LOGIKA II – WPROWADZENIE DO LOGIK NIEKLASYCZNYCH

Andrzej Indrzejczak

Katedra Logiki i Metodologii Nauk UŁ

Łódź, semestr zimowy 2008/2009

LOGIKA INTUICJONISTYCZNA

Historia:

LOGIKA INTUICJONISTYCZNA

Historia:

1907 – L. Brouwer, początek ruchu intuicjonistycznego

LOGIKA INTUICJONISTYCZNA

Historia:

1907 – L. Brouwer, początek ruchu intuicjonistycznego

1925 – Kołmogorov, 1930 – A. Heyting – aksjomatyczna konstrukcja logiki **INT**

LOGIKA INTUICJONISTYCZNA

Historia:

1907 – L. Brouwer, początek ruchu intuicjonistycznego

1925 – Kołmogorov, 1930 – A. Heyting – aksjomatyczna konstrukcja logiki **INT**

lata 30-te – K. Goedel, S. Jaśkowski – semantyka matrycowa dla **INT**, G. Gentzen – teoriodowodowa konstrukcja **INT**

LOGIKA INTUICJONISTYCZNA

Historia:

1907 – L. Brouwer, początek ruchu intuicjonistycznego
1925 – Kołmogorov, 1930 – A. Heyting – aksjomatyczna konstrukcja logiki **INT**
lata 30-te – K. Goedel, S. Jaśkowski – semantyka matrycowa dla **INT**, G. Gentzen – teoriodowodowa konstrukcja **INT**
lata 60-te – E. Beth, S. Kripke – semantyka relacyjna dla **INT**

LOGIKA INTUICJONISTYCZNA

Historia:

1907 – L. Brouwer, początek ruchu intuicjonistycznego
1925 – Kołmogorov, 1930 – A. Heyting – aksjomatyczna konstrukcja logiki **INT**
lata 30-te – K. Goedel, S. Jaśkowski – semantyka matrycowa dla **INT**, G. Gentzen – teoriodowodowa konstrukcja **INT**
lata 60-te – E. Beth, S. Kripke – semantyka relacyjna dla **INT**
Motywacje: Konstruktywizm jako reakcja na dominujący w filozofii matematyki realizm pojęciowy i nominalizm (formalizm, szkoła Hilberta). Sprowadzenie prawdy matematycznej do dowiedlności – zakwestionowanie zasady 2-wartościowości.

LOGIKA INTUICJONISTYCZNA

Założenia intuicjonizmu:

LOGIKA INTUICJONISTYCZNA

Założenia intuicjonizmu:

- kryterium istnienia obiektów matematycznych jest ich konstruowalność (niesprzeczność to warunek konieczny ale nie wystarczający!)

LOGIKA INTUICJONISTYCZNA

Założenia intuicjonizmu:

- kryterium istnienia obiektów matematycznych jest ich konstruowalność (niesprzeczność to warunek konieczny ale nie wystarczający!)
- matematykę należy oprzeć na pierwotnej intuicji ciągu liczb naturalnych oraz intuicyjnej oczywistości zasady indukcji matematycznej

LOGIKA INTUICJONISTYCZNA

Założenia intuicjonizmu:

- kryterium istnienia obiektów matematycznych jest ich konstruowalność (niesprzeczność to warunek konieczny ale nie wystarczający!)
- matematykę należy oprzeć na pierwotnej intuicji ciągu liczb naturalnych oraz intuicyjnej oczywistości zasady indukcji matematycznej

Nowa wizja matematyki prowadzi do zakwestionowania tych środków logiki, które umożliwiają niekonstruktywne dowody m.in.

LOGIKA INTUICJONISTYCZNA

Założenia intuicjonizmu:

- kryterium istnienia obiektów matematycznych jest ich konstruowalność (niesprzeczność to warunek konieczny ale nie wystarczający!)
- matematykę należy oprzeć na pierwotnej intuicji ciągu liczb naturalnych oraz intuicyjnej oczywistości zasady indukcji matematycznej

Nowa wizja matematyki prowadzi do zakwestionowania tych środków logiki, które umożliwiają niekonstruktywne dowody m.in. pewnych form dowodu niewprost,

LOGIKA INTUICJONISTYCZNA

Założenia intuicjonizmu:

- kryterium istnienia obiektów matematycznych jest ich konstruowalność (niesprzeczność to warunek konieczny ale nie wystarczający!)
- matematykę należy oprzeć na pierwotnej intuicji ciągu liczb naturalnych oraz intuicyjnej oczywistości zasady indukcji matematycznej

Nowa wizja matematyki prowadzi do zakwestionowania tych środków logiki, które umożliwiają niekonstruktywne dowody m.in. pewnych form dowodu niewprost, tez o postaci:

$\neg\varphi \vee \varphi$, $\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$,

LOGIKA INTUICJONISTYCZNA

Założenia intuicjonizmu:

- kryterium istnienia obiektów matematycznych jest ich konstruowalność (niesprzeczność to warunek konieczny ale nie wystarczający!)
- matematykę należy oprzeć na pierwotnej intuicji ciągu liczb naturalnych oraz intuicyjnej oczywistości zasady indukcji matematycznej

Nowa wizja matematyki prowadzi do zakwestionowania tych środków logiki, które umożliwiają niekonstruktywne dowody m.in. pewnych form dowodu niewprost, tez o postaci:
$\neg\varphi \vee \varphi$, $\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$, $\neg\forall x\varphi \rightarrow \exists x\neg\varphi$, $\neg\forall x\neg\varphi \rightarrow \exists x\varphi$, $\neg\exists x\neg\varphi \rightarrow \forall x\varphi$.

LOGIKA INTUICJONISTYCZNA

Teorio-dowodowa interpretacja znaczenia stałych logicznych INT

LOGIKA INTUICJONISTYCZNA

Teorio-dowodowa interpretacja znaczenia stałych logicznych INT

$\vdash \varphi \wedge \psi$ wtw $\vdash \varphi$ i $\vdash \psi$

$\vdash \varphi \vee \psi$ wtw $\vdash \varphi$ lub $\vdash \psi$

$\vdash \varphi \rightarrow \psi$ wtw jeżeli $\vdash \varphi$, to $\vdash \psi$

$\vdash \neg\varphi$ wtw $\vdash \varphi \rightarrow \perp$

$\vdash \exists x\varphi$ wtw $\vdash \varphi(x/a)$ dla pewnego a

LOGIKA INTUICJONISTYCZNA

Semantyka relacyjna dla IRZ

LOGIKA INTUICJONISTYCZNA

Semantyka relacyjna dla IRZ

Strukturą relacyjną, albo ramą (frame) jest dowolna para $\mathfrak{F} = \langle\ \mathcal{S}, \leq \rangle$ gdzie:

Semantyka relacyjna dla IRZ

Strukturą relacyjną, albo ramą (frame) jest dowolna para $\mathfrak{F} = \langle\ \mathcal{S}, \leq\rangle$ gdzie:

- dziedzina to $\mathcal{S} \neq \varnothing$, który jest zbiorem punktów (stanów wiedzy);

LOGIKA INTUICJONISTYCZNA

Semantyka relacyjna dla IRZ

Strukturą relacyjną, albo ramą (frame) jest dowolna para $\mathfrak{F} = \langle \mathcal{S}, \leq \rangle$ gdzie:

- dziedzina to $\mathcal{S} \neq \varnothing$, który jest zbiorem punktów (stanów wiedzy);
- $\leq$ to binarna relacja na $\mathcal{S}$, zwana relacją dziedziczenia (wiedzy), spełniająca warunek: zwrotności i przechodniości.

LOGIKA INTUICJONISTYCZNA

Model na strukturze:

LOGIKA INTUICJONISTYCZNA

Model na strukturze:

Modelem na danej strukturze $\mathfrak{F}$ jest dowolny układ $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{F}, V \rangle$, gdzie V jest funkcją waluacji dla zmiennych, tj. $V : ZZ \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{S})$, spełniającą warunek dziedziczenia prawdziwości zmiennych:
jeżeli $s \in V(p)$ i $s \leq s'$, to $s' \in V(p)$

LOGIKA INTUICJONISTYCZNA

Definicja spełniania formuły φ:

LOGIKA INTUICJONISTYCZNA

Definicja spełniania formuły φ:

$\mathfrak{M}, s \vDash \varphi$	wtw	$s \in V(\varphi)$ dla dowolnej $\varphi \in ZZ$
$\mathfrak{M}, s \vDash \neg\varphi$	wtw	$\mathfrak{M}, s' \nvDash \varphi$ dla dowolnego s' takiego, że $s \leq s'$
$\mathfrak{M}, s \vDash \varphi \wedge \psi$	wtw	$\mathfrak{M}, s \vDash \varphi$ i $\mathfrak{M}, s \vDash \psi$
$\mathfrak{M}, s \vDash \varphi \vee \psi$	wtw	$\mathfrak{M}, s \vDash \varphi$ lub $\mathfrak{M}, s \vDash \psi$
$\mathfrak{M}, s \vDash \varphi \rightarrow \psi$	wtw	$\mathfrak{M}, s' \nvDash \varphi$ lub $\mathfrak{M}, s' \vDash \psi$ dla dowolnego $s' \geq s$

Twierdzenie o dziedziczeniu prawdy:
jeżeli $s \vDash \varphi$ i $s \leq s'$, to $s' \vDash \varphi$

LOGIKA INTUICJONISTYCZNA

Konwencje semantyczne:

LOGIKA INTUICJONISTYCZNA

Konwencje semantyczne:

Dla zbiorów formuł zapis $\mathfrak{M}, s \vDash \Gamma$ oznacza, że $\mathfrak{M}, s \vDash \psi$ dla $\forall_{\psi \in \Gamma}$.

Konwencje semantyczne:

Dla zbiorów formuł zapis $\mathfrak{M}, s \vDash \Gamma$ oznacza, że $\mathfrak{M}, s \vDash \psi$ dla $\forall_{\psi \in \Gamma}$.
$\mathfrak{M}, s \nvDash \varphi$ oznacza fałszywość formuły φ w s; $\mathfrak{M}, s \nvDash \Gamma$ oznacza fałszywość co najmniej jednego elementu Γ w s.

LOGIKA INTUICJONISTYCZNA

Konwencje semantyczne:

Dla zbiorów formuł zapis $\mathfrak{M}, s \models \Gamma$ oznacza, że $\mathfrak{M}, s \models \psi$ dla $\forall_{\psi \in \Gamma}$.
$\mathfrak{M}, s \not\models \varphi$ oznacza fałszywość formuły φ w s; $\mathfrak{M}, s \not\models \Gamma$ oznacza fałszywość co najmniej jednego elementu Γ w s.
W przypadku gdy model jest ustalony, bądź domyślny będziemy po prostu pisać $s \models \varphi$ (względnie $s \not\models \varphi$) lub $s \models \Gamma$ (względnie $s \not\models \Gamma$) dla zbioru.

LOGIKA INTUICJONISTYCZNA

Konwencje semantyczne:

Dla zbiorów formuł zapis $\mathfrak{M}, s \vDash \Gamma$ oznacza, że $\mathfrak{M}, s \vDash \psi$ dla $\forall_{\psi \in \Gamma}$.
$\mathfrak{M}, s \nvDash \varphi$ oznacza fałszywość formuły φ w s; $\mathfrak{M}, s \nvDash \Gamma$ oznacza fałszywość co najmniej jednego elementu Γ w s.
W przypadku gdy model jest ustalony, bądź domyślny będziemy po prostu pisać $s \vDash \varphi$ (względnie $s \nvDash \varphi$) lub $s \vDash \Gamma$ (względnie $s \nvDash \Gamma$) dla zbioru.
Zbiór wszystkich punktów spełniających daną formułę (zbiór) oznaczamy:
$\|\varphi\|_{\mathfrak{M}} = \{s \in \mathcal{S}_{\mathfrak{M}} : s \vDash \varphi\}$;
$\|\Gamma\|_{\mathfrak{M}} = \bigcap \|\psi\|_{\mathfrak{M}}$ dla $\forall_{\psi \in \Gamma}$
Zazwyczaj używać będziemy notacji skróconej $\|\varphi\|$ ($\|\Gamma\|$) przy $\mathfrak{M}$ domyślnym lub ustalonym.

