S \psi$ czytamy "zachodziło φ odkąd zaszło ψ"

$\mathfrak{M}, t \vDash \varphi S \psi$ wtw $\mathfrak{M}, t' \vDash \psi$ dla pewnego $t' \in \mathcal{R}^{-}(t)$ oraz $\mathfrak{M}, t'' \vDash \varphi$ dla każdego t'' takiego, że $\mathcal{R}t't''$ i $\mathcal{R}t''t$

dualnie charakteryzujemy $\varphi U \psi$ ("będzie zachodzić φ aż zajdzie ψ").

Twierdzenie Kampa

W klasie liniowych i ciągłych struktur każdy funktor temporalny może być zdefiniowany z pomocą S i U.

Przykładowo:

$H\varphi := \neg(\top S \neg\varphi)$ $P\varphi := \top S \varphi$

$G\varphi := \neg(\top U \neg\varphi)$ $F\varphi := \top U \varphi$

LOGIKI TEMPORALNE

Dygresja: The Master Argument

LOGIKI TEMPORALNE

Dygresja: The Master Argument

1. Wszystko co jest przeszłe i prawdziwe jest konieczne.

LOGIKI TEMPORALNE

Dygresja: The Master Argument

1. Wszystko co jest przeszłe i prawdziwe jest konieczne.
2. Niemożliwe nie wynika z możliwego.

LOGIKI TEMPORALNE

Dygresja: The Master Argument

1. Wszystko co jest przeszłe i prawdziwe jest konieczne.
2. Niemożliwe nie wynika z możliwego.
3. Co ani nie jest, ani nie będzie, jest możliwe.

LOGIKI TEMPORALNE

Dygresja: The Master Argument

1. Wszystko co jest przeszłe i prawdziwe jest konieczne.
2. Niemożliwe nie wynika z możliwego.
3. Co ani nie jest, ani nie będzie, jest możliwe.

ZP: Każda możliwość kiedyś się zaktualizuje.

LOGIKI TEMPORALNE

Dygresja: The Master Argument

1. Wszystko co jest przeszłe i prawdziwe jest konieczne.
2. Niemożliwe nie wynika z możliwego.
3. Co ani nie jest, ani nie będzie, jest możliwe.

ZP: Każda możliwość kiedyś się zaktualizuje.

1. $P\varphi \to \Box P\varphi$

LOGIKI TEMPORALNE

Dygresja: The Master Argument

1. Wszystko co jest przeszłe i prawdziwe jest konieczne.
2. Niemożliwe nie wynika z możliwego.
3. Co ani nie jest, ani nie będzie, jest możliwe.

ZP: Każda możliwość kiedyś się zaktualizuje.

1. $P\varphi \to \Box P\varphi$
2. $\vdash \varphi \to \psi \;/\; \vdash \Diamond\varphi \to \Diamond\psi$

LOGIKI TEMPORALNE

Dygresja: The Master Argument

1. Wszystko co jest przeszłe i prawdziwe jest konieczne.
2. Niemożliwe nie wynika z możliwego.
3. Co ani nie jest, ani nie będzie, jest możliwe.

ZP: Każda możliwość kiedyś się zaktualizuje.

1. $P\varphi \to \Box P\varphi$
2. $\vdash \varphi \to \psi \;/\; \vdash \Diamond\varphi \to \Diamond\psi$
3. $\neg\varphi \land \neg F\varphi \land \Diamond\varphi$

LOGIKI TEMPORALNE

Dygresja: The Master Argument

1. Wszystko co jest przeszłe i prawdziwe jest konieczne.
2. Niemożliwe nie wynika z możliwego.
3. Co ani nie jest, ani nie będzie, jest możliwe.

ZP: Każda możliwość kiedyś się zaktualizuje.

1. $P\varphi \to \Box P\varphi$
2. $\vdash \varphi \to \psi \ / \ \vdash \Diamond\varphi \to \Diamond\psi$
3. $\neg\varphi \wedge \neg F\varphi \wedge \Diamond\varphi$

$(\neg 3 \leftrightarrow \neg\varphi \wedge \neg F\varphi \to \neg\Diamond\varphi)$

LOGIKI TEMPORALNE

Dygresja: The Master Argument

1. Wszystko co jest przeszłe i prawdziwe jest konieczne.
2. Niemożliwe nie wynika z możliwego.
3. Co ani nie jest, ani nie będzie, jest możliwe.

ZP: Każda możliwość kiedyś się zaktualizuje.

1. $P\varphi \rightarrow \Box P\varphi$
2. $\vdash \varphi \rightarrow \psi \ / \ \vdash \Diamond\varphi \rightarrow \Diamond\psi$
3. $\neg\varphi \wedge \neg F\varphi \wedge \Diamond\varphi$

$(\neg 3 \leftrightarrow \neg\varphi \wedge \neg F\varphi \rightarrow \neg\Diamond\varphi)$

DC: $\varphi \wedge G\varphi \rightarrow PG\varphi$

LOGIKI EPISTEMICZNE I DOKSASTYCZNE

Historia: Hintikka – Logic and belief

LOGIKI EPISTEMICZNE I DOKSASTYCZNE

Historia: Hintikka – Logic and belief

Standardowe języki dla tych logik są multimodalne:

LOGIKI EPISTEMICZNE I DOKSASTYCZNE

Historia: Hintikka – Logic and belief

Standardowe języki dla tych logik są multimodalne:

- przyjmujemy przeliczalny zbiór podmiotów (agentów): $\{a, b, c, ...\}$

LOGIKI EPISTEMICZNE I DOKSASTYCZNE

Historia: Hintikka – Logic and belief

Standardowe języki dla tych logik są multimodalne:

- przyjmujemy przeliczalny zbiór podmiotów (agentów): $\{a, b, c, ...\}$
- dla każdego agenta a przyjmujemy funktor epistemiczny K_a

LOGIKI EPISTEMICZNE I DOKSASTYCZNE

Historia: Hintikka – Logic and belief

Standardowe języki dla tych logik są multimodalne:

- przyjmujemy przeliczalny zbiór podmiotów (agentów): $\{a, b, c, ...\}$
- dla każdego agenta a przyjmujemy funktor epistemiczny K_a
- dla każdego agenta a przyjmujemy funktor doksastyczny B_a

LOGIKI EPISTEMICZNE I DOKSASTYCZNE

Historia: Hintikka – Logic and belief

Standardowe języki dla tych logik są multimodalne:

- przyjmujemy przeliczalny zbiór podmiotów (agentów): $\{a, b, c, ...\}$
- dla każdego agenta a przyjmujemy funktor epistemiczny K_a
- dla każdego agenta a przyjmujemy funktor doksastyczny B_a

$K_a\varphi :=$ a wie, że φ

LOGIKI EPISTEMICZNE I DOKSASTYCZNE

Historia: Hintikka – Logic and belief

Standardowe języki dla tych logik są multimodalne:

