LOGIKA II – WPROWADZENIE DO LOGIK NIEKLASYCZNYCH

Andrzej Indrzejczak

Katedra Logiki i Metodologii Nauk UŁ

Łódź, semestr zimowy 2008/2009

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Historia:

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Historia:

- Arystoteles – problem wartości zdań przygodnych o przyszłości; związek z problemem indeterminizmu

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Historia:

- Arystoteles – problem wartości zdań przygodnych o przyszłości; związek z problemem indeterminizmu
- lata 20-te – Łukasiewicz, Post: pierwsze systemy trójwartościowe i skończenie wartościowe

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Historia:

- Arystoteles – problem wartości zdań przygodnych o przyszłości; związek z problemem indeterminizmu
- lata 20-te – Łukasiewicz, Post: pierwsze systemy trójwartościowe i skończenie wartościowe
- lata 30-te – budowanie probabilistycznych logik wielowartościowych – Zawirski, Reichenbach

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Historia:

- Arystoteles – problem wartości zdań przygodnych o przyszłości; związek z problemem indeterminizmu
- lata 20-te – Łukasiewicz, Post: pierwsze systemy trójwartościowe i skończenie wartościowe
- lata 30-te – budowanie probabilistycznych logik wielowartościowych – Zawirski, Reichenbach
- 1938 – niezależne konstrukcje Kleene'ego i logiki nonsensu Bochvara

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Historia:

- Arystoteles – problem wartości zdań przygodnych o przyszłości; związek z problemem indeterminizmu
- lata 20-te – Łukasiewicz, Post: pierwsze systemy trójwartościowe i skończenie wartościowe
- lata 30-te – budowanie probabilistycznych logik wielowartościowych – Zawirski, Reichenbach
- 1938 – niezależne konstrukcje Kleene'ego i logiki nonsensu Bochvara
- lata 50-te, 60-te – Schroter, Rousseau – rozwój teorii dowodu dla logik wielowartościowych

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Historia:

- Arystoteles – problem wartości zdań przygodnych o przyszłości; związek z problemem indeterminizmu
- lata 20-te – Łukasiewicz, Post: pierwsze systemy trójwartościowe i skończenie wartościowe
- lata 30-te – budowanie probabilistycznych logik wielowartościowych – Zawirski, Reichenbach
- 1938 – niezależne konstrukcje Kleene'ego i logiki nonsensu Bochvara
- lata 50-te, 60-te – Schroter, Rousseau – rozwój teorii dowodu dla logik wielowartościowych
- lata 60-te, 70-te – superwaluacje van Fraassena; logiki częściowe

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Historia:

- Arystoteles – problem wartości zdań przygodnych o przyszłości; związek z problemem indeterminizmu
- lata 20-te – Łukasiewicz, Post: pierwsze systemy trójwartościowe i skończenie wartościowe
- lata 30-te – budowanie probabilistycznych logik wielowartościowych – Zawirski, Reichenbach
- 1938 – niezależne konstrukcje Kleene'ego i logiki nonsensu Bochvara
- lata 50-te, 60-te – Schroter, Rousseau – rozwój teorii dowodu dla logik wielowartościowych
- lata 60-te, 70-te – superwaluacje van Fraassena; logiki częściowe
- 1965 – teoria zbiorów rozmytych Zadeha; 1975 – logika rozmyta

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Historia:

- Arystoteles – problem wartości zdań przygodnych o przyszłości; związek z problemem indeterminizmu
- lata 20-te – Łukasiewicz, Post: pierwsze systemy trójwartościowe i skończenie wartościowe
- lata 30-te – budowanie probabilistycznych logik wielowartościowych – Zawirski, Reichenbach
- 1938 – niezależne konstrukcje Kleene'ego i logiki nonsensu Bochvara
- lata 50-te, 60-te – Schroter, Rousseau – rozwój teorii dowodu dla logik wielowartościowych
- lata 60-te, 70-te – superwaluacje van Fraassena; logiki częściowe
- 1965 – teoria zbiorów rozmytych Zadeha; 1975 – logika rozmyta
- 1977 – 4-wartościowa logik Belnapa dla AI

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Historia:

- Arystoteles – problem wartości zdań przygodnych o przyszłości; związek z problemem indeterminizmu
- lata 20-te – Łukasiewicz, Post: pierwsze systemy trójwartościowe i skończenie wartościowe
- lata 30-te – budowanie probabilistycznych logik wielowartościowych – Zawirski, Reichenbach
- 1938 – niezależne konstrukcje Kleene'ego i logiki nonsensu Bochvara
- lata 50-te, 60-te – Schroter, Rousseau – rozwój teorii dowodu dla logik wielowartościowych
- lata 60-te, 70-te – superwaluacje van Fraassena; logiki częściowe
- 1965 – teoria zbiorów rozmytych Zadeha; 1975 – logika rozmyta
- 1977 – 4-wartościowa logik Belnapa dla AI
- lata 90-te – Hahnle, Avron – systemy dedukcyjne używające zbiorów wartości jako etykiet

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

MOTYWY:

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

MOTYWY:

Różne motywacje dla odejścia od zasady dwuwartościowości i dla wprowadzenia dodatkowych wartości logicznych (filozoficzne, matematyczne, jezykowe, praktyczne).

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

MOTYWY:

Różne motywacje dla odejścia od zasady dwuwartościowości i dla wprowadzenia dodatkowych wartości logicznych (filozoficzne, matematyczne, jezykowe, praktyczne).
Motywy filozoficzne można pogrupować wg. 3 sposobów postrzegania statusu dodatkowych wartości:

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

MOTYWY:

Różne motywacje dla odejścia od zasady dwuwartościowości i dla wprowadzenia dodatkowych wartości logicznych (filozoficzne, matematyczne, jezykowe, praktyczne).
Motywy filozoficzne można pogrupować wg. 3 sposobów postrzegania statusu dodatkowych wartości:

- Modalności

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

MOTYWY:

Różne motywacje dla odejścia od zasady dwuwartościowości i dla wprowadzenia dodatkowych wartości logicznych (filozoficzne, matematyczne, jezykowe, praktyczne).
Motywy filozoficzne można pogrupować wg. 3 sposobów postrzegania statusu dodatkowych wartości:

- Modalności
- Luki

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

MOTYWY:

Różne motywacje dla odejścia od zasady dwuwartościowości i dla wprowadzenia dodatkowych wartości logicznych (filozoficzne, matematyczne, jezykowe, praktyczne).
Motywy filozoficzne można pogrupować wg. 3 sposobów postrzegania statusu dodatkowych wartości:

- Modalności
- Luki
- Zlepki

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

A. Modalności

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

A. Modalności

Różne aspekty związków wielowartościowości i modalności:

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

A. Modalności

Różne aspekty związków wielowartościowości i modalności:

1. wartości logiczne jako modalności

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

A. Modalności

Różne aspekty związków wielowartościowości i modalności:

1. wartości logiczne jako modalności
2. zdania ani prawdziwe ani fałszywe jako zdania modalne

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

A. Modalności

Różne aspekty związków wielowartościowości i modalności:

1. wartości logiczne jako modalności
2. zdania ani prawdziwe ani fałszywe jako zdania modalne
3. definiowanie zwrotów modalnych w logikach wielowartościowych

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

A. Modalności

Ad A.1. i A.2.

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

A. Modalności

Ad A.1. i A.2.

- Łukasiewicz nazywa trzecią wartość logiczną możliwością a zdania, które ją posiadają zdaniami możliwymi. Są to zdania przygodne o przyszłości (por. dalej punkt B.1.).

A. Modalności

Ad A.1. i A.2.

- Łukasiewicz nazywa trzecią wartość logiczną możliwością a zdania, które ją posiadają zdaniami możliwymi. Są to zdania przygodne o przyszłości (por. dalej punkt B.1.).
- Reichenbach uważa, ze kategorie modalne (możliwość, konieczność, niemożliwość) prowadzą do logiki 3-wartościowej poszerzonej następnie do 5-wartościowej przez dodanie 1 i 0.

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

A. Modalności

Ad A.1. i A.2.

- Łukasiewicz nazywa trzecią wartość logiczną możliwością a zdania, które ją posiadają zdaniami możliwymi. Są to zdania przygodne o przyszłości (por. dalej punkt B.1.).
- Reichenbach uważa, ze kategorie modalne (możliwość, konieczność, niemożliwość) prowadzą do logiki 3-wartościowej poszerzonej następnie do 5-wartościowej przez dodanie 1 i 0.
- Prior – logika 4-wartościowa kwalifikowanej prawdy i fałszu (koniecznie i niekoniecznie prawdziwe itp.).