LOGIKA INTUICJONISTYCZNA

Spełnialność, falsyfikowalność:

LOGIKA INTUICJONISTYCZNA

Spełnialność, falsyfikowalność:

φ (Γ) jest <u>spełnialna w modelu $\mathfrak{M}$</u> wtw, $\|\varphi\| \neq \varnothing$ ($\|\Gamma\| \neq \varnothing$).

LOGIKA INTUICJONISTYCZNA

Spełnialność, falsyfikowalność:

φ (Γ) jest spełnialna w modelu $\mathfrak{M}$ wtw, $\|\varphi\| \neq \varnothing$ ($\|\Gamma\| \neq \varnothing$).
φ (Γ) jest spełnialna wtw, istnieje model, w którym jest spełnialna.

LOGIKA INTUICJONISTYCZNA

Spełnialność, falsyfikowalność:

φ (Γ) jest spełnialna w modelu $\mathfrak{M}$ wtw, $\|\varphi\| \neq \varnothing$ ($\|\Gamma\| \neq \varnothing$).
φ (Γ) jest spełnialna wtw, istnieje model, w którym jest spełnialna.
φ (Γ) jest sfalsyfikowana w modelu $\mathfrak{M}$ wtw,
$\|\varphi\| \neq \mathcal{S}_{\mathfrak{M}}$ ($\|\Gamma\| \neq \mathcal{S}_{\mathfrak{M}}$) (inaczej: $\mathfrak{M}$ falsyfikuje φ (Γ)).

Spełnialność, falsyfikowalność:

φ (Γ) jest <u>spełnialna w modelu $\mathfrak{M}$</u> wtw, $\|\varphi\| \neq \varnothing$ ($\|\Gamma\| \neq \varnothing$).
φ (Γ) jest <u>spełnialna</u> wtw, istnieje model, w którym jest spełnialna.
φ (Γ) jest <u>sfalsyfikowana w modelu $\mathfrak{M}$</u> wtw,
$\|\varphi\| \neq \mathcal{S}_{\mathfrak{M}}$ ($\|\Gamma\| \neq \mathcal{S}_{\mathfrak{M}}$) (inaczej: $\mathfrak{M}$ falsyfikuje φ (Γ)).
φ (Γ) jest <u>sfalsyfikowana</u> wtw, istnieje model, w którym jest sfalsyfikowana.

Spełnialność, falsyfikowalność:

φ (Γ) jest <u>spełnialna w modelu $\mathfrak{M}$</u> wtw, $\|\varphi\| \neq \varnothing$ ($\|\Gamma\| \neq \varnothing$).
φ (Γ) jest <u>spełnialna</u> wtw, istnieje model, w którym jest spełnialna.
φ (Γ) jest <u>sfalsyfikowana w modelu $\mathfrak{M}$</u> wtw,
$\|\varphi\| \neq \mathcal{S}_{\mathfrak{M}}$ ($\|\Gamma\| \neq \mathcal{S}_{\mathfrak{M}}$) (inaczej: $\mathfrak{M}$ falsyfikuje φ (Γ)).
φ (Γ) jest <u>sfalsyfikowana</u> wtw, istnieje model, w którym jest sfalsyfikowana.

Definicja spełniania formuły (czy zbioru formuł) w modelu daje nam *lokalną* charakterystykę prawdziwości. Dalszym krokiem jest wprowadzenie pojęcia *globalnej prawdziwości*:

LOGIKA INTUICJONISTYCZNA

Prawdziwość w modelu

Prawdziwość w modelu

$\mathfrak{M} \vDash \varphi$ wtw, $\forall_{s \in \mathcal{S}_{\mathfrak{M}}}, \mathfrak{M}, s \vDash \varphi$ (lub $\|\varphi\|_{\mathfrak{M}} = \mathcal{S}_{\mathfrak{M}}$);

LOGIKA INTUICJONISTYCZNA

Prawdziwość w modelu

$\mathfrak{M} \vDash \varphi$ wtw, $\forall_{s \in \mathcal{S}_{\mathfrak{M}}}, \mathfrak{M}, s \vDash \varphi$ (lub $\|\varphi\|_{\mathfrak{M}} = \mathcal{S}_{\mathfrak{M}}$);
analogicznie dla Γ, $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$ wtw, $\|\Gamma\|_{\mathfrak{M}} = \mathcal{S}_{\mathfrak{M}}$.

Trzeci poziom prawdziwości to tautologiczność, czyli prawdziwość w każdym modelu.

LOGIKA INTUICJONISTYCZNA

Prawdziwość w modelu

$\mathfrak{M} \vDash \varphi$ wtw, $\forall_{s \in \mathcal{S}_{\mathfrak{M}}}, \mathfrak{M}, s \vDash \varphi$ (lub $\|\varphi\|_{\mathfrak{M}} = \mathcal{S}_{\mathfrak{M}}$);
analogicznie dla Γ, $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$ wtw, $\|\Gamma\|_{\mathfrak{M}} = \mathcal{S}_{\mathfrak{M}}$.

Trzeci poziom prawdziwości to tautologiczność, czyli prawdziwość w każdym modelu.

Prawdziwość w każdym modelu

LOGIKA INTUICJONISTYCZNA

Prawdziwość w modelu

$\mathfrak{M} \vDash \varphi$ wtw, $\forall_{s \in \mathcal{S}_{\mathfrak{M}}}, \mathfrak{M}, s \vDash \varphi$ (lub $\|\varphi\|_{\mathfrak{M}} = \mathcal{S}_{\mathfrak{M}}$);
analogicznie dla Γ, $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$ wtw, $\|\Gamma\|_{\mathfrak{M}} = \mathcal{S}_{\mathfrak{M}}$.

Trzeci poziom prawdziwości to tautologiczność, czyli prawdziwość w każdym modelu.

Prawdziwość w każdym modelu

$$\models \varphi \ wtw, \ \forall_{\mathfrak{M}}, \mathfrak{M} \vDash \varphi$$

$\not\models \varphi$ oznacza formułę nietautologiczną, czyli falsyfikowalną.

LOGIKA INTUICJONISTYCZNA

Wynikanie w INT

LOGIKA INTUICJONISTYCZNA

Wynikanie w INT

1. φ wynika lokalnie z Γ:
$\Gamma \models \varphi$ wtw, $\forall_{\mathfrak{M} \in MOD}(\|\Gamma\|_{\mathfrak{M}} \subseteq \|\varphi\|_{\mathfrak{M}})$ (inaczej: $\forall_{\mathfrak{M} \in MOD}, \forall_{s \in \mathcal{S}_{\mathfrak{M}}}$(jeżeli $\mathfrak{M}, s \vDash \Gamma$, to $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi$))

LOGIKA INTUICJONISTYCZNA

Wynikanie w INT

1. φ wynika lokalnie z Γ:
$\Gamma \models \varphi$ wtw, $\forall_{\mathfrak{M} \in MOD}(\|\Gamma\|_{\mathfrak{M}} \subseteq \|\varphi\|_{\mathfrak{M}})$ (inaczej: $\forall_{\mathfrak{M} \in MOD}, \forall_{s \in \mathcal{S}_{\mathfrak{M}}}$(jeżeli $\mathfrak{M}, s \vDash \Gamma$, to $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi$))
2. φ wynika globalnie z Γ:
$\Gamma \mid\models \varphi$ wtw $\forall_{\mathfrak{M} \in MOD}$(jeżeli $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$, to $\mathfrak{M} \vDash \varphi$))

LOGIKA INTUICJONISTYCZNA

Wynikanie w INT

1. φ wynika lokalnie z Γ:
$\Gamma \models \varphi$ wtw, $\forall_{\mathfrak{M} \in MOD}(\|\Gamma\|_{\mathfrak{M}} \subseteq \|\varphi\|_{\mathfrak{M}})$ (inaczej: $\forall_{\mathfrak{M} \in MOD}, \forall_{s \in \mathcal{S}_{\mathfrak{M}}}$(jeżeli $\mathfrak{M}, s \vDash \Gamma$, to $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi$))

2. φ wynika globalnie z Γ:
$\Gamma \mid\models \varphi$ wtw $\forall_{\mathfrak{M} \in MOD}$(jeżeli $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$, to $\mathfrak{M} \vDash \varphi$))

Twierdzenie: Jeżeli $\Gamma \models \varphi$, to $\Gamma \mid\models \varphi$, ale nie odwrotnie.

LOGIKA INTUICJONISTYCZNA

Lemat 1: ważne własności IRZ:

LOGIKA INTUICJONISTYCZNA

Lemat 1: ważne własności IRZ:

- **IRZ**$\subset$ **KRZ**

LOGIKA INTUICJONISTYCZNA

Lemat 1: ważne własności IRZ:

- **IRZ**$\subset$ **KRZ**
- $\varphi \in$ **KRZ** wtw $\neg\neg\varphi \in$ **IRZ**

LOGIKA INTUICJONISTYCZNA

Lemat 1: ważne własności IRZ:

- **IRZ**$\subset$ **KRZ**
- $\varphi \in$ **KRZ** wtw $\neg\neg\varphi \in$ **IRZ**
- $\varphi \vee \psi \in$ **IRZ** wtw $\varphi \in$ **IRZ** lub $\psi \in$ **IRZ**

LOGIKA INTUICJONISTYCZNA

Lemat 1: ważne własności IRZ:

- **IRZ**$\subset$ **KRZ**
- $\varphi \in$ **KRZ** wtw $\neg\neg\varphi \in$ **IRZ**
- $\varphi \vee \psi \in$ **IRZ** wtw $\varphi \in$ **IRZ** lub $\psi \in$ **IRZ**
- $\Gamma, \varphi \models \psi$ wtw $\Gamma \models \varphi \to \psi$

LOGIKA INTUICJONISTYCZNA

Lemat 1: ważne własności IRZ:

- **IRZ**$\subset$ **KRZ**
- $\varphi \in$ **KRZ** wtw $\neg\neg\varphi \in$ **IRZ**
- $\varphi \vee \psi \in$ **IRZ** wtw $\varphi \in$ **IRZ** lub $\psi \in$ **IRZ**
- $\Gamma, \varphi \models \psi$ wtw $\Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$
- $\Gamma, \varphi \models \perp$ wtw $\Gamma \models \neg\varphi$

LOGIKA INTUICJONISTYCZNA

Lemat 1: ważne własności IRZ:

- **IRZ**$\subset$ **KRZ**
- $\varphi \in$ **KRZ** wtw $\neg\neg\varphi \in$ **IRZ**
- $\varphi \vee \psi \in$ **IRZ** wtw $\varphi \in$ **IRZ** lub $\psi \in$ **IRZ**
- $\Gamma, \varphi \models \psi$ wtw $\Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$
- $\Gamma, \varphi \models \perp$ wtw $\Gamma \models \neg\varphi$
- jeżeli $\Gamma \models \varphi$, to $\Gamma, \neg\varphi \models \perp$

Zestawienie ważniejszych tautologii KRZ, z których nie wszystkie należą do IRZ

LOGIKA INTUICJONISTYCZNA

Zestawienie ważniejszych tautologii KRZ, z których nie wszystkie należą do IRZ

$\models$	$\not\models$
$p \rightarrow p$	
$\neg(p \wedge \neg p)$	$\neg p \vee p$
$p \rightarrow \neg\neg p$	$\neg\neg p \rightarrow p$
$(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$	$(\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p)$
$(p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow \neg p)$	$(\neg p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow p)$
$(p \rightarrow q) \wedge \neg q \rightarrow \neg p$	
$\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$	
$\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge q)$	$\neg(p \wedge q) \rightarrow \neg p \vee \neg q$
$p \wedge \neg q \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg q)$	$\neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow p \wedge \neg q$
$\neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg\neg p \wedge \neg q$	
$\neg p \vee q \rightarrow (p \rightarrow q)$	$(p \rightarrow q) \rightarrow \neg p \vee q$
$\neg p \rightarrow q \leftrightarrow p \vee q$	
$p \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$	
	$((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$