- przyjmujemy przeliczalny zbiór podmiotów (agentów): $\{a, b, c, ...\}$
- dla każdego agenta a przyjmujemy funktor epistemiczny K_a
- dla każdego agenta a przyjmujemy funktor doksastyczny B_a

$K_a\varphi :=$ a wie, że φ
$B_a\varphi :=$ a wierzy, że (jest przekonany, że) φ

LOGIKI EPISTEMICZNE I DOKSASTYCZNE

Warunki Hintikki dla logiki epistemicznej:

LOGIKI EPISTEMICZNE I DOKSASTYCZNE

Warunki Hintikki dla logiki epistemicznej:

(RG_K) $\vdash \varphi \;/\; \vdash K_x\varphi$ – logiczna wszechwiedza

LOGIKI EPISTEMICZNE I DOKSASTYCZNE

Warunki Hintikki dla logiki epistemicznej:

(RG_K) $\vdash \varphi$ / $\vdash K_x\varphi$ – logiczna wszechwiedza
(K_K) $K_x(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (K_x\varphi \rightarrow K_x\psi)$ – dedukcyjna wszechwiedza

LOGIKI EPISTEMICZNE I DOKSASTYCZNE

Warunki Hintikki dla logiki epistemicznej:

(RG_K) $\vdash \varphi \ / \ \vdash K_x\varphi$ – logiczna wszechwiedza
(K_K) $K_x(\varphi \to \psi) \to (K_x\varphi \to K_x\psi)$ – dedukcyjna wszechwiedza
(T_K) $K_x\varphi \to \varphi$ – Platoński ideał wiedzy

LOGIKI EPISTEMICZNE I DOKSASTYCZNE

Warunki Hintikki dla logiki epistemicznej:

(RG_K) $\vdash \varphi \;/\; \vdash K_x\varphi$ – logiczna wszechwiedza
(K_K) $K_x(\varphi \to \psi) \to (K_x\varphi \to K_x\psi)$ – dedukcyjna wszechwiedza
(T_K) $K_x\varphi \to \varphi$ – Platoński ideał wiedzy
(4_K) $K_x\varphi \to K_xK_x\varphi$ – pozytywna introspekcja

LOGIKI EPISTEMICZNE I DOKSASTYCZNE

Warunki Hintikki dla logiki epistemicznej:

(RG_K) $\vdash \varphi \;/\; \vdash K_x\varphi$ – logiczna wszechwiedza
(K_K) $K_x(\varphi \to \psi) \to (K_x\varphi \to K_x\psi)$ – dedukcyjna wszechwiedza
(T_K) $K_x\varphi \to \varphi$ – Platoński ideał wiedzy
(4_K) $K_x\varphi \to K_xK_x\varphi$ – pozytywna introspekcja
(5_K) $\neg K_x\varphi \to K_x\neg K_x\varphi$ – negatywna introspekcja

LOGIKI EPISTEMICZNE I DOKSASTYCZNE

Interaktywne warunki:

LOGIKI EPISTEMICZNE I DOKSASTYCZNE

Interaktywne warunki:

(Tr_K) $K_x K_y \varphi \rightarrow K_x \varphi$ – transmisja wiedzy

LOGIKI EPISTEMICZNE I DOKSASTYCZNE

Interaktywne warunki:

(Tr_K) $K_x K_y \varphi \rightarrow K_x \varphi$ – transmisja wiedzy
(S_K) $K_x \varphi \rightarrow K_y \varphi$ – zasada mądrzejszego

LOGIKI EPISTEMICZNE I DOKSASTYCZNE

Interaktywne warunki:

(Tr_K) $K_x K_y \varphi \to K_x \varphi$ – transmisja wiedzy
(S_K) $K_x \varphi \to K_y \varphi$ – zasada mądrzejszego
(O_K) $K_x \varphi \to K_y K_x \varphi$

LOGIKI EPISTEMICZNE I DOKSASTYCZNE

Interaktywne warunki:

(Tr_K) $K_x K_y \varphi \rightarrow K_x \varphi$ – transmisja wiedzy
(S_K) $K_x \varphi \rightarrow K_y \varphi$ – zasada mądrzejszego
(O_K) $K_x \varphi \rightarrow K_y K_x \varphi$ – zasada śledczego

LOGIKI EPISTEMICZNE I DOKSASTYCZNE

Interaktywne warunki:

(Tr_K) $K_x K_y \varphi \rightarrow K_x \varphi$ – transmisja wiedzy
(S_K) $K_x \varphi \rightarrow K_y \varphi$ – zasada mądrzejszego
(O_K) $K_x \varphi \rightarrow K_y K_x \varphi$ – zasada śledczego

oczywiście (S_K) wynika z (Tr_K) i (O_K)

LOGIKI EPISTEMICZNE I DOKSASTYCZNE

Warunki dla logiki doksastycznej:

LOGIKI EPISTEMICZNE I DOKSASTYCZNE

Warunki dla logiki doksastycznej:

B_x charakteryzujemy analogiczne jak K_x (jest to również modalność typu $\Box$) ale zamiast (T) rozważać można co najwyżej:

LOGIKI EPISTEMICZNE I DOKSASTYCZNE

Warunki dla logiki doksastycznej:

B_x charakteryzujemy analogiczne jak K_x (jest to również modalność typu $\Box$) ale zamiast (T) rozważać można co najwyżej:

(D_B) $B_x\varphi \to \neg B_x \neg\varphi$ – spójność przekonań

LOGIKI EPISTEMICZNE I DOKSASTYCZNE

Warunki dla logiki doksastycznej:

B_x charakteryzujemy analogiczne jak K_x (jest to również modalność typu $\Box$) ale zamiast (T) rozważać można co najwyżej:
(D_B) $B_x\varphi \rightarrow \neg B_x\neg\varphi$ – spójność przekonań
i ewentualnie osłabioną postać (T):

LOGIKI EPISTEMICZNE I DOKSASTYCZNE

Warunki dla logiki doksastycznej:

B_x charakteryzujemy analogiczne jak K_x (jest to również modalność typu $\Box$) ale zamiast (T) rozważać można co najwyżej:

(D_B) $B_x\varphi \to \neg B_x \neg\varphi$ – spójność przekonań

i ewentualnie osłabioną postać (T):

(WT_B) $B_x(B_x\varphi \to \varphi)$ – dobra wiara

LOGIKI EPISTEMICZNE I DOKSASTYCZNE

Warunki dla logiki doksastycznej:

B_x charakteryzujemy analogiczne jak K_x (jest to również modalność typu $\Box$) ale zamiast (T) rozważać można co najwyżej:
(D_B) $B_x\varphi \to \neg B_x\neg\varphi$ – spójność przekonań
i ewentualnie osłabioną postać (T):
(WT_B) $B_x(B_x\varphi \to \varphi)$ – dobra wiara
odpowiada jej semantyczny warunek prawie-zwrotności:

LOGIKI EPISTEMICZNE I DOKSASTYCZNE

Warunki dla logiki doksastycznej:

B_x charakteryzujemy analogiczne jak K_x (jest to również modalność typu $\Box$) ale zamiast (T) rozważać można co najwyżej:
(D_B) $B_x\varphi \rightarrow \neg B_x \neg\varphi$ – spójność przekonań
i ewentualnie osłabioną postać (T):
(WT_B) $B_x(B_x\varphi \rightarrow \varphi)$ – dobra wiara
odpowiada jej semantyczny warunek prawie-zwrotności:
$\forall xy(\mathcal{R}xy \rightarrow \mathcal{R}yy)$

LOGIKI EPISTEMICZNE I DOKSASTYCZNE

Warunki dla logiki doksastycznej:

B_x charakteryzujemy analogiczne jak K_x (jest to również modalność typu $\Box$) ale zamiast (T) rozważać można co najwyżej:

(D_B) $B_x\varphi \to \neg B_x \neg\varphi$ – spójność przekonań

i ewentualnie osłabioną postać (T):

(WT_B) $B_x(B_x\varphi \to \varphi)$ – dobra wiara

odpowiada jej semantyczny warunek prawie-zwrotności:

$\forall xy(\mathcal{R}xy \to \mathcal{R}yy)$

Interakcja wiedzy i wiary (Krauss, Lehmann):

LOGIKI EPISTEMICZNE I DOKSASTYCZNE

Warunki dla logiki doksastycznej:

B_x charakteryzujemy analogiczne jak K_x (jest to również modalność typu $\Box$) ale zamiast (T) rozważać można co najwyżej:
(D_B) $B_x\varphi \rightarrow \neg B_x \neg\varphi$ – spójność przekonań
i ewentualnie osłabioną postać (T):
(WT_B) $B_x(B_x\varphi \rightarrow \varphi)$ – dobra wiara
odpowiada jej semantyczny warunek prawie-zwrotności:
$\forall xy(\mathcal{R}xy \rightarrow \mathcal{R}yy)$
Interakcja wiedzy i wiary (Krauss, Lehmann):
$K_x\varphi \rightarrow B_x\varphi$
$B_x\varphi \rightarrow K_x B_x\varphi$

LOGIKI EPISTEMICZNE I DOKSASTYCZNE

Rozwiązania problemów logik epistemicznych/doksastycznych:

LOGIKI EPISTEMICZNE I DOKSASTYCZNE

Rozwiązania problemów logik epistemicznych/doksastycznych:

- rezygnacja z formalizacji pojęcia ludzkiej wiedzy/wiary na rzecz interpretacji w terminach sztucznej inteligencji (agent o skończonej wiedzy i doskonałych kompetencjach logicznych)

LOGIKI EPISTEMICZNE I DOKSASTYCZNE

Rozwiązania problemów logik epistemicznych/doksastycznych:

- rezygnacja z formalizacji pojęcia ludzkiej wiedzy/wiary na rzecz interpretacji w terminach sztucznej inteligencji (agent o skończonej wiedzy i doskonałych kompetencjach logicznych)
- interpretacja w terminach wiedzy potencjalnej (apriorycznej) (agent kartezjański)

LOGIKI EPISTEMICZNE I DOKSASTYCZNE

Rozwiązania problemów logik epistemicznych/doksastycznych:

- rezygnacja z formalizacji pojęcia ludzkiej wiedzy/wiary na rzecz interpretacji w terminach sztucznej inteligencji (agent o skończonej wiedzy i doskonałych kompetencjach logicznych)
- interpretacja w terminach wiedzy potencjalnej (apriorycznej) (agent kartezjański)
- interpretacja w terminach normatywnych (a powinien wiedzieć/wierzyć, że)

LOGIKI EPISTEMICZNE I DOKSASTYCZNE

Rozwiązania problemów logik epistemicznych/doksastycznych:

- rezygnacja z formalizacji pojęcia ludzkiej wiedzy/wiary na rzecz interpretacji w terminach sztucznej inteligencji (agent o skończonej wiedzy i doskonałych kompetencjach logicznych)
- interpretacja w terminach wiedzy potencjalnej (apriorycznej) (agent kartezjański)
- interpretacja w terminach normatywnych (a powinien wiedzieć/wierzyć, że)
- interpretacja B_x w terminach akceptacji (przyjmowania do wiadomości)

LOGIKI EPISTEMICZNE I DOKSASTYCZNE

Rozwiązania problemów logik epistemicznych/doksastycznych:

- rezygnacja z formalizacji pojęcia ludzkiej wiedzy/wiary na rzecz interpretacji w terminach sztucznej inteligencji (agent o skończonej wiedzy i doskonałych kompetencjach logicznych)
- interpretacja w terminach wiedzy potencjalnej (apriorycznej) (agent kartezjański)
- interpretacja w terminach normatywnych (a powinien wiedzieć/wierzyć, że)
- interpretacja B_x w terminach akceptacji (przyjmowania do wiadomości)
- osłabienie logiki (bez (RG), (K), (5) itp.)

LOGIKI EPISTEMICZNE I DOKSASTYCZNE

Rozwiązania problemów logik epistemicznych/doksastycznych:

- rezygnacja z formalizacji pojęcia ludzkiej wiedzy/wiary na rzecz interpretacji w terminach sztucznej inteligencji (agent o skończonej wiedzy i doskonałych kompetencjach logicznych)
- interpretacja w terminach wiedzy potencjalnej (apriorycznej) (agent kartezjański)
- interpretacja w terminach normatywnych (a powinien wiedzieć/wierzyć, że)
- interpretacja B_x w terminach akceptacji (przyjmowania do wiadomości)
- osłabienie logiki (bez (RG), (K), (5) itp.)

LOGIKI EPISTEMICZNE I DOKSASTYCZNE

Uwaga:

Rezygnacja z aksjomatów (D), (T), (4), (5) to tylko odrzucenie pewnych własności relacji poznawczej osiągalności, ale eliminacja (RG) lub (K) wymaga znacznie poważniejszych modyfikacji:

LOGIKI EPISTEMICZNE I DOKSASTYCZNE

Uwaga:

Rezygnacja z aksjomatów (D), (T), (4), (5) to tylko odrzucenie pewnych własności relacji poznawczej osiągalności, ale eliminacja (RG) lub (K) wymaga znacznie poważniejszych modyfikacji:

- porzucenie klasy logik normalnych

LOGIKI EPISTEMICZNE I DOKSASTYCZNE

Uwaga:

Rezygnacja z aksjomatów (D), (T), (4), (5) to tylko odrzucenie pewnych własności relacji poznawczej osiągalności, ale eliminacja (RG) lub (K) wymaga znacznie poważniejszych modyfikacji:

- porzucenie klasy logik normalnych
- zmiana semantyki

Uogólnienie II – Podział logik modalnych

Uwaga: Dla uproszczenia rozważań, ograniczymy się do języka monomodalnego z jednym funktorem konieczności ($\mathbf{J}_\Box$) (zakładamy, że $\Diamond$ jest wprowadzana przez definicję). Logiki są tu rozumiane jako zbiory formuł domknięte na pewne operacje (reguły).