Ad. A.3.

A. Modalności

Ad A.1. i A.2.

- Łukasiewicz nazywa trzecią wartość logiczną możliwością a zdania, które ją posiadają zdaniami możliwymi. Są to zdania przygodne o przyszłości (por. dalej punkt B.1.).
- Reichenbach uważa, ze kategorie modalne (możliwość, konieczność, niemożliwość) prowadzą do logiki 3-wartościowej poszerzonej następnie do 5-wartościowej przez dodanie 1 i 0.
- Prior – logika 4-wartościowa kwalifikowanej prawdy i fałszu (koniecznie i niekoniecznie prawdziwe itp.).

Ad. A.3.

Propozycje Łukasiewicza zdefiniowania funktorów modalnych na bazie logiki 3-wartościowej (potem 4 wartościowej).

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Krytyka podejścia "modalnego"

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Krytyka podejścia "modalnego"

Wydaje sie, ze takie próby w istocie nie wychodzą poza paradygmat 2-wartościowości z 1 i 0 jako pierwotnymi dla człowieka pojęciami. Nie wydaje się aby zdania koniecznie prawdziwe (analityczne, syntetyczne a priori) były w inny sposób prawdziwe niż zdania prawdziwe a posteriori (i tak samo zdania fałszywe). Nawet jeżeli odrzucimy argumenty Quine'a, które generalnie znoszą te rozróżnienia to i tak podstawowe argumenty za tym, że to różne rodzaje prawdy (lub fałszu) padają np.:

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Krytyka podejścia "modalnego"

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Krytyka podejścia "modalnego"

- Reichenbach myli się uważając kategorie modalne za pierwotne; ich pojawienie się wymagało odpowiedniego rozwoju wiedzy

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Krytyka podejścia "modalnego"

- Reichenbach myli się uważając kategorie modalne za pierwotne; ich pojawienie się wymagało odpowiedniego rozwoju wiedzy
- można zakwestionować, że ich wartość logiczna jest ustalana w inny sposób; wydaje się że dla zdań analitycznych podłożem też jest doświadczenie tylko nie w perspektywie jednostkowej ale filogenetycznej, jako podstawa ustalenia kategorii pojęciowych jezyka

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Krytyka podejścia "modalnego"

- Reichenbach myli się uważając kategorie modalne za pierwotne; ich pojawienie się wymagało odpowiedniego rozwoju wiedzy
- można zakwestionować, że ich wartość logiczna jest ustalana w inny sposób; wydaje się że dla zdań analitycznych podłożem też jest doświadczenie tylko nie w perspektywie jednostkowej ale filogenetycznej, jako podstawa ustalenia kategorii pojęciowych jezyka
- nawet jeżeli uznamy, że inny jest sposób ustalania ich prawdziwości, to i tak nie znaczy, że to inne rodzaje prawdy

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Krytyka podejścia "modalnego"

- Reichenbach myli się uważając kategorie modalne za pierwotne; ich pojawienie się wymagało odpowiedniego rozwoju wiedzy
- można zakwestionować, że ich wartość logiczna jest ustalana w inny sposób; wydaje się że dla zdań analitycznych podłożem też jest doświadczenie tylko nie w perspektywie jednostkowej ale filogenetycznej, jako podstawa ustalenia kategorii pojęciowych jezyka
- nawet jeżeli uznamy, że inny jest sposób ustalania ich prawdziwości, to i tak nie znaczy, że to inne rodzaje prawdy
- argument, że zdania analityczne i syntetyczne a priori sa niezmienne w przeciwieństwie do zdań aposteriorycznych też chybiony, bo nasz aparat pojęciowy też się zmienia, np.