Etykietowane diagramy Betha dla IRZ

Konwencje zapisu

LOGIKA INTUICJONISTYCZNA

Etykietowane diagramy Betha dla IRZ

Konwencje zapisu

α	α_1	α_2	β	β_1	β_2
$+\varphi \wedge \psi$	$+\varphi$	$+\psi$	$-\varphi \wedge \psi$	$-\varphi$	$-\psi$
$-\varphi \vee \psi$	$-\varphi$	$-\psi$	$+\varphi \vee \psi$	$+\varphi$	$+\psi$

Etykietowane diagramy Betha dla IRZ

Etykietowane diagramy Betha dla IRZ

Etykiety:

1. $1 \in$ET

Etykietowane diagramy Betha dla IRZ

Etykiety:

1. $1 \in$ET
2. Jeżeli $\sigma \in$ET, to $\sigma.k \in$ET

LOGIKA INTUICJONISTYCZNA

Etykietowane diagramy Betha dla IRZ

Etykiety:

1. $1 \in$ET
2. Jeżeli $\sigma \in$ET, to $\sigma.k \in$ET

$\sigma.k$ denotuje etykietę, której ostatni element to k

Etykietowane diagramy Betha dla IRZ

Etykiety:

1. 1 $\in$ET
2. Jeżeli σ $\in$ET, to $\sigma.k$ $\in$ET

$\sigma.k$ denotuje etykietę, której ostatni element to k
Intuicyjnie: $\sigma \leq \sigma'$ wtw $\sigma' = \sigma$ lub $\sigma' = \sigma.\tau$, gdzie τ to skończony ciąg liczb naturalnych

LOGIKA INTUICJONISTYCZNA

Etykietowane diagramy Betha dla IRZ

LOGIKA INTUICJONISTYCZNA

Etykietowane diagramy Betha dla IRZ

Formuły etykietowane:

Etykietowane diagramy Betha dla IRZ

Formuły etykietowane:
Jeżeli $\varphi \in FOR(\mathbf{IRZ})$ a $\sigma \in$ET, to $\sigma : +\varphi$ i $\sigma : -\varphi$ są formułami etykietowanymi.

LOGIKA INTUICJONISTYCZNA

Etykietowane diagramy Betha dla IRZ

Formuły etykietowane:
Jeżeli $\varphi \in FOR(\mathbf{IRZ})$ a $\sigma \in$ET, to $\sigma : +\varphi$ i $\sigma : -\varphi$ są formułami etykietowanymi.
Intuicyjnie $\sigma : +\varphi$ oznacza, że φ jest spełnione w modelu w punkcie σ a $\sigma : -\varphi$, że φ jest fałszywa w σ.

LOGIKA INTUICJONISTYCZNA

Etykietowane diagramy Betha dla IRZ

Formuły etykietowane:
Jeżeli $\varphi \in \mathit{FOR}(\mathbf{IRZ})$ a $\sigma \in$ET, to $\sigma : +\varphi$ i $\sigma : -\varphi$ są formułami etykietowanymi.
Intuicyjnie $\sigma : +\varphi$ oznacza, że φ jest spełnione w modelu w punkcie σ a $\sigma : -\varphi$, że φ jest fałszywa w σ.
Definicja φ ma dowód w **IRZ**-EDB wtw istnieje zamknięte drzewo dla $1 : -\varphi$ zbudowane z użyciem reguł podanych niżej.

LOGIKA INTUICJONISTYCZNA

Etykietowane diagramy Betha dla IRZ

Formuły etykietowane:
Jeżeli $\varphi \in FOR(\mathbf{IRZ})$ a $\sigma \in$ET, to $\sigma : +\varphi$ i $\sigma : -\varphi$ są formułami etykietowanymi.
Intuicyjnie $\sigma : +\varphi$ oznacza, że φ jest spełnione w modelu w punkcie σ a $\sigma : -\varphi$, że φ jest fałszywa w σ.
Definicja φ ma dowód w **IRZ**-EDB wtw istnieje zamknięte drzewo dla $1 : -\varphi$ zbudowane z użyciem reguł podanych niżej.
Adekwatność etykietowanych diagramów Betha
Twierdzenie $\models_{IRZ} \varphi$ wtw $1 : -\varphi$ ma dowód w **IRZ**-EDB

LOGIKA INTUICJONISTYCZNA

Etykietowane diagramy Betha dla IRZ

Formuły etykietowane:
Jeżeli $\varphi \in FOR(\mathbf{IRZ})$ a $\sigma \in$ET, to $\sigma : +\varphi$ i $\sigma : -\varphi$ są formułami etykietowanymi.
Intuicyjnie $\sigma : +\varphi$ oznacza, że φ jest spełnione w modelu w punkcie σ a $\sigma : -\varphi$, że φ jest fałszywa w σ.
Definicja φ ma dowód w **IRZ**-EDB wtw istnieje zamknięte drzewo dla $1 : -\varphi$ zbudowane z użyciem reguł podanych niżej.
Adekwatność etykietowanych diagramów Betha
Twierdzenie $\models_{IRZ} \varphi$ wtw $1 : -\varphi$ ma dowód w **IRZ**-EDB
Twierdzenie (Mocna adekwatność):
$\Gamma \models \varphi$ *wtw*, $\{1 : +\psi_1,\ ...,\ 1 : +\psi_n,\ 1 : -\varphi\}$ ma dowód w **IRZ**-EDB gdzie $\{\psi_1, ..., \psi_n\} \subseteq \Gamma$

Etykietowane diagramy Betha dla IRZ

LOGIKA INTUICJONISTYCZNA

Etykietowane diagramy Betha dla IRZ

Reguły IRZ

$(\perp)$ $\sigma : +\varphi$, $\sigma : -\varphi$ / $\perp$

$(\neg-)$ $\sigma : -\neg\varphi$ / $\sigma.k : +\varphi$, gdzie $\sigma.k$ jest nową etykietą

$(\neg+)$ $\sigma : +\neg\varphi$ / $\sigma : -\varphi$

(α) $\sigma : \alpha$ / $\sigma : \alpha_1,\ \sigma : \alpha_2$

(β) $\sigma : \beta$ / $\sigma : \beta_1 \ \mid\ \sigma : \beta_2$

$(\rightarrow -)$ $\sigma : -\varphi \rightarrow \psi$ / $\sigma.k : +\varphi,\ \sigma.k : -\psi$, gdzie $\sigma.k$ jest nową etykietą

$(\rightarrow +)$ $\sigma : +\varphi \rightarrow \psi$ / $\sigma : -\varphi, \ \mid\ \sigma : +\psi$

$(+)$ $\sigma : +\varphi$ / $\sigma.k : +\varphi$, gdzie $\sigma.k$ jest dowolną etykietą

Etykietowane diagramy Betha dla IRZ – przykład:

LOGIKA INTUICJONISTYCZNA

Etykietowane diagramy Betha dla IRZ – przykład:

$1 : -\neg(p \rightarrow q) \rightarrow \neg\neg p \wedge \neg q$

$1.1 : +\neg(p \rightarrow q)$

$1.1 : -\neg\neg p \wedge \neg q$

$1.1 : -p \rightarrow q$

$1.1.1 : +p$

$1.1.1 : -q$

$1.1.1 : +\neg(p \rightarrow q)$

$1.1.1 : -p \rightarrow q$

/	\
$1.1 : -\neg\neg p$	$1.1 : -\neg q$
$1.1.2 : +\neg p$	$1.1.2 : +q$
$1.1.2 : +\neg(p \rightarrow q)$	$1.1.2 : +\neg(p \rightarrow q)$
$1.1.2 : -p \rightarrow q$	$1.1.2 : -p \rightarrow q$
$1.1.2.1 : +p$	$1.1.2.1 : +p$
$1.1.2.1 : -q$	$1.1.2.1 : -q$
$1.1.2.1 : +\neg p$	$1.1.2.1 : +q$

Relacje między **IRZ** a **S4**

LOGIKA INTUICJONISTYCZNA

Relacje między **IRZ** a **S4**

Niech $\Im$ będzie funkcją przekładu z FOR(**IRZ**) w FOR(**S4**) zdefiniowaną natępująco:

LOGIKA INTUICJONISTYCZNA

Relacje między **IRZ** a **S4**

Niech $\Im$ będzie funkcją przekładu z FOR(**IRZ**) w FOR(**S4**) zdefiniowaną natępująco:

$$
\begin{array}{rcl}
\Im(p) & = & \Box p \\
\Im(\varphi \wedge \psi) & = & \Im(\varphi) \wedge \Im(\psi) \\
\Im(\varphi \vee \psi) & = & \Im(\varphi) \vee \Im(\psi) \\
\Im(\varphi \rightarrow \psi) & = & \Box(\Im(\varphi) \rightarrow \Im(\psi)) \\
\Im(\neg\varphi) & = & \Box\neg\Im(\varphi)
\end{array}
$$

LOGIKA INTUICJONISTYCZNA

Relacje między **IRZ** a **S4**

Niech $\Im$ będzie funkcją przekładu z FOR(**IRZ**) w FOR(**S4**) zdefiniowaną natępująco:

$$
\begin{aligned}
\Im(p) &= \Box p \\
\Im(\varphi \wedge \psi) &= \Im(\varphi) \wedge \Im(\psi) \\
\Im(\varphi \vee \psi) &= \Im(\varphi) \vee \Im(\psi) \\
\Im(\varphi \rightarrow \psi) &= \Box(\Im(\varphi) \rightarrow \Im(\psi)) \\
\Im(\neg\varphi) &= \Box\neg\Im(\varphi)
\end{aligned}
$$

Twierdzenie: $\models_{IRZ} \varphi$ wtw $\models_{S4} \Im(\varphi)$

LOGIKA INTUICJONISTYCZNA

Dedukcja Naturalna dla IRZ

LOGIKA INTUICJONISTYCZNA

Dedukcja Naturalna dla IRZ

Do systemu DN Słupeckiego/Borkowskiego należy wprowadzić dwie modyfikacje:

LOGIKA INTUICJONISTYCZNA

Dedukcja Naturalna dla IRZ

Do systemu DN Słupeckiego/Borkowskiego należy wprowadzić dwie modyfikacje:
1. dowód niewprost można przeprowadzić tylko dla tezy o postaci:
$\varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \rightarrow ...(\varphi_n \rightarrow \neg\psi)...)$
– jako założenie niewprost wprowadzamy ψ

LOGIKA INTUICJONISTYCZNA

Dedukcja Naturalna dla IRZ

Do systemu DN Słupeckiego/Borkowskiego należy wprowadzić dwie modyfikacje:
1. dowód niewprost można przeprowadzić tylko dla tezy o postaci:
$\varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \rightarrow ...(\varphi_n \rightarrow \neg\psi)...)$
– jako założenie niewprost wprowadzamy ψ
2. jeżeli do dowodu wprowadzamy dodatkowe założenie niewprost φ, to po zamknięciu poddowodu (pojawienie się sprzeczności), dołączamy do dowodu nadrzędnego zawsze $\neg\varphi$ (nawet jeżeli φ jest formułą zanegowaną i daje to w wyniku formułę poprzedzoną dwiema negacjami)

NIEKLASYCZNE IMPLIKACJE

Kłopotliwe tezy i reguły logiki klasycznej (w tym tzw. paradoksy implikacji materialnej)

NIEKLASYCZNE IMPLIKACJE

Kłopotliwe tezy i reguły logiki klasycznej (w tym tzw. paradoksy implikacji materialnej)

- $(p \to q) \vee (q \to p)$, $(p \to q) \vee p$

NIEKLASYCZNE IMPLIKACJE

Kłopotliwe tezy i reguły logiki klasycznej (w tym tzw. paradoksy implikacji materialnej)

- $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p), \ (p \rightarrow q) \vee p$
- $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ lub $\varphi \vdash \psi \rightarrow \varphi$

NIEKLASYCZNE IMPLIKACJE

Kłopotliwe tezy i reguły logiki klasycznej (w tym tzw. paradoksy implikacji materialnej)

- $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$, $(p \rightarrow q) \vee p$
- $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ lub $\varphi \vdash \psi \rightarrow \varphi$
- $p \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$, $p \wedge \neg p \rightarrow q$ lub $\bot \rightarrow \varphi$ lub $\varphi, \neg\varphi \vdash \psi$