Uogólnienie II – Podział logik modalnych

Uwaga: Dla uproszczenia rozważań, ograniczymy się do języka monomodalnego z jednym funktorem konieczności ($\mathbf{J}_\Box$) (zakładamy, że $\Diamond$ jest wprowadzana przez definicję). Logiki są tu rozumiane jako zbiory formuł domknięte na pewne operacje (reguły).

Logika modalna – ogólna charakterystyka:

Uogólnienie II – Podział logik modalnych

Uwaga: Dla uproszczenia rozważań, ograniczymy się do języka monomodalnego z jednym funktorem konieczności ($\mathbf{J}_{\Box}$) (zakładamy, że $\Diamond$ jest wprowadzana przez definicję). Logiki są tu rozumiane jako zbiory formuł domknięte na pewne operacje (reguły).

Logika modalna – ogólna charakterystyka:

Przez logikę modalną $\mathbf{L}$ rozumiemy dowolny zbiór formuł w pewnym języku modalnym $\mathbf{J}$, który spełnia następujące warunki:

Uogólnienie II – Podział logik modalnych

Uwaga: Dla uproszczenia rozważań, ograniczymy się do języka monomodalnego z jednym funktorem konieczności ($\mathbf{J}_{\Box}$) (zakładamy, że $\Diamond$ jest wprowadzana przez definicję). Logiki są tu rozumiane jako zbiory formuł domknięte na pewne operacje (reguły).

Logika modalna – ogólna charakterystyka:

Przez logikę modalną $\mathbf{L}$ rozumiemy dowolny zbiór formuł w pewnym języku modalnym $\mathbf{J}$, który spełnia następujące warunki:

- TAUT $\subseteq \mathbf{L}$, gdzie TAUT to zbiór tautologii **KRZ**

Uogólnienie II – Podział logik modalnych

Uwage: Dla uproszczenia rozważań, ograniczymy się do języka monomodalnego z jednym funktorem konieczności ($\mathbf{J}_\Box$) (zakładamy, że $\Diamond$ jest wprowadzana przez definicję). Logiki są tu rozumiane jako zbiory formuł domknięte na pewne operacje (reguły).

Logika modalna – ogólna charakterystyka:

Przez logikę modalną $\mathbf{L}$ rozumiemy dowolny zbiór formuł w pewnym języku modalnym $\mathbf{J}$, który spełnia następujące warunki:

- TAUT $\subseteq \mathbf{L}$, gdzie TAUT to zbiór tautologii **KRZ**
- jeżeli $\varphi \in \mathbf{L}$, to e(φ) $\in \mathbf{L}$, gdzie e to dowolny endomorfizm z *ZZ* w *FOR*($\mathbf{J}$)

Uogólnienie II – Podział logik modalnych

Uwaga: Dla uproszczenia rozważań, ograniczymy się do języka monomodalnego z jednym funktorem konieczności ($\mathbf{J}_\Box$) (zakładamy, że $\Diamond$ jest wprowadzana przez definicję). Logiki są tu rozumiane jako zbiory formuł domknięte na pewne operacje (reguły).

Logika modalna – ogólna charakterystyka:

Przez logikę modalną **L** rozumiemy dowolny zbiór formuł w pewnym języku modalnym **J**, który spełnia następujące warunki:

- TAUT $\subseteq$ **L**, gdzie TAUT to zbiór tautologii **KRZ**
- jeżeli $\varphi \in \mathbf{L}$, to $e(\varphi) \in \mathbf{L}$, gdzie e to dowolny endomorfizm z *ZZ* w *FOR*(**J**)
- jeżeli $\varphi \in \mathbf{L}$ i $\varphi \to \psi \in \mathbf{L}$, to $\psi \in \mathbf{L}$

Uogólnienie II – Podział logik modalnych

Rozważmy następujące reguły:

Uogólnienie II – Podział logik modalnych

Rozważmy następujące reguły:

(RE) jeżeli $\varphi \leftrightarrow \psi \in \mathbf{L}$, to $\Box\varphi \leftrightarrow \Box\psi \in \mathbf{L}$

Uogólnienie II – Podział logik modalnych

Rozważmy następujące reguły:

(RE) jeżeli $\varphi \leftrightarrow \psi \in \mathbf{L}$, to $\Box\varphi \leftrightarrow \Box\psi \in \mathbf{L}$
(RM) jeżeli $\varphi \rightarrow \psi \in \mathbf{L}$, to $\Box\varphi \rightarrow \Box\psi \in \mathbf{L}$

Uogólnienie II – Podział logik modalnych

Rozważmy następujące reguły:

(RE) jeżeli $\varphi \leftrightarrow \psi \in \mathbf{L}$, to $\Box\varphi \leftrightarrow \Box\psi \in \mathbf{L}$
(RM) jeżeli $\varphi \rightarrow \psi \in \mathbf{L}$, to $\Box\varphi \rightarrow \Box\psi \in \mathbf{L}$
(RR) jeżeli $\wedge\Gamma \rightarrow \psi \in \mathbf{L}$, to $\wedge\Box\Gamma \rightarrow \Box\psi \in \mathbf{L}$, gdzie $\Gamma \neq \varnothing$

Uogólnienie II – Podział logik modalnych

Rozważmy następujące reguły:

(RE) jeżeli $\varphi \leftrightarrow \psi \in \mathbf{L}$, to $\Box\varphi \leftrightarrow \Box\psi \in \mathbf{L}$
(RM) jeżeli $\varphi \rightarrow \psi \in \mathbf{L}$, to $\Box\varphi \rightarrow \Box\psi \in \mathbf{L}$
(RR) jeżeli $\wedge\Gamma \rightarrow \psi \in \mathbf{L}$, to $\wedge\Box\Gamma \rightarrow \Box\psi \in \mathbf{L}$, gdzie $\Gamma \neq \varnothing$
(RG) jeżeli $\varphi \in \mathbf{L}$, to $\Box\varphi \in \mathbf{L}$

Uogólnienie II – Podział logik modalnych

Rozważmy następujące reguły:

(RE) jeżeli $\varphi \leftrightarrow \psi \in \mathbf{L}$, to $\Box\varphi \leftrightarrow \Box\psi \in \mathbf{L}$
(RM) jeżeli $\varphi \to \psi \in \mathbf{L}$, to $\Box\varphi \to \Box\psi \in \mathbf{L}$
(RR) jeżeli $\wedge\Gamma \to \psi \in \mathbf{L}$, to $\wedge\Box\Gamma \to \Box\psi \in \mathbf{L}$, gdzie $\Gamma \neq \varnothing$
(RG) jeżeli $\varphi \in \mathbf{L}$, to $\Box\varphi \in \mathbf{L}$

Klasy logik modalnych:

Dowolna logika modalna **L** domknięta na (RE) to:

- *logika kongruencyjna* (klasyczna modalna),

Uogólnienie II – Podział logik modalnych

Rozważmy następujące reguły:

(RE) jeżeli $\varphi \leftrightarrow \psi \in \mathbf{L}$, to $\Box\varphi \leftrightarrow \Box\psi \in \mathbf{L}$
(RM) jeżeli $\varphi \rightarrow \psi \in \mathbf{L}$, to $\Box\varphi \rightarrow \Box\psi \in \mathbf{L}$
(RR) jeżeli $\wedge\Gamma \rightarrow \psi \in \mathbf{L}$, to $\wedge\Box\Gamma \rightarrow \Box\psi \in \mathbf{L}$, gdzie $\Gamma \neq \varnothing$
(RG) jeżeli $\varphi \in \mathbf{L}$, to $\Box\varphi \in \mathbf{L}$

Klasy logik modalnych:

Dowolna logika modalna **L** domknięta na (RE) to:

- *logika kongruencyjna* (klasyczna modalna), domknięta na (RM) to:
- *logika monotoniczna*,

Uogólnienie II – Podział logik modalnych

Rozważmy następujące reguły:

(RE) jeżeli $\varphi \leftrightarrow \psi \in \mathbf{L}$, to $\Box\varphi \leftrightarrow \Box\psi \in \mathbf{L}$
(RM) jeżeli $\varphi \rightarrow \psi \in \mathbf{L}$, to $\Box\varphi \rightarrow \Box\psi \in \mathbf{L}$
(RR) jeżeli $\wedge\Gamma \rightarrow \psi \in \mathbf{L}$, to $\wedge\Box\Gamma \rightarrow \Box\psi \in \mathbf{L}$, gdzie $\Gamma \neq \varnothing$
(RG) jeżeli $\varphi \in \mathbf{L}$, to $\Box\varphi \in \mathbf{L}$

Klasy logik modalnych:

Dowolna logika modalna **L** domknięta na (RE) to:

- *logika kongruencyjna* (klasyczna modalna), domknięta na (RM) to:
- *logika monotoniczna*, domknięta na (RR), to:
- *logika regularna*,

Uogólnienie II – Podział logik modalnych

Rozważmy następujące reguły:

(RE) jeżeli $\varphi \leftrightarrow \psi \in \mathbf{L}$, to $\Box\varphi \leftrightarrow \Box\psi \in \mathbf{L}$
(RM) jeżeli $\varphi \rightarrow \psi \in \mathbf{L}$, to $\Box\varphi \rightarrow \Box\psi \in \mathbf{L}$
(RR) jeżeli $\wedge\Gamma \rightarrow \psi \in \mathbf{L}$, to $\wedge\Box\Gamma \rightarrow \Box\psi \in \mathbf{L}$, gdzie $\Gamma \neq \varnothing$
(RG) jeżeli $\varphi \in \mathbf{L}$, to $\Box\varphi \in \mathbf{L}$

Klasy logik modalnych:

Dowolna logika modalna **L** domknięta na (RE) to:

- *logika kongruencyjna* (klasyczna modalna), domknięta na (RM) to:
- *logika monotoniczna*, domknięta na (RR), to:
- *logika regularna*, wreszcie domknięta na (RR) i (RG) to:
- *logika normalna*.

Uogólnienie II – Podział logik modalnych

Relacje między logikami:

Uogólnienie II – Podział logik modalnych

Relacje między logikami:

- Każda logika normalna jest zarazem regularna;

Uogólnienie II – Podział logik modalnych

Relacje między logikami:

- Każda logika normalna jest zarazem regularna;
- Każda logika regularna jest zarazem monotoniczna

Uogólnienie II – Podział logik modalnych

Relacje między logikami:

- Każda logika normalna jest zarazem regularna;
- Każda logika regularna jest zarazem monotoniczna ((RM) jest szczególnym przypadkiem (RR));

Uogólnienie II – Podział logik modalnych

Relacje między logikami:

- Każda logika normalna jest zarazem regularna;
- Każda logika regularna jest zarazem monotoniczna ((RM) jest szczególnym przypadkiem (RR));
- Każda logika monotoniczna jest logiką kongruencyjną.

Uogólnienie II – Podział logik modalnych

Relacje między logikami:

- Każda logika normalna jest zarazem regularna;
- Każda logika regularna jest zarazem monotoniczna ((RM) jest szczególnym przypadkiem (RR));
- Każda logika monotoniczna jest logiką kongruencyjną.

Bazowe logiki modalne:

Uogólnienie II – Podział logik modalnych

Relacje między logikami:

- Każda logika normalna jest zarazem regularna;
- Każda logika regularna jest zarazem monotoniczna ((RM) jest szczególnym przypadkiem (RR));
- Każda logika monotoniczna jest logiką kongruencyjną.

Bazowe logiki modalne:

Niech

- **E** oznacza najsłabszą logikę kongruencyjną,

Uogólnienie II – Podział logik modalnych

Relacje między logikami:

- Każda logika normalna jest zarazem regularna;
- Każda logika regularna jest zarazem monotoniczna ((RM) jest szczególnym przypadkiem (RR));
- Każda logika monotoniczna jest logiką kongruencyjną.

Bazowe logiki modalne:

Niech

- **E** oznacza najsłabszą logikę kongruencyjną,
- **M** – monotoniczną,

Uogólnienie II – Podział logik modalnych

Relacje między logikami:

- Każda logika normalna jest zarazem regularna;
- Każda logika regularna jest zarazem monotoniczna ((RM) jest szczególnym przypadkiem (RR));
- Każda logika monotoniczna jest logiką kongruencyjną.

Bazowe logiki modalne:

Niech

- **E** oznacza najsłabszą logikę kongruencyjną,
- **M** – monotoniczną,
- **R** – regularną,

Uogólnienie II – Podział logik modalnych

Relacje między logikami:

- Każda logika normalna jest zarazem regularna;
- Każda logika regularna jest zarazem monotoniczna ((RM) jest szczególnym przypadkiem (RR));
- Każda logika monotoniczna jest logiką kongruencyjną.

Bazowe logiki modalne:

Niech

- **E** oznacza najsłabszą logikę kongruencyjną,
- **M** – monotoniczną,
- **R** – regularną,
- **K** – normalną.

Uogólnienie II – Podział logik modalnych

Relacje między logikami:

- Każda logika normalna jest zarazem regularna;
- Każda logika regularna jest zarazem monotoniczna ((RM) jest szczególnym przypadkiem (RR));
- Każda logika monotoniczna jest logiką kongruencyjną.

Bazowe logiki modalne:

Niech

- **E** oznacza najsłabszą logikę kongruencyjną,
- **M** – monotoniczną,
- **R** – regularną,
- **K** – normalną.

Definicja dowodu, tezy i dedukowalności bez zmian; $\vdash_L \varphi$ ($\Gamma \vdash_L \varphi$) oznacza, że φ jest tezą **L** (jest dedukowalne z Γ w **L**).