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Krytyka podejścia "modalnego"

- Reichenbach myli się uważając kategorie modalne za pierwotne; ich pojawienie się wymagało odpowiedniego rozwoju wiedzy
- można zakwestionować, że ich wartość logiczna jest ustalana w inny sposób; wydaje się że dla zdań analitycznych podłożem też jest doświadczenie tylko nie w perspektywie jednostkowej ale filogenetycznej, jako podstawa ustalenia kategorii pojęciowych jezyka
- nawet jeżeli uznamy, że inny jest sposób ustalania ich prawdziwości, to i tak nie znaczy, że to inne rodzaje prawdy
- argument, że zdania analityczne i syntetyczne a priori sa niezmienne w przeciwieństwie do zdań aposteriorycznych też chybiony, bo nasz aparat pojęciowy też się zmienia, np.
  - "Atom jest niepodzielny" jest fałszywe, choć kiedyś było zdaniem analitycznie prawdziwym

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Krytyka podejścia "modalnego"

- Reichenbach myli się uważając kategorie modalne za pierwotne; ich pojawienie się wymagało odpowiedniego rozwoju wiedzy
- można zakwestionować, że ich wartość logiczna jest ustalana w inny sposób; wydaje się że dla zdań analitycznych podłożem też jest doświadczenie tylko nie w perspektywie jednostkowej ale filogenetycznej, jako podstawa ustalenia kategorii pojęciowych jezyka
- nawet jeżeli uznamy, że inny jest sposób ustalania ich prawdziwości, to i tak nie znaczy, że to inne rodzaje prawdy
- argument, że zdania analityczne i syntetyczne a priori sa niezmienne w przeciwieństwie do zdań aposteriorycznych też chybiony, bo nasz aparat pojęciowy też się zmienia, np.
  - "Atom jest niepodzielny" jest fałszywe, choć kiedyś było zdaniem analitycznie prawdziwym
  - "Słońce krąży wokół Ziemi" kiedyś uznawano za syntetyczne a priori

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Krytyka podejścia "modalnego"

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Krytyka podejścia "modalnego"

Również próba budowania przez Łukasiewicza logiki modalnej na logice 3-wartościowej lub 4-wartościowej była chybiona, gdyż prowadziła do paradoksalnych tez i reguł. Dugundji wykazał, że standardowe logiki modalne wymagają użycia matryc nieskończonych.

Krytyka podejścia "modalnego"

Również próba budowania przez Łukasiewicza logiki modalnej na logice 3-wartościowej lub 4-wartościowej była chybiona, gdyż prowadziła do paradoksalnych tez i reguł. Dugundji wykazał, że standardowe logiki modalne wymagają użycia matryc nieskończonych.

Ale!

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Krytyka podejścia "modalnego"

Również próba budowania przez Łukasiewicza logiki modalnej na logice 3-wartościowej lub 4-wartościowej była chybiona, gdyż prowadziła do paradoksalnych tez i reguł. Dugundji wykazał, że standardowe logiki modalne wymagają użycia matryc nieskończonych.
Ale!

- sukces techniczny; matryce w dowodach niezależności aksjomatów

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Krytyka podejścia "modalnego"

Również próba budowania przez Łukasiewicza logiki modalnej na logice 3-wartościowej lub 4-wartościowej była chybiona, gdyż prowadziła do paradoksalnych tez i reguł. Dugundji wykazał, że standardowe logiki modalne wymagają użycia matryc nieskończonych.
Ale!

- sukces techniczny; matryce w dowodach niezależności aksjomatów
- współcześnie budowa wielowartościowych logik modalnych np. Fitting

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

B. Luki

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

B. Luki

1. zdania przygodne o przyszłości (względy metafizyczne)

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

B. Luki

1. zdania przygodne o przyszłości (względy metafizyczne)
2. zdania, których wartości logicznej aktualnie nie znamy (względy epistemiczne)

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

B. Luki

1. zdania przygodne o przyszłości (względy metafizyczne)
2. zdania, których wartości logicznej aktualnie nie znamy (względy epistemiczne)
3. zdania eliptyczne

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

B. Luki

1. zdania przygodne o przyszłości (względy metafizyczne)
2. zdania, których wartości logicznej aktualnie nie znamy (względy epistemiczne)
3. zdania eliptyczne
4. zdania z pustymi nazwami

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

B. Luki

1. zdania przygodne o przyszłości (względy metafizyczne)
2. zdania, których wartości logicznej aktualnie nie znamy (względy epistemiczne)
3. zdania eliptyczne
4. zdania z pustymi nazwami
5. zdania literackie

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

B. Luki

1. zdania przygodne o przyszłości (względy metafizyczne)
2. zdania, których wartości logicznej aktualnie nie znamy (względy epistemiczne)
3. zdania eliptyczne
4. zdania z pustymi nazwami
5. zdania literackie
6. nonsensy