NIEKLASYCZNE IMPLIKACJE

Kłopotliwe tezy i reguły logiki klasycznej (w tym tzw. paradoksy implikacji materialnej)

- $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$, $(p \rightarrow q) \vee p$
- $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ lub $\varphi \vdash \psi \rightarrow \varphi$
- $p \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$, $p \wedge \neg p \rightarrow q$ lub $\bot \rightarrow \varphi$ lub $\varphi, \neg\varphi \vdash \psi$
- $p \rightarrow (q \rightarrow q)$, $p \rightarrow q \vee \neg q$ lub $\varphi \rightarrow \top$

NIEKLASYCZNE IMPLIKACJE

Kłopotliwe tezy i reguły logiki klasycznej (w tym tzw. paradoksy implikacji materialnej)

- $(p \to q) \vee (q \to p)$, $(p \to q) \vee p$
- $p \to (q \to p)$ lub $\varphi \vdash \psi \to \varphi$
- $p \to (\neg p \to q)$, $p \wedge \neg p \to q$ lub $\bot \to \varphi$ lub $\varphi, \neg\varphi \vdash \psi$
- $p \to (q \to q)$, $p \to q \vee \neg q$ lub $\varphi \to \top$
- $\varphi \to \psi \vdash \varphi \wedge \chi \to \psi$ (OP)

NIEKLASYCZNE IMPLIKACJE

Kłopotliwe tezy i reguły logiki klasycznej (w tym tzw. paradoksy implikacji materialnej)

- $(p \to q) \vee (q \to p), \ (p \to q) \vee p$
- $p \to (q \to p)$ lub $\varphi \vdash \psi \to \varphi$
- $p \to (\neg p \to q), \ p \wedge \neg p \to q$ lub $\bot \to \varphi$ lub $\varphi, \neg\varphi \vdash \psi$
- $p \to (q \to q), \ p \to q \vee \neg q$ lub $\varphi \to \top$
- $\varphi \to \psi \vdash \varphi \wedge \chi \to \psi$ (OP)
- $\varphi \to \psi \vdash \neg\psi \to \neg\varphi$ (TR)

NIEKLASYCZNE IMPLIKACJE

Kłopotliwe tezy i reguły logiki klasycznej (w tym tzw. paradoksy implikacji materialnej)

- $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$, $(p \rightarrow q) \vee p$
- $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ lub $\varphi \vdash \psi \rightarrow \varphi$
- $p \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$, $p \wedge \neg p \rightarrow q$ lub $\bot \rightarrow \varphi$ lub $\varphi, \neg\varphi \vdash \psi$
- $p \rightarrow (q \rightarrow q)$, $p \rightarrow q \vee \neg q$ lub $\varphi \rightarrow \top$
- $\varphi \rightarrow \psi \vdash \varphi \wedge \chi \rightarrow \psi$ (OP)
- $\varphi \rightarrow \psi \vdash \neg\psi \rightarrow \neg\varphi$ (TR)
- $\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi \vdash \varphi \rightarrow \chi$ (SH)

NIEKLASYCZNE IMPLIKACJE

Przykłady:

NIEKLASYCZNE IMPLIKACJE

Przykłady:

Gdyby Kowalski nie wygrał w audiotele, to by nie miał samochodu. Gdyby nie miał samochodu, to by nie przejechał swojego sąsiada. Zatem, gdyby przejechał swojego sąsiada, to by wygrał w audiotele.

NIEKLASYCZNE IMPLIKACJE

Przykłady:

Gdyby Kowalski nie wygrał w audiotele, to by nie miał samochodu. Gdyby nie miał samochodu, to by nie przejechał swojego sąsiada. Zatem, gdyby przejechał swojego sąsiada, to by wygrał w audiotele.
Jeżeli nasypię do filiżanki kawy 3 łyżki cukru, to będzie słodka. Zatem, jeżeli nasypię tam 3 łyżki cukru i naleję oleju silnikowego, to będzie słodka.

NIEKLASYCZNE IMPLIKACJE

Reakcja na problemy implikacji materialnej: inne logiki – zasadniczo 2 grupy:

NIEKLASYCZNE IMPLIKACJE

Reakcja na problemy implikacji materialnej: inne logiki – zasadniczo 2 grupy:

(a) logiki nieklasycznej implikacji (zasadniczo nie kwestionują 3 ostatnich reguł)

NIEKLASYCZNE IMPLIKACJE

Reakcja na problemy implikacji materialnej: inne logiki – zasadniczo 2 grupy:

(a) logiki nieklasycznej implikacji (zasadniczo nie kwestionują 3 ostatnich reguł)
(b) logiki okresów warunkowych

NIEKLASYCZNE IMPLIKACJE

Reakcja na problemy implikacji materialnej: inne logiki – zasadniczo 2 grupy:

(a) logiki nieklasycznej implikacji (zasadniczo nie kwestionują 3 ostatnich reguł)
(b) logiki okresów warunkowych
Ważniejsze propozycje w grupie (a)

NIEKLASYCZNE IMPLIKACJE

Reakcja na problemy implikacji materialnej: inne logiki – zasadniczo 2 grupy:

(a) logiki nieklasycznej implikacji (zasadniczo nie kwestionują 3 ostatnich reguł)
(b) logiki okresów warunkowych
Ważniejsze propozycje w grupie (a)

- implikacja intuicjonistyczna

NIEKLASYCZNE IMPLIKACJE

Reakcja na problemy implikacji materialnej: inne logiki – zasadniczo 2 grupy:

(a) logiki nieklasycznej implikacji (zasadniczo nie kwestionują 3 ostatnich reguł)
(b) logiki okresów warunkowych
Ważniejsze propozycje w grupie (a)

- implikacja intuicjonistyczna
- implikacja ścisła

NIEKLASYCZNE IMPLIKACJE

Reakcja na problemy implikacji materialnej: inne logiki – zasadniczo 2 grupy:

(a) logiki nieklasycznej implikacji (zasadniczo nie kwestionują 3 ostatnich reguł)
(b) logiki okresów warunkowych
Ważniejsze propozycje w grupie (a)

- implikacja intuicjonistyczna
- implikacja ścisła
- implikacje relewantne

NIEKLASYCZNE IMPLIKACJE

Reakcja na problemy implikacji materialnej: inne logiki – zasadniczo 2 grupy:

(a) logiki nieklasycznej implikacji (zasadniczo nie kwestionują 3 ostatnich reguł)
(b) logiki okresów warunkowych
Ważniejsze propozycje w grupie (a)

- implikacja intuicjonistyczna
- implikacja ścisła
- implikacje relewantne
- implikacje w logikach wielowartościowych

NIEKLASYCZNE IMPLIKACJE

Reakcja na problemy implikacji materialnej: inne logiki – zasadniczo 2 grupy:

(a) logiki nieklasycznej implikacji (zasadniczo nie kwestionują 3 ostatnich reguł)
(b) logiki okresów warunkowych
Ważniejsze propozycje w grupie (a)

- implikacja intuicjonistyczna
- implikacja ścisła
- implikacje relewantne
- implikacje w logikach wielowartościowych

NIEKLASYCZNE IMPLIKACJE

Implikacja intuicjonistyczna

NIEKLASYCZNE IMPLIKACJE

Implikacja intuicjonistyczna

1. Implikacja w **INT** syntaktycznie charakteryzowana jest tak samo jak implikacja materialna (przez MP i DT) lub za pomocą warunku:

NIEKLASYCZNE IMPLIKACJE

Implikacja intuicjonistyczna

1. Implikacja w **INT** syntaktycznie charakteryzowana jest tak samo jak implikacja materialna (przez MP i DT) lub za pomocą warunku:
$(\rightarrow)$ $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ wtw $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$

NIEKLASYCZNE IMPLIKACJE

Implikacja intuicjonistyczna

1. Implikacja w **INT** syntaktycznie charakteryzowana jest tak samo jak implikacja materialna (przez MP i DT) lub za pomocą warunku:
$(\to)$ $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ wtw $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$
Wniosek: reguły DN dla implikacji w **KRZ** są niezależne od reguł dla innych spójników tylko pozornie. Różnica obu implikacji widoczna jest dopiero w semantyce.

NIEKLASYCZNE IMPLIKACJE

Implikacja intuicjonistyczna

1. Implikacja w **INT** syntaktycznie charakteryzowana jest tak samo jak implikacja materialna (przez MP i DT) lub za pomocą warunku:
$(\rightarrow)$ $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ wtw $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$
Wniosek: reguły DN dla implikacji w **KRZ** są niezależne od reguł dla innych spójników tylko pozornie. Różnica obu implikacji widoczna jest dopiero w semantyce.
2. W **KRZ** są tezy czysto implikacyjne, które nie są tezami **INT**, np. prawo Peirce'a: $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$

NIEKLASYCZNE IMPLIKACJE

Implikacja intuicjonistyczna

1. Implikacja w **INT** syntaktycznie charakteryzowana jest tak samo jak implikacja materialna (przez MP i DT) lub za pomocą warunku:
$(\rightarrow)\ \Gamma, \varphi \vdash \psi$ wtw $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$
Wniosek: reguły DN dla implikacji w **KRZ** są niezależne od reguł dla innych spójników tylko pozornie. Różnica obu implikacji widoczna jest dopiero w semantyce.
2. W **KRZ** są tezy czysto implikacyjne, które nie są tezami **INT**, np. prawo Peirce'a: $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$
(uwaga: PP dołączone do **INT** daje **KRZ**!)

NIEKLASYCZNE IMPLIKACJE

Przykład – Prawo Peirce'a:

NIEKLASYCZNE IMPLIKACJE

Przykład – Prawo Peirce'a:

1	$(p \longrightarrow q) \longrightarrow p$	z
2	$\neg p$	zn
2.1	p	zd
2.2	$\perp$	(2, 2.1)
2.3	q	(2.2)
3	$p \longrightarrow q$	(2.1 – 2.3, DI)
4	p	(1, 3, MP)
5	$\perp$	(2, 4)

NIEKLASYCZNE IMPLIKACJE

Przykład – Prawo Peirce'a:

1	$(p \longrightarrow q) \longrightarrow p$	z
2	$\neg p$	zn
2.1	p	zd
2.2	$\perp$	(2, 2.1)
2.3	q	(2.2)
3	$p \longrightarrow q$	(2.1 – 2.3, DI)
4	p	(1, 3, MP)
5	$\perp$	(2, 4)

Uwaga! niedopuszczalna w **INT** forma dowodu niewprost – zn w wierszu 2.