Semantyki dla słabszych logik modalnych

Monomodalne logiki regularne – semantyka relacyjna:

Semantyki dla słabszych logik modalnych

Monomodalne logiki regularne – semantyka relacyjna:

Regularna struktura relacyjna:

Semantyki dla słabszych logik modalnych

Monomodalne logiki regularne – semantyka relacyjna:

Regularna struktura relacyjna:

Regularną strukturą relacyjną, albo ramą (frame) jest dowolna trójka $\mathfrak{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{Q}, \mathcal{R} \rangle$ gdzie:

Semantyki dla słabszych logik modalnych

Monomodalne logiki regularne – semantyka relacyjna:

Regularna struktura relacyjna:
Regularną strukturą relacyjną, albo ramą (frame) jest dowolna trójka $\mathfrak{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{Q}, \mathcal{R} \rangle$ gdzie:

- dziedzina to $\mathcal{W} \neq \varnothing$, który jest zbiorem punktów (światów możliwych);

Semantyki dla słabszych logik modalnych

Monomodalne logiki regularne – semantyka relacyjna:

Regularna struktura relacyjna:
Regularną strukturą relacyjną, albo ramą (frame) jest dowolna trójka $\mathfrak{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{Q}, \mathcal{R} \rangle$ gdzie:

- dziedzina to $\mathcal{W} \neq \varnothing$, który jest zbiorem punktów (światów możliwych);
- $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{W}$ to zbiór światów nienormalnych (queer)

Semantyki dla słabszych logik modalnych

Monomodalne logiki regularne – semantyka relacyjna:

Regularna struktura relacyjna:

Regularną strukturą relacyjną, albo ramą (frame) jest dowolna trójka $\mathfrak{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{Q}, \mathcal{R} \rangle$ gdzie:

- dziedzina to $\mathcal{W} \neq \varnothing$, który jest zbiorem punktów (światów możliwych);
- $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{W}$ to zbiór światów nienormalnych (queer)
- $\mathcal{R}$ to binarna relacja na $\mathcal{W}$, zwana relacją osiągalności.

Semantyki dla słabszych logik modalnych

Monomodalne logiki regularne – semantyka relacyjna:

Regularna struktura relacyjna:

Regularną strukturą relacyjną, albo ramą (frame) jest dowolna trójka $\mathfrak{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{Q}, \mathcal{R} \rangle$ gdzie:

- dziedzina to $\mathcal{W} \neq \varnothing$, który jest zbiorem punktów (światów możliwych);
- $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{W}$ to zbiór światów nienormalnych (queer)
- $\mathcal{R}$ to binarna relacja na $\mathcal{W}$, zwana relacją osiągalności.

Semantyki dla słabszych logik modalnych

Monomodalne logiki regularne – semantyka relacyjna:

Semantyki dla słabszych logik modalnych

Monomodalne logiki regularne – semantyka relacyjna:

Modelem na danej strukturze $\mathfrak{F}$ jest dowolny układ $\mathfrak{M} = \langle\ \mathfrak{F}, V\rangle$, gdzie V jest funkcją waluacji dla zmiennych, tj. $V : ZZ \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{W})$.

Semantyki dla słabszych logik modalnych

Monomodalne logiki regularne – semantyka relacyjna:

Modelem na danej strukturze $\mathfrak{F}$ jest dowolny układ $\mathfrak{M} = \langle\, \mathfrak{F}, V\rangle$, gdzie V jest funkcją waluacji dla zmiennych, tj. $V : ZZ \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{W})$.
Definicję *spełniania formuły* φ *w punkcie* w *w modelu* $\mathfrak{M}$ ($\mathfrak{M}, w \vDash \varphi$) wyrażają takie same warunki jak w modelach relacyjnych dla logik normalnych, jedynie dla funktorów modalnych mamy po parze warunków:

Semantyki dla słabszych logik modalnych

Monomodalne logiki regularne – semantyka relacyjna:

Modelem na danej strukturze $\mathfrak{F}$ jest dowolny układ $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{F}, V \rangle$, gdzie V jest funkcją waluacji dla zmiennych, tj. $V : ZZ \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{W})$.
Definicję *spełniania formuły* φ *w punkcie* w *modelu* $\mathfrak{M}$ ($\mathfrak{M}, w \vDash \varphi$) wyrażają takie same warunki jak w modelach relacyjnych dla logik normalnych, jedynie dla funktorów modalnych mamy po parze warunków:
a) jeżeli $w \notin \mathcal{Q}$:

Semantyki dla słabszych logik modalnych

Monomodalne logiki regularne – semantyka relacyjna:

Modelem na danej strukturze $\mathfrak{F}$ jest dowolny układ $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{F}, V \rangle$, gdzie V jest funkcją waluacji dla zmiennych, tj. $V : ZZ \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{W})$.
Definicję *spełniania formuły* φ *w punkcie* w *w modelu* $\mathfrak{M}$ ($\mathfrak{M}, w \vDash \varphi$) wyrażają takie same warunki jak w modelach relacyjnych dla logik normalnych, jedynie dla funktorów modalnych mamy po parze warunków:
a) jeżeli $w \notin \mathcal{Q}$:

$\mathfrak{M}, w \vDash \Box\varphi$ wtw $\mathfrak{M}, w' \vDash \varphi$ dla dowolnego w' takiego, że $\mathcal{R}ww'$
$\mathfrak{M}, w \vDash \Diamond\varphi$ wtw $\mathfrak{M}, w' \vDash \varphi$ dla pewnego w' takiego, że $\mathcal{R}ww'$

Semantyki dla słabszych logik modalnych

Monomodalne logiki regularne – semantyka relacyjna:

Modelem na danej strukturze $\mathfrak{F}$ jest dowolny układ $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{F}, V \rangle$, gdzie V jest funkcją waluacji dla zmiennych, tj. $V : ZZ \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{W})$.
Definicję *spełniania formuły* φ *w punkcie* w *modelu* $\mathfrak{M}$ ($\mathfrak{M}, w \vDash \varphi$) wyrażają takie same warunki jak w modelach relacyjnych dla logik normalnych, jedynie dla funktorów modalnych mamy po parze warunków:
a) jeżeli $w \notin \mathcal{Q}$:
$\mathfrak{M}, w \vDash \Box\varphi$ wtw $\mathfrak{M}, w' \vDash \varphi$ dla dowolnego w' takiego, że $\mathcal{R}ww'$
$\mathfrak{M}, w \vDash \Diamond\varphi$ wtw $\mathfrak{M}, w' \vDash \varphi$ dla pewnego w' takiego, że $\mathcal{R}ww'$
b) jeżeli $w \in \mathcal{Q}$:

Semantyki dla słabszych logik modalnych

Monomodalne logiki regularne – semantyka relacyjna:

Modelem na danej strukturze $\mathfrak{F}$ jest dowolny układ $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{F}, V \rangle$, gdzie V jest funkcją waluacji dla zmiennych, tj. $V : ZZ \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{W})$.

Definicję *spełniania formuły* φ *w punkcie* w *modelu* $\mathfrak{M}$ ($\mathfrak{M}, w \vDash \varphi$) wyrażają takie same warunki jak w modelach relacyjnych dla logik normalnych, jedynie dla funktorów modalnych mamy po parze warunków:

a) jeżeli $w \notin \mathcal{Q}$:

$\mathfrak{M}, w \vDash \Box\varphi$ wtw $\mathfrak{M}, w' \vDash \varphi$ dla dowolnego w' takiego, że $\mathcal{R}ww'$

$\mathfrak{M}, w \vDash \Diamond\varphi$ wtw $\mathfrak{M}, w' \vDash \varphi$ dla pewnego w' takiego, że $\mathcal{R}ww'$

b) jeżeli $w \in \mathcal{Q}$:

$\mathfrak{M}, w \nvDash \Box\varphi$

$\mathfrak{M}, w \vDash \Diamond\varphi$

Semantyki dla słabszych logik modalnych

Monomodalne logiki kongruentne i monotoniczne – Struktura otoczeniowa:

Semantyki dla słabszych logik modalnych

Monomodalne logiki kongruentne i monotoniczne – Struktura otoczeniowa:

<u>Strukturą otoczeniową</u> jest dowolna para $\mathfrak{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{N} \rangle$ gdzie:

Semantyki dla słabszych logik modalnych

Monomodalne logiki kongruentne i monotoniczne – Struktura otoczeniowa:

Strukturą otoczeniową jest dowolna para $\mathfrak{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{N} \rangle$ gdzie:

- dziedzina to $\mathcal{W} \neq \varnothing$, który jest zbiorem punktów (światów możliwych);

Semantyki dla słabszych logik modalnych

Monomodalne logiki kongruentne i monotoniczne – Struktura otoczeniowa:

Strukturą otoczeniową jest dowolna para $\mathfrak{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{N} \rangle$ gdzie:

- dziedzina to $\mathcal{W} \neq \varnothing$, który jest zbiorem punktów (światów możliwych);
- $\mathcal{N}$ to funkcja z $\mathcal{W}$ w $\mathcal{PP}(\mathcal{W})$ ($\mathcal{N} : \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{PP}(\mathcal{W})$), zwana funkcją sąsiedztwa

Semantyki dla słabszych logik modalnych

Monomodalne logiki kongruentne i monotoniczne – Struktura otoczeniowa:

Strukturą otoczeniową jest dowolna para $\mathfrak{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{N} \rangle$ gdzie:

- dziedzina to $\mathcal{W} \neq \varnothing$, który jest zbiorem punktów (światów możliwych);
- $\mathcal{N}$ to funkcja z $\mathcal{W}$ w $\mathcal{PP}(\mathcal{W})$ ($\mathcal{N} : \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{PP}(\mathcal{W})$), zwana funkcją sąsiedztwa
(inaczej: $\mathcal{N}(w) \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{W})$, dla każdego $w \in \mathcal{W}$).

Semantyki dla słabszych logik modalnych

Monomodalne logiki kongruentne i monotoniczne – Struktura otoczeniowa:

Strukturą otoczeniową jest dowolna para $\mathfrak{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{N} \rangle$ gdzie:

- dziedzina to $\mathcal{W} \neq \varnothing$, który jest zbiorem punktów (światów możliwych);
- $\mathcal{N}$ to funkcja z $\mathcal{W}$ w $\mathcal{PP}(\mathcal{W})$ ($\mathcal{N} : \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{PP}(\mathcal{W})$), zwana funkcją sąsiedztwa
  (inaczej: $\mathcal{N}(w) \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{W})$, dla każdego $w \in \mathcal{W}$).

$\mathcal{N}$ (od neighbourhood lub od necessary) jest to funkcja, która każdemu punktowi przyporządkowuje zbiór tych sądów, które są w nim konieczne.

Semantyki dla słabszych logik modalnych

Monomodalne logiki kongruentne i monotoniczne – Struktura otoczeniowa:

Semantyki dla słabszych logik modalnych

Monomodalne logiki kongruentne i monotoniczne – Struktura otoczeniowa:

Modelem na danej strukturze $\mathfrak{F}$ jest dowolny układ $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{F}, V \rangle$, gdzie V jest funkcją waluacji zmiennych. Zarówno definicja wartościowania zmiennych, jak i warunki spełniania w modelu dla wszystkich formuł za wyjątkiem modalnych są takie same jak w semantyce relacyjnej. Różnica dotyczy waluacji formuł modalnych;

Semantyki dla słabszych logik modalnych

Monomodalne logiki kongruentne i monotoniczne – Struktura otoczeniowa:

Modelem na danej strukturze $\mathfrak{F}$ jest dowolny układ $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{F}, V \rangle$, gdzie V jest funkcją waluacji zmiennych. Zarówno definicja wartościowania zmiennych, jak i warunki spełniania w modelu dla wszystkich formuł za wyjątkiem modalnych są takie same jak w semantyce relacyjnej. Różnica dotyczy waluacji formuł modalnych;

- $w \models \Box\varphi$ wtw $\|\varphi\| \in \mathcal{N}(w)$

Semantyki dla słabszych logik modalnych

Monomodalne logiki kongruentne i monotoniczne – Struktura otoczeniowa:

Modelem na danej strukturze $\mathfrak{F}$ jest dowolny układ $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{F}, V \rangle$, gdzie V jest funkcją waluacji zmiennych. Zarówno definicja wartościowania zmiennych, jak i warunki spełniania w modelu dla wszystkich formuł za wyjątkiem modalnych są takie same jak w semantyce relacyjnej. Różnica dotyczy waluacji formuł modalnych;

- $w \models \Box\varphi$ wtw $\|\varphi\| \in \mathcal{N}(w)$
- $w \models \Diamond\varphi$ wtw $\| -\varphi\| \notin \mathcal{N}(w)$

Semantyki dla słabszych logik modalnych

Monomodalne logiki kongruentne i monotoniczne – Struktura otoczeniowa:

Modelem na danej strukturze $\mathfrak{F}$ jest dowolny układ $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{F}, V \rangle$, gdzie V jest funkcją waluacji zmiennych. Zarówno definicja wartościowania zmiennych, jak i warunki spełniania w modelu dla wszystkich formuł za wyjątkiem modalnych są takie same jak w semantyce relacyjnej. Różnica dotyczy waluacji formuł modalnych;

- $w \models \Box\varphi$ wtw $\|\varphi\| \in \mathcal{N}(w)$
- $w \models \Diamond\varphi$ wtw $\| -\varphi\| \notin \mathcal{N}(w)$

Definicje prawdziwości w modelu, tautologiczności i wynikania bez zmian.

Semantyki dla słabszych logik modalnych

Monomodalne logiki kongruentne i monotoniczne – Struktura otoczeniowa:

Modelem na danej strukturze $\mathfrak{F}$ jest dowolny układ $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{F}, V \rangle$, gdzie V jest funkcją waluacji zmiennych. Zarówno definicja wartościowania zmiennych, jak i warunki spełniania w modelu dla wszystkich formuł za wyjątkiem modalnych są takie same jak w semantyce relacyjnej. Różnica dotyczy waluacji formuł modalnych;

- $w \models \Box\varphi$ wtw $\|\varphi\| \in \mathcal{N}(w)$
- $w \models \Diamond\varphi$ wtw $\| - \varphi\| \notin \mathcal{N}(w)$

Definicje prawdziwości w modelu, tautologiczności i wynikania bez zmian.