NIEKLASYCZNE IMPLIKACJE

Przykład – Prawo Peirce'a:

NIEKLASYCZNE IMPLIKACJE

Przykład – Prawo Peirce'a:

$$
\begin{array}{l}
1 : -((p \to q) \to p) \to p \\
1.1 : +(p \to q) \to p \\
1.1 : -p
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
/ & \backslash \\
1.1 : -p \to q & 1.1 : +p \\
1.1.1 : +p & \bot \\
1.1.1 : -q & \\
1.1.1 : +(p \to q) \to p &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
/ & \backslash \\
1.1.1 : -p \to q & 1.1.1 : +p \\
1.1.1.1 : +p & \\
1.1.1.1 : -q &
\end{array}
$$

NIEKLASYCZNE IMPLIKACJE

Przykład – Logika Dummetta:

NIEKLASYCZNE IMPLIKACJE

Przykład – Logika Dummetta:

$\nvdash_{INT} (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$ ale dołączone do **INT** daje logikę pośrednią (między **INT** a **KRZ**) Dummetta, charakteryzowaną przez klasę tych modeli **INT**, w których $\leq$ jest relacją spójną:
$\forall x, y, x(x \leq y \wedge x \leq z \rightarrow y \leq z \vee z \leq y)$

NIEKLASYCZNE IMPLIKACJE

Przykład – Logika Dummetta:

$\nvdash_{INT} (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$ ale dołączone do **INT** daje logikę pośrednią (między **INT** a **KRZ**) Dummetta, charakteryzowaną przez klasę tych modeli **INT**, w których $\leq$ jest relacją spójną:
$\forall x, y, x(x \leq y \wedge x \leq z \rightarrow y \leq z \vee z \leq y)$

$$
\begin{array}{ll}
 & 1 : -(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p) \\
 & 1 : -p \rightarrow q \\
 & 1 : -q \rightarrow p \\
 & 1.1 : +p \\
 & 1.1 : -q \\
 & 1.2 : +q \\
 & 1.2 : -p \\
 / & \backslash \\
1.1 \leq 1.2 & 1.2 \leq 1.1 \\
1.2 : +p & 1.1 : +q \\
\bot & \bot
\end{array}
$$

NIEKLASYCZNE IMPLIKACJE

Przykład – Logika Dummetta:

$\nvdash_{INT} (p \to q) \vee (q \to p)$ ale dołączone do **INT** daje logikę pośrednią (między **INT** a **KRZ**) Dummetta, charakteryzowaną przez klasę tych modeli **INT**, w których $\leq$ jest relacją spójną:
$\forall x, y, x(x \leq y \wedge x \leq z \to y \leq z \vee z \leq y)$

$$
\begin{array}{l}
1 : -(p \to q) \vee (q \to p) \\
1 : -p \to q \\
1 : -q \to p \\
1.1 : +p \\
1.1 : -q \\
1.2 : +q \\
1.2 : -p
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
1.1 \leq 1.2 & 1.2 \leq 1.1 \\
1.2 : +p & 1.1 : +q \\
\bot & \bot
\end{array}
$$

NIEKLASYCZNE IMPLIKACJE

Implikacja ścisła

NIEKLASYCZNE IMPLIKACJE

Implikacja ścisła

1. Wprowadzona przez Lewisa jako spójnik pierwotny, ale definiowalna na gruncie standardowych logik modalnych:

NIEKLASYCZNE IMPLIKACJE

Implikacja ścisła

1. Wprowadzona przez Lewisa jako spójnik pierwotny, ale definiowalna na gruncie standardowych logik modalnych:

$\varphi \Rightarrow \psi \ := \ \Box(\varphi \rightarrow \psi)$

NIEKLASYCZNE IMPLIKACJE

Implikacja ścisła

1. Wprowadzona przez Lewisa jako spójnik pierwotny, ale definiowalna na gruncie standardowych logik modalnych:
$\varphi \Rightarrow \psi \;:=\; \Box(\varphi \to \psi)$
2. Charakterystyka semantyczna $\Rightarrow$ jest taka sama jak dla implikacji intuicjonistycznej ale jest to spójnik słabszy np. $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ nie jest tezą nawet w **S5**.

NIEKLASYCZNE IMPLIKACJE

Implikacja ścisła

1. Wprowadzona przez Lewisa jako spójnik pierwotny, ale definiowalna na gruncie standardowych logik modalnych:
$\varphi \Rightarrow \psi \ := \ \Box(\varphi \rightarrow \psi)$
2. Charakterystyka semantyczna $\Rightarrow$ jest taka sama jak dla implikacji intuicjonistycznej ale jest to spójnik słabszy np. $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ nie jest tezą nawet w **S5**.

$$
\begin{array}{l}
1 : -p \Rightarrow (q \Rightarrow p) \\
1.1 : +p \\
1.1 : -q \Rightarrow p \\
1.1.1 : +q \\
1.1.1 : -p
\end{array}
$$

NIEKLASYCZNE IMPLIKACJE

Implikacja ścisła

1. Wprowadzona przez Lewisa jako spójnik pierwotny, ale definiowalna na gruncie standardowych logik modalnych:
$\varphi \Rightarrow \psi \;:=\; \Box(\varphi \rightarrow \psi)$
2. Charakterystyka semantyczna $\Rightarrow$ jest taka sama jak dla implikacji intuicjonistycznej ale jest to spójnik słabszy np. $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ nie jest tezą nawet w **S5**.

$$
\begin{array}{l}
1 : -p \Rightarrow (q \Rightarrow p) \\
1.1 : +p \\
1.1 : -q \Rightarrow p \\
1.1.1 : +q \\
1.1.1 : -p
\end{array}
$$

3. $\Rightarrow$ generuje jednak inne problemy, tzw. paradoksy implikacji ścisłej:

NIEKLASYCZNE IMPLIKACJE

Implikacja ścisła

1. Wprowadzona przez Lewisa jako spójnik pierwotny, ale definiowalna na gruncie standardowych logik modalnych:
$\varphi \Rightarrow \psi \ := \ \Box(\varphi \rightarrow \psi)$
2. Charakterystyka semantyczna $\Rightarrow$ jest taka sama jak dla implikacji intuicjonistycznej ale jest to spójnik słabszy np. $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ nie jest tezą nawet w **S5**.

$$\begin{array}{l} 1 : -p \Rightarrow (q \Rightarrow p) \\ 1.1 : +p \\ 1.1 : -q \Rightarrow p \\ 1.1.1 : +q \\ 1.1.1 : -p \end{array}$$

3. $\Rightarrow$ generuje jednak inne problemy, tzw. paradoksy implikacji ścisłej: $\Box p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$, $p \Rightarrow (q \Rightarrow q)$, $p \wedge \neg p \Rightarrow q$.

NIEKLASYCZNE IMPLIKACJE – LOGIKI RELEWANTNE

Historia:

NIEKLASYCZNE IMPLIKACJE – LOGIKI RELEWANTNE

Historia:

1928 – logika relewantna Orłowa

NIEKLASYCZNE IMPLIKACJE – LOGIKI RELEWANTNE

Historia:

1928 – logika relewantna Orłowa

1932 – Parry: implikacja analityczna

NIEKLASYCZNE IMPLIKACJE – LOGIKI RELEWANTNE

Historia:

1928 – logika relewantna Orłowa

1932 – Parry: implikacja analityczna

lata 50-te: Church, Ackermann – implikacja silna w ujęciu aksjomatycznym

NIEKLASYCZNE IMPLIKACJE – LOGIKI RELEWANTNE

Historia:

1928 – logika relewantna Orłowa
1932 – Parry: implikacja analityczna
lata 50-te: Church, Ackermann – implikacja silna w ujęciu aksjomatycznym
lata 60-te: Anderson, Belnap – implikacja relewantna, spójnik *entailment*; systemy DN

NIEKLASYCZNE IMPLIKACJE – LOGIKI RELEWANTNE

Historia:

1928 – logika relewantna Orłowa

1932 – Parry: implikacja analityczna

lata 50-te: Church, Ackermann – implikacja silna w ujęciu aksjomatycznym

lata 60-te: Anderson, Belnap – implikacja relewantna, spójnik *entailment*; systemy DN

lata 70-te: Routley, Meyer – semantyka relacyjna dla logik relewantnych

LOGIKI RELEWANTNE

Wyznacznik tego nurtu:

LOGIKI RELEWANTNE

Wyznacznik tego nurtu:

Związek znaczeniowy poprzednika i następnika implikacji musi być oddany formalnie. Ale jak?

LOGIKI RELEWANTNE

Wyznacznik tego nurtu:

Związek znaczeniowy poprzednika i następnika implikacji musi być oddany formalnie. Ale jak?
W logikach relewantnych jest to wyrażone przez występowanie wspólnych zmiennych. 3 znaczenia:

LOGIKI RELEWANTNE

Wyznacznik tego nurtu:

Związek znaczeniowy poprzednika i następnika implikacji musi być oddany formalnie. Ale jak?
W logikach relewantnych jest to wyrażone przez występowanie wspólnych zmiennych. 3 znaczenia:

- wąskie: logika **R** i jej nadlogiki

LOGIKI RELEWANTNE

Wyznacznik tego nurtu:

Związek znaczeniowy poprzednika i następnika implikacji musi być oddany formalnie. Ale jak?

W logikach relewantnych jest to wyrażone przez występowanie wspólnych zmiennych. 3 znaczenia:

- wąskie: logika **R** i jej nadlogiki
- szersze: również **E** i jej nadlogiki (w obu minimalny wymóg relewancji – co najmniej jedna zmienna wspólna)

LOGIKI RELEWANTNE

Wyznacznik tego nurtu:

Związek znaczeniowy poprzednika i następnika implikacji musi być oddany formalnie. Ale jak?
W logikach relewantnych jest to wyrażone przez występowanie wspólnych zmiennych. 3 znaczenia:

- wąskie: logika **R** i jej nadlogiki
- szersze: również **E** i jej nadlogiki (w obu minimalny wymóg relewancji – co najmniej jedna zmienna wspólna)
- szerokie: wszelkie systemy relewantne, np. implikacja analityczna Parry'ego (wszystkie zmienne następnika muszą być w poprzedniku.

LOGIKI RELEWANTNE

E, EM, R, RM – cztery bazowe systemy implikacji relewantnej w ujęciu DN

System DN dla logik tego typu ma następujące cechy wyróżniające:

LOGIKI RELEWANTNE

E, EM, R, RM – cztery bazowe systemy implikacji relewantnej w ujęciu DN

System DN dla logik tego typu ma następujące cechy wyróżniające:

- dla zapewnienia warunku relewancji w dedukcji, każda formuła występuje z indeksem, który jest zbiorem numerów założeń tej formuły

E, EM, R, RM – cztery bazowe systemy implikacji relewantnej w ujęciu DN

System DN dla logik tego typu ma następujące cechy wyróżniające:

- dla zapewnienia warunku relewancji w dedukcji, każda formuła występuje z indeksem, który jest zbiorem numerów założeń tej formuły
- reguły inferencji i konstrukcji dowodu są zdefiniowane zarazem na formułach i indeksach

LOGIKI RELEWANTNE

E, EM, R, RM – cztery bazowe systemy implikacji relewantnej w ujęciu DN

System DN dla logik tego typu ma następujące cechy wyróżniające:

- dla zapewnienia warunku relewancji w dedukcji, każda formuła występuje z indeksem, który jest zbiorem numerów założeń tej formuły
- reguły inferencji i konstrukcji dowodu są zdefiniowane zarazem na formułach i indeksach
- każde założenie ma przydzielany indeks z nowym numerem i otwiera osobny poddowód

E, EM, R, RM – cztery bazowe systemy implikacji relewantnej w ujęciu DN

System DN dla logik tego typu ma następujące cechy wyróżniające:

- dla zapewnienia warunku relewancji w dedukcji, każda formuła występuje z indeksem, który jest zbiorem numerów założeń tej formuły
- reguły inferencji i konstrukcji dowodu są zdefiniowane zarazem na formułach i indeksach
- każde założenie ma przydzielany indeks z nowym numerem i otwiera osobny poddowód
- przesłanki każdej reguły inferencji muszą występować w obrębie tego samego poddowodu

LOGIKI RELEWANTNE

E, EM, R, RM – cztery bazowe systemy implikacji relewantnej w ujęciu DN

System DN dla logik tego typu ma następujące cechy wyróżniające:

- dla zapewnienia warunku relewancji w dedukcji, każda formuła występuje z indeksem, który jest zbiorem numerów założeń tej formuły
- reguły inferencji i konstrukcji dowodu są zdefiniowane zarazem na formułach i indeksach
- każde założenie ma przydzielany indeks z nowym numerem i otwiera osobny poddowód
- przesłanki każdej reguły inferencji muszą występować w obrębie tego samego poddowodu
- specjalne reguły rejteracji określają możliwość przenoszenia formuł z dowodu nadrzędnego do poddowodu

LOGIKI RELEWANTNE

E, EM, R, RM – cztery bazowe systemy implikacji relewantnej w ujęciu DN

System DN dla logik tego typu ma następujące cechy wyróżniające:

- dla zapewnienia warunku relewancji w dedukcji, każda formuła występuje z indeksem, który jest zbiorem numerów założeń tej formuły
- reguły inferencji i konstrukcji dowodu są zdefiniowane zarazem na formułach i indeksach
- każde założenie ma przydzielany indeks z nowym numerem i otwiera osobny poddowód
- przesłanki każdej reguły inferencji muszą występować w obrębie tego samego poddowodu
- specjalne reguły rejteracji określają możliwość przenoszenia formuł z dowodu nadrzędnego do poddowodu

Uwaga! dla logiki **R** i **RM** dwa ostatnie punkty można wyeliminować

System DN dla logik relewantnych – indeksy

LOGIKI RELEWANTNE

System DN dla logik relewantnych – indeksy

Indeksy w schematach reguł zapisujemy przy pomocy zmiennych A, B, C, np. φ_A oznacza formułę φ z indeksem A.

LOGIKI RELEWANTNE

System DN dla logik relewantnych – indeksy

Indeksy w schematach reguł zapisujemy przy pomocy zmiennych A, B, C, np. φ_A oznacza formułę φ z indeksem A.
W praktyce uprościmy zapis: zamiast $p \to q_{\{1,3,4\}}$ napiszemy $p \to q : 1, 3, 4$.

LOGIKI RELEWANTNE

System DN dla logik relewantnych – indeksy

Indeksy w schematach reguł zapisujemy przy pomocy zmiennych A, B, C, np. φ_A oznacza formułę φ z indeksem A.
W praktyce uprościmy zapis: zamiast $p \rightarrow q_{\{1,3,4\}}$ napiszemy $p \rightarrow q : 1, 3, 4$.
Tezą jest formuła, której indeks jest zbiorem pustym.

LOGIKI RELEWANTNE

Reguły:

LOGIKI RELEWANTNE

Reguły:

<u>Reguły dla implikacji</u>:

LOGIKI RELEWANTNE

Reguły:

Reguły dla implikacji:

(*MP*) $\varphi \rightarrow \psi_A,\ \varphi_B \vdash \psi_{A \cup B}$

LOGIKI RELEWANTNE

Reguły:

Reguły dla implikacji:

(MP) $\varphi \rightarrow \psi_A,\ \varphi_B \vdash \psi_{A \cup B}$

(DT) jeżeli $\varphi_{\{i\}} \vdash \psi_A$, to $\vdash \varphi \rightarrow \psi_{A-\{i\}}$, pod warunkiem, że $i \in A$

LOGIKI RELEWANTNE

Reguły:

Reguły dla implikacji:

$(MP)\ \varphi \to \psi_A,\ \varphi_B \vdash \psi_{A\cup B}$

(DT) jeżeli $\varphi_{\{i\}} \vdash \psi_A$, to $\vdash \varphi \to \psi_{A-\{i\}}$, pod warunkiem, że $i \in A$

Reguły rejteracji:

LOGIKI RELEWANTNE

Reguły:

Reguły dla implikacji:

(*MP*) $\varphi \to \psi_A,\ \varphi_B \vdash \psi_{A \cup B}$

(*DT*) jeżeli $\varphi_{\{i\}} \vdash \psi_A$, to $\vdash \varphi \to \psi_{A-\{i\}}$, pod warunkiem, że $i \in A$

Reguły rejteracji:

($Reit_E$) wolno przenieść implikację do poddowodu

LOGIKI RELEWANTNE

Reguły:

Reguły dla implikacji:

(MP) $\varphi \to \psi_A,\ \varphi_B \vdash \psi_{A \cup B}$

(DT) jeżeli $\varphi_{\{i\}} \vdash \psi_A$, to $\vdash \varphi \to \psi_{A-\{i\}}$, pod warunkiem, że $i \in A$

Reguły rejteracji:

$(Reit_E)$ wolno przenieść implikację do poddowodu

$(Reit_R)$ wolno przenieść dowolną formułę do poddowodu

LOGIKI RELEWANTNE

Reguły:

Reguły dla implikacji:

(MP) $\varphi \rightarrow \psi_A, \ \varphi_B \vdash \psi_{A \cup B}$

(DT) jeżeli $\varphi_{\{i\}} \vdash \psi_A$, to $\vdash \varphi \rightarrow \psi_{A-\{i\}}$, pod warunkiem, że $i \in A$

Reguły rejteracji:

$(Reit_E)$ wolno przenieść implikację do poddowodu

$(Reit_R)$ wolno przenieść dowolną formułę do poddowodu

Reguły "mieszania":

LOGIKI RELEWANTNE

Reguły:

Reguły dla implikacji:

(MP) $\varphi \to \psi_A, \ \varphi_B \vdash \psi_{A \cup B}$

(DT) jeżeli $\varphi_{\{i\}} \vdash \psi_A$, to $\vdash \varphi \to \psi_{A-\{i\}}$, pod warunkiem, że $i \in A$

Reguły rejteracji:

($Reit_E$) wolno przenieść implikację do poddowodu

($Reit_R$) wolno przenieść dowolną formułę do poddowodu

Reguły "mieszania":

(M_E) $\varphi \to \psi_A, \ \varphi \to \psi_B \vdash \varphi \to \psi_{A \cup B}$

LOGIKI RELEWANTNE

Reguły:

Reguły dla implikacji:

(MP) $\varphi \rightarrow \psi_A,\ \varphi_B \vdash \psi_{A \cup B}$

(DT) jeżeli $\varphi_{\{i\}} \vdash \psi_A$, to $\vdash \varphi \rightarrow \psi_{A-\{i\}}$, pod warunkiem, że $i \in A$

Reguły rejteracji:

$(Reit_E)$ wolno przenieść implikację do poddowodu

$(Reit_R)$ wolno przenieść dowolną formułę do poddowodu

Reguły "mieszania":

(M_E) $\varphi \rightarrow \psi_A,\ \varphi \rightarrow \psi_B \vdash \varphi \rightarrow \psi_{A \cup B}$

(M_R) $\varphi_A,\ \varphi_B \vdash \varphi_{A \cup B}$

LOGIKI RELEWANTNE

Reguły:

Reguły dla implikacji:

(MP) $\varphi \rightarrow \psi_A,\ \varphi_B \vdash \psi_{A \cup B}$

(DT) jeżeli $\varphi_{\{i\}} \vdash \psi_A$, to $\vdash \varphi \rightarrow \psi_{A-\{i\}}$, pod warunkiem, że $i \in A$

Reguły rejteracji:

$(Reit_E)$ wolno przenieść implikację do poddowodu

$(Reit_R)$ wolno przenieść dowolną formułę do poddowodu

Reguły "mieszania":

(M_E) $\varphi \rightarrow \psi_A,\ \varphi \rightarrow \psi_B \vdash \varphi \rightarrow \psi_{A \cup B}$

(M_R) $\varphi_A,\ \varphi_B \vdash \varphi_{A \cup B}$

Różnica między **E** i **R**: (dowód prawa przestawiania i ograniczonego prawa przestawiania)

LOGIKI RELEWANTNE

Różnica między **E** i **R**: (dowód prawa przestawiania i ograniczonego prawa przestawiania)

$\vdash_R (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r))$ (ale $\nvdash_E$)
$\vdash_E (p \rightarrow ((q \rightarrow s) \rightarrow r)) \rightarrow ((q \rightarrow s) \rightarrow (p \rightarrow r))$

LOGIKI RELEWANTNE

Różnica między **E** i **R**: (dowód prawa przestawiania i ograniczonego prawa przestawiania)

$\vdash_R (p \to (q \to r)) \to (q \to (p \to r))$ (ale $\nvdash_E$)

$\vdash_E (p \to ((q \to s) \to r)) \to ((q \to s) \to (p \to r))$

1	$p \to (q \to r) : 1$	z
1.1	$q : 2$	z
1.2	$p \to (q \to r) : 1$	$(1, Reit_E)$
1.1.1	$p : 3$	z
1.1.2	$p \to (q \to r) : 1$	$(1.2, Reit_E)$
1.1.3	$q \to r : 1, 3$	$(1.1.1, 1.1.2, MP)$
1.1.4	$q : 2$	$(1.1, Reit_R)$
1.1.5	$r : 1, 2, 3$	$(1.1.3, 1.1.4, MP)$
1.3	$p \to r : 1, 2$	$(1.1.1 - 1.1.5\ DT)$
2	$q \to (p \to r) : 1$	$(1.1 - 1.3\ DT)$
	$\vdash$	$(1 - 2\ DT)$

LOGIKI RELEWANTNE

Różnica między **EM** i **RM** a **E** i **R**:

LOGIKI RELEWANTNE

Różnica między **EM** i **RM** a **E** i **R**:

$\vdash_{RM} p \rightarrow (p \rightarrow p)$ (ale $\nvdash_R$ i $\nvdash_{EM}$)

$\vdash_{EM} (p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q))$ (ale $\nvdash_E$)

LOGIKI RELEWANTNE

Różnica między **EM** i **RM** a **E** i **R**:

$\vdash_{RM} p \rightarrow (p \rightarrow p)$ (ale $\nvdash_R$ i $\nvdash_{EM}$)

$\vdash_{EM} (p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q))$ (ale $\nvdash_E$)

1	$p : 1$	z
1.1	$p : 2$	z
1.2	$p : 1$	$(1, Reit_R)$
1.3	$p : 1, 2$	$(1.1, 1.2, M_R)$
2	$p \rightarrow p : 1$	$(1.1 - 1.3\ DT)$
	$p \rightarrow (p \rightarrow p)$	$(1 - 2\ DT)$

LOGIKI RELEWANTNE

Różnica między **EM** i **RM** a **E** i **R**:

$\vdash_{RM} p \rightarrow (p \rightarrow p)$ (ale $\nvdash_R$ i $\nvdash_{EM}$)

$\vdash_{EM} (p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q))$ (ale $\nvdash_E$)

1	$p : 1$	z
1.1	$p : 2$	z
1.2	$p : 1$	$(1, Reit_R)$
1.3	$p : 1, 2$	$(1.1, 1.2, M_R)$
2	$p \rightarrow p : 1$	$(1.1 - 1.3\ DT)$
	$p \rightarrow (p \rightarrow p)$	$(1 - 2\ DT)$

Relacje między logikami:

LOGIKI RELEWANTNE

Różnica między **EM** i **RM** a **E** i **R**:

$\vdash_{RM} p \rightarrow (p \rightarrow p)$ (ale $\nvdash_{R}$ i $\nvdash_{EM}$)

$\vdash_{EM} (p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q))$ (ale $\nvdash_{E}$)

1	$p : 1$	z
1.1	$p : 2$	z
1.2	$p : 1$	$(1, Reit_R)$
1.3	$p : 1, 2$	$(1.1, 1.2, M_R)$
2	$p \rightarrow p : 1$	$(1.1 - 1.3\ DT)$
	$p \rightarrow (p \rightarrow p)$	$(1 - 2\ DT)$

Relacje między logikami:

E$\subset$**R**, **EM**$\subset$**RM**, **E**$\subset$**EM**, **R**$\subset$**RM**

LOGIKI RELEWANTNE

Reguły dla ¬:

LOGIKI RELEWANTNE

Reguły dla ¬:

(NN) $\varphi_A \dashv\vdash \neg\neg\varphi_A$

LOGIKI RELEWANTNE

Reguły dla $\neg$:

(NN) $\varphi_A \dashv\vdash \neg\neg\varphi_A$
(MT) $\varphi \rightarrow \psi_A,\ \neg\psi_B \vdash \neg\varphi_{A\cup B}$

LOGIKI RELEWANTNE

Reguły dla $\neg$:

(NN) $\varphi_A \dashv\vdash \neg\neg\varphi_A$
(MT) $\varphi \rightarrow \psi_A,\ \neg\psi_B \vdash \neg\varphi_{A\cup B}$
(Red) $\varphi \rightarrow \neg\varphi_A \vdash \neg\varphi_A$

LOGIKI RELEWANTNE

Reguły dla $\neg$:

(NN) $\varphi_A \dashv\vdash \neg\neg\varphi_A$
(MT) $\varphi \rightarrow \psi_A,\ \neg\psi_B \vdash \neg\varphi_{A\cup B}$
(Red) $\varphi \rightarrow \neg\varphi_A \vdash \neg\varphi_A$
Uwaga! brak w DN dla logik relewantnych reguły dowodu niewprost;
(Red) pełni funkcję ograniczonej formy takiego dowodu.