Intuicyjnie $\Box\varphi$ jest prawdziwe w punkcie w wtedy gdy sąd wyrażany przez φ jest w tym punkcie konieczny. Analogicznie, formuła jest w w możliwa wtedy gdy $\mathcal{N}(w)$ nie zawiera dopełnienia sądu wyrażanego przez tę formułę.

Semantyki dla słabszych logik modalnych

Charakteryzacja:

Semantyki dla słabszych logik modalnych

Charakteryzacja:

- **E** jest adekwatne względem klasy wszystkich modeli otoczeniowych.

Semantyki dla słabszych logik modalnych

Charakteryzacja:

- **E** jest adekwatne względem klasy wszystkich modeli otoczeniowych.
- **M** jest adekwatne względem klasy tych modeli otoczeniowych, które spełniają warunek:

Semantyki dla słabszych logik modalnych

Charakteryzacja:

- **E** jest adekwatne względem klasy wszystkich modeli otoczeniowych.
- **M** jest adekwatne względem klasy tych modeli otoczeniowych, które spełniają warunek:
  - (m) jeżeli $X \cap Y \in \mathcal{N}(w)$, to $X \in \mathcal{N}(w)$ i $Y \in \mathcal{N}(w)$

Semantyki dla słabszych logik modalnych

Charakteryzacja:

- **E** jest adekwatne względem klasy wszystkich modeli otoczeniowych.
- **M** jest adekwatne względem klasy tych modeli otoczeniowych, które spełniają warunek:
  - (m) jeżeli $X \cap Y \in \mathcal{N}(w)$, to $X \in \mathcal{N}(w)$ i $Y \in \mathcal{N}(w)$ lub równoważnie
  - (m') jeżeli $X \subseteq Y$ i $X \in \mathcal{N}(w)$, to $Y \in \mathcal{N}(w)$

Semantyki dla słabszych logik modalnych

Inne warunki:

Semantyki dla słabszych logik modalnych

Inne warunki:

(c) jeżeli $X \in \mathcal{N}(w)$ i $Y \in \mathcal{N}(w)$, to $X \cap Y \in \mathcal{N}(w)$

Semantyki dla słabszych logik modalnych

Inne warunki:

(c) jeżeli $X \in \mathcal{N}(w)$ i $Y \in \mathcal{N}(w)$, to $X \cap Y \in \mathcal{N}(w)$
(n) $\mathcal{W} \in \mathcal{N}(w)$

Semantyki dla słabszych logik modalnych

Inne warunki:

(c) jeżeli $X \in \mathcal{N}(w)$ i $Y \in \mathcal{N}(w)$, to $X \cap Y \in \mathcal{N}(w)$
(n) $\mathcal{W} \in \mathcal{N}(w)$
(d) jeżeli $X \in \mathcal{N}(w)$, to $-X \notin \mathcal{N}(w)$

Semantyki dla słabszych logik modalnych

Inne warunki:

(c) jeżeli $X \in \mathcal{N}(w)$ i $Y \in \mathcal{N}(w)$, to $X \cap Y \in \mathcal{N}(w)$
(n) $\mathcal{W} \in \mathcal{N}(w)$
(d) jeżeli $X \in \mathcal{N}(w)$, to $-X \notin \mathcal{N}(w)$
(t) jeżeli $X \in \mathcal{N}(w)$, to $w \in X$

Semantyki dla słabszych logik modalnych

Inne warunki:

(c) jeżeli $X \in \mathcal{N}(w)$ i $Y \in \mathcal{N}(w)$, to $X \cap Y \in \mathcal{N}(w)$
(n) $\mathcal{W} \in \mathcal{N}(w)$
(d) jeżeli $X \in \mathcal{N}(w)$, to $-X \notin \mathcal{N}(w)$
(t) jeżeli $X \in \mathcal{N}(w)$, to $w \in X$
(4) jeżeli $X \in \mathcal{N}(w)$, to $\{w' : X \in \mathcal{N}(w')\} \in \mathcal{N}(w)$

Semantyki dla słabszych logik modalnych

Inne warunki:

(c) jeżeli $X \in \mathcal{N}(w)$ i $Y \in \mathcal{N}(w)$, to $X \cap Y \in \mathcal{N}(w)$
(n) $\mathcal{W} \in \mathcal{N}(w)$
(d) jeżeli $X \in \mathcal{N}(w)$, to $-X \notin \mathcal{N}(w)$
(t) jeżeli $X \in \mathcal{N}(w)$, to $w \in X$
(4) jeżeli $X \in \mathcal{N}(w)$, to $\{w' : X \in \mathcal{N}(w')\} \in \mathcal{N}(w)$

– klasa modeli otoczeniowych spełniających warunki (m) i (c) daje nam najsłabszą logikę regularną **R**,

Semantyki dla słabszych logik modalnych

Inne warunki:

(c) jeżeli $X \in \mathcal{N}(w)$ i $Y \in \mathcal{N}(w)$, to $X \cap Y \in \mathcal{N}(w)$
(n) $\mathcal{W} \in \mathcal{N}(w)$
(d) jeżeli $X \in \mathcal{N}(w)$, to $-X \notin \mathcal{N}(w)$
(t) jeżeli $X \in \mathcal{N}(w)$, to $w \in X$
(4) jeżeli $X \in \mathcal{N}(w)$, to $\{w' : X \in \mathcal{N}(w')\} \in \mathcal{N}(w)$

– klasa modeli otoczeniowych spełniających warunki (m) i (c) daje nam najsłabszą logikę regularną **R**,
– po zawężeniu do modeli spełniających dodatkowo warunek (n) otrzymujemy otoczeniową charakteryzację **K**

Semantyki dla słabszych logik modalnych

Inne warunki:

(c) jeżeli $X \in \mathcal{N}(w)$ i $Y \in \mathcal{N}(w)$, to $X \cap Y \in \mathcal{N}(w)$
(n) $\mathcal{W} \in \mathcal{N}(w)$
(d) jeżeli $X \in \mathcal{N}(w)$, to $-X \notin \mathcal{N}(w)$
(t) jeżeli $X \in \mathcal{N}(w)$, to $w \in X$
(4) jeżeli $X \in \mathcal{N}(w)$, to $\{w' : X \in \mathcal{N}(w')\} \in \mathcal{N}(w)$

– klasa modeli otoczeniowych spełniających warunki (m) i (c) daje nam najsłabszą logikę regularną **R**,
– po zawężeniu do modeli spełniających dodatkowo warunek (n) otrzymujemy otoczeniową charakteryzację **K**
– (d), (t) i (4) charakteryzują modele otoczeniowe spełniające aksjomaty: (D), (T) i (4).