LOGIKI RELEWANTNE

Reguły dla $\neg$:

(NN) $\varphi_A \dashv\vdash \neg\neg\varphi_A$
(MT) $\varphi \to \psi_A,\ \neg\psi_B \vdash \neg\varphi_{A\cup B}$
(Red) $\varphi \to \neg\varphi_A \vdash \neg\varphi_A$
Uwaga! brak w DN dla logik relewantnych reguły dowodu niewprost; (Red) pełni funkcję ograniczonej formy takiego dowodu.
dowód prawa kontrapozycji

1	$p \to q : 1$	z
1.1	$\neg q : 2$	z
1.2	$p \to q : 1$	$(1, Reit_R)$
1.3	$\neg p : 1, 2$	$(1.1, 1.2, MT)$
2	$\neg q \to \neg p : 1$	$(1.1 - 1.3\ DT)$
	$(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$	$(1 - 2\ DT)$

LOGIKI RELEWANTNE

Reguły dla $\wedge$:

LOGIKI RELEWANTNE

Reguły dla $\wedge$:

$(\wedge E)$ $\varphi \wedge \psi_A \vdash \varphi_A, \; \varphi \wedge \psi_A \vdash \psi_A$

LOGIKI RELEWANTNE

Reguły dla $\wedge$:

$(\wedge E)$ $\varphi \wedge \psi_A \vdash \varphi_A, \ \varphi \wedge \psi_A \vdash \psi_A$
$(\wedge D)$ $\varphi_A, \ \psi_A \vdash \varphi \wedge \psi_A$

LOGIKI RELEWANTNE

Reguły dla $\wedge$:

$(\wedge E)$ $\varphi \wedge \psi_A \vdash \varphi_A$, $\varphi \wedge \psi_A \vdash \psi_A$
$(\wedge D)$ φ_A, $\psi_A \vdash \varphi \wedge \psi_A$
Uwaga! ograniczenie na indeksach w $(\wedge D)$ pełni istotną funkcję; reguła z różnymi indeksami w przesłankach pozwala na dowód $p \rightarrow (q \rightarrow q)$

LOGIKI RELEWANTNE

Reguły dla $\wedge$:

$(\wedge E)$ $\varphi \wedge \psi_A \vdash \varphi_A,\ \varphi \wedge \psi_A \vdash \psi_A$
$(\wedge D)$ $\varphi_A,\ \psi_A \vdash \varphi \wedge \psi_A$
Uwaga! ograniczenie na indeksach w $(\wedge D)$ pełni istotną funkcję; reguła z różnymi indeksami w przesłankach pozwala na dowód $p \rightarrow (q \rightarrow q)$

1	$p : 1$	z
1.1	$q : 2$	z
1.2	$p : 1$	$(1, Reit_R)$
1.3	$p \wedge q : 1, 2$	$(1.1, 1.2, \wedge D^*)$
1.4	$q : 1, 2$	$(1.3, \wedge E)$
2	$q \rightarrow q : 1$	$(1.1 - 1.4\ DT)$
	$p \rightarrow (q \rightarrow q)$	$(1 - 2\ DT)$

LOGIKI RELEWANTNE

Reguły dla $\vee$:

LOGIKI RELEWANTNE

Reguły dla $\vee$:

$(\vee D)$ $\varphi_A \vdash \varphi \vee \psi_A$, $\psi_A \vdash \varphi \vee \psi_A$

LOGIKI RELEWANTNE

Reguły dla $\vee$:

($\vee D$) $\varphi_A \vdash \varphi \vee \psi_A, \; \psi_A \vdash \varphi \vee \psi_A$
($\vee E$) $\varphi \vee \psi_A, \; \varphi \rightarrow \chi_B, \; \psi \rightarrow \chi_B \vdash \chi_{A \cup B}$

LOGIKI RELEWANTNE

Reguły dla $\vee$:

$(\vee D)$ $\varphi_A \vdash \varphi \vee \psi_A$, $\psi_A \vdash \varphi \vee \psi_A$
$(\vee E)$ $\varphi \vee \psi_A$, $\varphi \to \chi_B$, $\psi \to \chi_B \vdash \chi_{A \cup B}$
$(\wedge\vee)$ $\varphi \wedge (\psi \vee \chi)_A \vdash (\varphi \wedge \psi) \vee \chi_A$

LOGIKI RELEWANTNE

Reguły dla $\vee$:

$(\vee D)$ $\varphi_A \vdash \varphi \vee \psi_A, \ \psi_A \vdash \varphi \vee \psi_A$
$(\vee E)$ $\varphi \vee \psi_A, \ \varphi \rightarrow \chi_B, \ \psi \rightarrow \chi_B \vdash \chi_{A \cup B}$
$(\wedge\vee)$ $\varphi \wedge (\psi \vee \chi)_A \vdash (\varphi \wedge \psi) \vee \chi_A$
Dlaczego brak standardowej reguły $(\vee E)$ (czyli MTP)? – bo pozwala na dowód $p \wedge \neg p \rightarrow q$.

LOGIKI RELEWANTNE

Reguły dla $\vee$:

$(\vee D)$ $\varphi_A \vdash \varphi \vee \psi_A$, $\psi_A \vdash \varphi \vee \psi_A$
$(\vee E)$ $\varphi \vee \psi_A$, $\varphi \rightarrow \chi_B$, $\psi \rightarrow \chi_B \vdash \chi_{A \cup B}$
$(\wedge\vee)$ $\varphi \wedge (\psi \vee \chi)_A \vdash (\varphi \wedge \psi) \vee \chi_A$
Dlaczego brak standardowej reguły $(\vee E)$ (czyli MTP)? – bo pozwala na dowód $p \wedge \neg p \rightarrow q$.

1	$p \wedge \neg p : 1$	z
2	$p : 1$	$(1, \wedge E)$
3	$\neg p : 1$	$(1, \wedge E)$
4	$p \vee q : 1$	$(2, \vee D)$
5	$q : 1$	$(3, 4, MTP)$
	$p \wedge \neg p \rightarrow q$	$(1-5, DT)$

LOGIKI RELEWANTNE

Reguły dla $\vee$:

$(\vee D)$ $\varphi_A \vdash \varphi \vee \psi_A, \; \psi_A \vdash \varphi \vee \psi_A$
$(\vee E)$ $\varphi \vee \psi_A, \; \varphi \to \chi_B, \; \psi \to \chi_B \vdash \chi_{A \cup B}$
$(\wedge\vee)$ $\varphi \wedge (\psi \vee \chi)_A \vdash (\varphi \wedge \psi) \vee \chi_A$
Dlaczego brak standardowej reguły $(\vee E)$ (czyli MTP)? – bo pozwala na dowód $p \wedge \neg p \to q$.

1	$p \wedge \neg p : 1$	z
2	$p : 1$	$(1, \wedge E)$
3	$\neg p : 1$	$(1, \wedge E)$
4	$p \vee q : 1$	$(2, \vee D)$
5	$q : 1$	$(3, 4, MTP)$
	$p \wedge \neg p \to q$	$(1 - 5, DT)$

Problem co odrzucić (MTP) czy $\vee D$? Wybór relewantystów dyskusyjny.

LOGIKI RELEWANTNE

Krótka dygresja o semantyce relacyjnej

LOGIKI RELEWANTNE

Krótka dygresja o semantyce relacyjnej

Logiki relewantne można charakteryzować z pomocą modeli relacyjnych z ternarną relacją osiągalności $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{W}^3$. Warunek spełnialności dla implikacji wygląda następująco:

LOGIKI RELEWANTNE

Krótka dygresja o semantyce relacyjnej

Logiki relewantne można charakteryzować z pomocą modeli relacyjnych z ternarną relacją osiągalności $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{W}^3$. Warunek spełnialności dla implikacji wygląda następująco:

$\mathfrak{M}, x \vDash \varphi \to \psi$ wtw jeżeli $\mathfrak{M}, y \vDash \varphi$, to $\mathfrak{M}, z \vDash \psi$ dla dowolnych $y, z \in \mathcal{W}$, takich, że $\mathcal{R}xyz$

LOGIKI RELEWANTNE

Krótka dygresja o semantyce relacyjnej

Logiki relewantne można charakteryzować z pomocą modeli relacyjnych z ternarną relacją osiągalności $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{W}^3$. Warunek spełnialności dla implikacji wygląda następująco:
$\mathfrak{M}, x \models \varphi \rightarrow \psi$ wtw jeżeli $\mathfrak{M}, y \models \varphi$, to $\mathfrak{M}, z \models \psi$ dla dowolnych $y, z \in \mathcal{W}$, takich, że $\mathcal{R}xyz$
Aby otrzymać klasę modeli charakteryzujących **E** trzeba na $\mathcal{R}$ nałożyć szereg dodatkowych warunków, gdyż w klasie wszystkich modeli nawet $p \rightarrow p$ jest falsyfikowalne.

LOGIKI OKRESÓW WARUNKOWYCH

Motywacje:

LOGIKI OKRESÓW WARUNKOWYCH

Motywacje:

Inne niż w przypadku logik relewantnych – formalizacja spójnika okresów warunkowych w języku naturalnym. Stąd w logikach OW nie zastępuje się implikacji materialnej nowym spójnikiem $>$, lecz dodaje się go do standardowego języka **KRZ**.

LOGIKI OKRESÓW WARUNKOWYCH

Motywacje:

Inne niż w przypadku logik relewantnych – formalizacja spójnika okresów warunkowych w języku naturalnym. Stąd w logikach OW nie zastępuje się implikacji materialnej nowym spójnikiem $>$, lecz dodaje się go do standardowego języka **KRZ**.

Spójnik $>$ jest bardzo słaby; nie spełnia nawet takich reguł jak:

- $\varphi \rightarrow \psi \vdash \varphi \wedge \chi \rightarrow \psi$ (OP)
- $\varphi \rightarrow \psi \vdash \neg\psi \rightarrow \neg\varphi$ (TR)
- $\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi \vdash \varphi \rightarrow \chi$ (SH)

LOGIKI OKRESÓW WARUNKOWYCH

Logiki:

LOGIKI OKRESÓW WARUNKOWYCH

Logiki:

Logiki OW uzyskujemy jako wzmocnienia **KRZ** z użyciem m.in:

LOGIKI OKRESÓW WARUNKOWYCH

Logiki:

Logiki OW uzyskujemy jako wzmocnienia **KRZ** z użyciem m.in:
(RCEA) $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi \;/\; \vdash \varphi > \chi \leftrightarrow \psi > \chi$

LOGIKI OKRESÓW WARUNKOWYCH

Logiki:

Logiki OW uzyskujemy jako wzmocnienia **KRZ** z użyciem m.in:

(RCEA) $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi \ / \vdash \varphi > \chi \leftrightarrow \psi > \chi$

(RCEC) $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi \ / \vdash \chi > \varphi \leftrightarrow \chi > \psi$

LOGIKI OKRESÓW WARUNKOWYCH

Logiki:

Logiki OW uzyskujemy jako wzmocnienia **KRZ** z użyciem m.in:

(RCEA) $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi \ / \vdash \varphi > \chi \leftrightarrow \psi > \chi$

(RCEC) $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi \ / \vdash \chi > \varphi \leftrightarrow \chi > \psi$

(CM) $\vdash \varphi > \psi \wedge \chi \rightarrow (\varphi > \psi) \wedge (\varphi > \chi)$

LOGIKI OKRESÓW WARUNKOWYCH

Logiki:

Logiki OW uzyskujemy jako wzmocnienia **KRZ** z użyciem m.in:

(RCEA) $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi \ / \vdash \varphi > \chi \leftrightarrow \psi > \chi$

(RCEC) $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi \ / \vdash \chi > \varphi \leftrightarrow \chi > \psi$

(CM) $\vdash \varphi > \psi \wedge \chi \rightarrow (\varphi > \psi) \wedge (\varphi > \chi)$

(CR) $\vdash (\varphi > \psi) \wedge (\varphi > \chi) \rightarrow \varphi > \psi \wedge \chi$

LOGIKI OKRESÓW WARUNKOWYCH

Logiki:

Logiki OW uzyskujemy jako wzmocnienia **KRZ** z użyciem m.in:

(RCEA) $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi \ / \vdash \varphi > \chi \leftrightarrow \psi > \chi$

(RCEC) $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi \ / \vdash \chi > \varphi \leftrightarrow \chi > \psi$

(CM) $\vdash \varphi > \psi \wedge \chi \rightarrow (\varphi > \psi) \wedge (\varphi > \chi)$

(CR) $\vdash (\varphi > \psi) \wedge (\varphi > \chi) \rightarrow \varphi > \psi \wedge \chi$

(RCK) $\vdash \varphi_1 \wedge \ldots\ldots \wedge \varphi_n \rightarrow \psi \ /$

$\vdash (\chi > \varphi_1) \wedge \ldots\ldots \wedge (\chi > \varphi_n) \rightarrow \chi > \psi$, n$\geq$0

LOGIKI OKRESÓW WARUNKOWYCH

Logiki:

Logiki OW uzyskujemy jako wzmocnienia **KRZ** z użyciem m.in:
(RCEA) $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi \;/ \vdash \varphi > \chi \leftrightarrow \psi > \chi$
(RCEC) $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi \;/ \vdash \chi > \varphi \leftrightarrow \chi > \psi$
(CM) $\vdash \varphi > \psi \wedge \chi \rightarrow (\varphi > \psi) \wedge (\varphi > \chi)$
(CR) $\vdash (\varphi > \psi) \wedge (\varphi > \chi) \rightarrow \varphi > \psi \wedge \chi$
(RCK) $\vdash \varphi_1 \wedge \ldots.. \wedge \varphi_n \rightarrow \psi \;/$
$\vdash (\chi > \varphi_1) \wedge \ldots.. \wedge (\chi > \varphi_n) \rightarrow \chi > \psi$, n≥0
Logika domknięta na (RCEA) i (RCEC) jest logiką *klasyczną*, jeżeli dodatkowo zawiera (CM) to jest *monotoniczna*, a jeżeli zawiera też (CR), to jest *regularna*. Logika klasyczna domknięta na (RCK) to logika normalna. Najsłabsza logika klasyczna to **CE**, monotoniczna to **CM**, regularna to **CR** a normalna to **CK**.

LOGIKI OKRESÓW WARUNKOWYCH

Semantyka dla logik normalnych

LOGIKI OKRESÓW WARUNKOWYCH

Semantyka dla logik normalnych

Przez standardowy model warunkowy rozumiemy strukturę $\mathfrak{M} = \langle \mathcal{W}, f, V \rangle$ gdzie $\mathcal{W}$ to zbiór światów, V to waluacja zmiennych, a f to funkcja selekcji klasy światów (sądu), która dowolnemu światu i sądowi przyporządkowuje jakiś sąd.

LOGIKI OKRESÓW WARUNKOWYCH

Semantyka dla logik normalnych

Przez standardowy model warunkowy rozumiemy strukturę $\mathfrak{M} = \langle \mathcal{W}, f, V \rangle$ gdzie $\mathcal{W}$ to zbiór światów, V to waluacja zmiennych, a f to funkcja selekcji klasy światów (sądu), która dowolnemu światu i sądowi przyporządkowuje jakiś sąd.
Formalnie $f : \mathcal{W} \times \mathcal{P}(\mathcal{W}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{W})$.

LOGIKI OKRESÓW WARUNKOWYCH

Semantyka dla logik normalnych

Przez standardowy model warunkowy rozumiemy strukturę $\mathfrak{M} = \langle \mathcal{W}, f, V \rangle$ gdzie $\mathcal{W}$ to zbiór światów, V to waluacja zmiennych, a f to funkcja selekcji klasy światów (sądu), która dowolnemu światu i sądowi przyporządkowuje jakiś sąd.

Formalnie $f : \mathcal{W} \times \mathcal{P}(\mathcal{W}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{W})$.

Warunki spełniania dla dowolnego zdania są takie same jak w dowolnych rozważanych poprzednio modelach, dla okresów warunkowych stosowna klauzula wygląda tak:

LOGIKI OKRESÓW WARUNKOWYCH

Semantyka dla logik normalnych

Przez standardowy model warunkowy rozumiemy strukturę $\mathfrak{M} = \langle \mathcal{W}, f, V \rangle$ gdzie $\mathcal{W}$ to zbiór światów, V to waluacja zmiennych, a f to funkcja selekcji klasy światów (sądu), która dowolnemu światu i sądowi przyporządkowuje jakiś sąd.
Formalnie $f : \mathcal{W} \times \mathcal{P}(\mathcal{W}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{W})$.
Warunki spełniania dla dowolnego zdania są takie same jak w dowolnych rozważanych poprzednio modelach, dla okresów warunkowych stosowna klauzula wygląda tak:
$\mathfrak{M}, w \models \varphi > \psi$ wtw, $f(w, \|\varphi\|) \subseteq \|\psi\|$

LOGIKI OKRESÓW WARUNKOWYCH

Semantyka dla logik normalnych

Przez standardowy model warunkowy rozumiemy strukturę $\mathfrak{M} = \langle \mathcal{W}, f, V \rangle$ gdzie $\mathcal{W}$ to zbiór światów, V to waluacja zmiennych, a f to funkcja selekcji klasy światów (sądu), która dowolnemu światu i sądowi przyporządkowuje jakiś sąd.
Formalnie $f : \mathcal{W} \times \mathcal{P}(\mathcal{W}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{W})$.
Warunki spełniania dla dowolnego zdania są takie same jak w dowolnych rozważanych poprzednio modelach, dla okresów warunkowych stosowna klauzula wygląda tak:
$\mathfrak{M}, w \models \varphi > \psi$ wtw, $f(w, \|\varphi\|) \subseteq \|\psi\|$
Tautologiczność i wynikanie w takich modelach definiujemy tak jak poprzednio.

LOGIKI OKRESÓW WARUNKOWYCH

Semantyka dla logik normalnych

Przez standardowy model warunkowy rozumiemy strukturę $\mathfrak{M} = \langle \mathcal{W}, f, V \rangle$ gdzie $\mathcal{W}$ to zbiór światów, V to waluacja zmiennych, a f to funkcja selekcji klasy światów (sądu), która dowolnemu światu i sądowi przyporządkowuje jakiś sąd.
Formalnie $f : \mathcal{W} \times \mathcal{P}(\mathcal{W}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{W})$.
Warunki spełniania dla dowolnego zdania są takie same jak w dowolnych rozważanych poprzednio modelach, dla okresów warunkowych stosowna klauzula wygląda tak:
$\mathfrak{M}, w \models \varphi > \psi$ wtw, $f(w, \|\varphi\|) \subseteq \|\psi\|$
Tautologiczność i wynikanie w takich modelach definiujemy tak jak poprzednio.
CK można teraz scharakteryzować semantycznie jako logikę zdeterminowaną przez klasę wszystkich standardowych modeli warunkowych. Najbardziej znane logiki OW są nadlogikami **CK**.

LOGIKI OKRESÓW WARUNKOWYCH

Ważniejsze logiki normalne OW

LOGIKI OKRESÓW WARUNKOWYCH

Ważniejsze logiki normalne OW

1.**CKD** (dependable) to najmniejsza logika zawierająca **CK** + (ID) $\varphi > \varphi$

LOGIKI OKRESÓW WARUNKOWYCH

Ważniejsze logiki normalne OW

1.**CKD** (dependable) to najmniejsza logika zawierająca **CK** + (ID) $\varphi > \varphi$
Logika ta jest semantycznie scharakteryzowana przez klasę modeli spełniających warunek:

LOGIKI OKRESÓW WARUNKOWYCH

Ważniejsze logiki normalne OW

1.**CKD** (dependable) to najmniejsza logika zawierająca **CK** + (ID) $\varphi > \varphi$
Logika ta jest semantycznie scharakteryzowana przez klasę modeli spełniających warunek:
(id) $f(w, X) \subseteq X$

LOGIKI OKRESÓW WARUNKOWYCH

Ważniejsze logiki normalne OW

1.**CKD** (dependable) to najmniejsza logika zawierająca **CK** + (ID) $\varphi > \varphi$
Logika ta jest semantycznie scharakteryzowana przez klasę modeli spełniających warunek:
(id) $f(w, X) \subseteq X$
2.**CKWM** (weakly material) to najmniejsza logika zawierająca **CK** + (MP) $\varphi > \psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$

LOGIKI OKRESÓW WARUNKOWYCH

Ważniejsze logiki normalne OW

1.**CKD** (dependable) to najmniejsza logika zawierająca **CK** + (ID) $\varphi > \varphi$
Logika ta jest semantycznie scharakteryzowana przez klasę modeli spełniających warunek:
(id) $f(w, X) \subseteq X$
2.**CKWM** (weakly material) to najmniejsza logika zawierająca **CK** + (MP) $\varphi > \psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$
Logika ta jest semantycznie scharakteryzowana przez klasę modeli spełniających warunek:

LOGIKI OKRESÓW WARUNKOWYCH

Ważniejsze logiki normalne OW

1.**CKD** (dependable) to najmniejsza logika zawierająca **CK** + (ID) $\varphi > \varphi$
Logika ta jest semantycznie scharakteryzowana przez klasę modeli spełniających warunek:
(id) $f(w, X) \subseteq X$
2.**CKWM** (weakly material) to najmniejsza logika zawierająca **CK** + (MP) $\varphi > \psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$
Logika ta jest semantycznie scharakteryzowana przez klasę modeli spełniających warunek:
(mp) jeżeli $w \in X$, to $w \in f(w, X)$

LOGIKI OKRESÓW WARUNKOWYCH

System DN

LOGIKI OKRESÓW WARUNKOWYCH

System DN

Aby uzyskać formalizację **CK** do systemu DN dla **KRZ** dodajemy 3 reguły:

LOGIKI OKRESÓW WARUNKOWYCH

System DN

Aby uzyskać formalizację **CK** do systemu DN dla **KRZ** dodajemy 3 reguły:
($> D$) jeżeli w *poddowodzie warunkowym* zapoczątkowanym założeniem warunkowym (zw) φ wydedukowaliśmy ψ, to można zamknąć ten poddowód i w dowodzie nadrzędnym dopisać $\varphi > \psi$

LOGIKI OKRESÓW WARUNKOWYCH

System DN

Aby uzyskać formalizację **CK** do systemu DN dla **KRZ** dodajemy 3 reguły:
($> D$) jeżeli w *poddowodzie warunkowym* zapoczątkowanym założeniem warunkowym (zw) φ wydedukowaliśmy ψ, to można zamknąć ten poddowód i w dowodzie nadrzędnym dopisać $\varphi > \psi$
($Reit_{>}$) do poddowodu warunkowego zapoczątkowanego założeniem warunkowym φ, można przenieść ψ tylko jeżeli jest tezą lub jeżeli $\varphi > \psi$ występuje w dowodzie nadrzędnym

LOGIKI OKRESÓW WARUNKOWYCH

System DN

Aby uzyskać formalizację **CK** do systemu DN dla **KRZ** dodajemy 3 reguły:
$(> D)$ jeżeli w *poddowodzie warunkowym* zapoczątkowanym założeniem warunkowym (zw) φ wydedukowaliśmy ψ, to można zamknąć ten poddowód i w dowodzie nadrzędnym dopisać $\varphi > \psi$
$(Reit_{>})$ do poddowodu warunkowego zapoczątkowanego założeniem warunkowym φ, można przenieść ψ tylko jeżeli jest tezą lub jeżeli $\varphi > \psi$ występuje w dowodzie nadrzędnym
$(RL_{>})$ z $\varphi > \psi$ można wydedukować $\chi > \psi$ pod warunkiem, że $\varphi \leftrightarrow \chi$ jest tezą

LOGIKI OKRESÓW WARUNKOWYCH

System DN

Aby uzyskać formalizację **CK** do systemu DN dla **KRZ** dodajemy 3 reguły:
($> D$) jeżeli w *poddowodzie warunkowym* zapoczątkowanym założeniem warunkowym (zw) φ wydedukowaliśmy ψ, to można zamknąć ten poddowód i w dowodzie nadrzędnym dopisać $\varphi > \psi$
($Reit_>$) do poddowodu warunkowego zapoczątkowanego założeniem warunkowym φ, można przenieść ψ tylko jeżeli jest tezą lub jeżeli $\varphi > \psi$ występuje w dowodzie nadrzędnym
($RL_>$) z $\varphi > \psi$ można wydedukować $\chi > \psi$ pod warunkiem, że $\varphi \leftrightarrow \chi$ jest tezą
Dla otrzymania **CKD** należy dodać aksjomat $\varphi > \varphi$, a dla **CKWM** regułę (MP) dla $>$.