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

B. Luki

1. zdania przygodne o przyszłości (względy metafizyczne)
2. zdania, których wartości logicznej aktualnie nie znamy (względy epistemiczne)
3. zdania eliptyczne
4. zdania z pustymi nazwami
5. zdania literackie
6. nonsensy
7. twierdzenia mechaniki kwantowej

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Ad B.1. (zdania przygodne o przyszłości – futura contingentia)

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Ad B.1. (zdania przygodne o przyszłości – futura contingentia)

Arystoteles, Kotarbiński, Łukasiewicz przedstawiają argument, że zasada 2-wartościowości implikuje determinizm (twardy). Więc: albo uznajemy tę zasadę i determinizm, albo odrzucając ten ostatni musimy odrzucić też 2-wartościowość.

Ad B.1. (zdania przygodne o przyszłości – futura contingentia)

Arystoteles, Kotarbiński, Łukasiewicz przedstawiają argument, że zasada 2-wartościowości implikuje determinizm (twardy). Więc: albo uznajemy tę zasadę i determinizm, albo odrzucając ten ostatni musimy odrzucić też 2-wartościowość.

Uwaga! Argument Łukasiewicza jest niepoprawny (modalny paralogizm), ale mimo tego jest to ważny powód do wprowadzenia 3 wartości logicznej (utożsamianej z możliwością).

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Ad B.2. (zdania których wartości logicznej aktualnie nie znamy)

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Ad B.2. (zdania których wartości logicznej aktualnie nie znamy)

Chodzi tu o dowolne zdania, co do których brak nam aktualnie wiedzy czy są prawdziwe czy nie, choć może się to zmienić. W grę wchodzą zdania, których wartości logicznej nie znamy przez przypadek albo, których wartości możemy nigdy nie ustalić ze względów zasadniczych, np.

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Ad B.2. (zdania których wartości logicznej aktualnie nie znamy)

Chodzi tu o dowolne zdania, co do których brak nam aktualnie wiedzy czy są prawdziwe czy nie, choć może się to zmienić. W grę wchodzą zdania, których wartości logicznej nie znamy przez przypadek albo, których wartości możemy nigdy nie ustalić ze względów zasadniczych, np.

- zdania o przeszłości (wiedza historyczna) – z punktu widzenia logiki klasycznej nie ma to znaczenia, ale z punktu widzenia analizy praktycznego wnioskowania w oparciu o niepełne dane ma to znaczenie zasadnicze

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Ad B.2. (zdania których wartości logicznej aktualnie nie znamy)

Chodzi tu o dowolne zdania, co do których brak nam aktualnie wiedzy czy są prawdziwe czy nie, choć może się to zmienić. W grę wchodzą zdania, których wartości logicznej nie znamy przez przypadek albo, których wartości możemy nigdy nie ustalić ze względów zasadniczych, np.

- zdania o przeszłości (wiedza historyczna) – z punktu widzenia logiki klasycznej nie ma to znaczenia, ale z punktu widzenia analizy praktycznego wnioskowania w oparciu o niepełne dane ma to znaczenie zasadnicze
- problemy matematyczne nierozstrzygalne lub nawet rozstrzygalne teoretycznie ale nie praktycznie (nontractable)

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Proponowane ważniejsze rozwiazania z tej grupy:

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Proponowane ważniejsze rozwiazania z tej grupy:

- Kleene (funkcje częściowe)

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Proponowane ważniejsze rozwiazania z tej grupy:

- Kleene (funkcje częściowe)
- van Fraassen; superwaluacje

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Proponowane ważniejsze rozwiazania z tej grupy:

- Kleene (funkcje częściowe)
- van Fraassen; superwaluacje
- logiki częściowe

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Proponowane ważniejsze rozwiazania z tej grupy:

- Kleene (funkcje częściowe)
- van Fraassen; superwaluacje
- logiki częściowe

Uwaga! Do tej grupy można zaliczyć też **INT** i jego motywy odrzucenia prawa wyłączonego środka.

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Ad B.3. (zdania eliptyczne)

Ad B.3. (zdania eliptyczne)

Albo w nich brak pewnych elementów (np. relatywizacji, kwantyfikacji) albo są pozornie kompletne lecz zawierają wyrażenia okazjonalne. Zdania tego typu można uznać za pozbawione wartości logicznej, ale możliwe jest też przyjęcie relatywizmu co umieszcza je w grupie C.

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Ad B.4. (zdania z pustymi nazwami)

Ad B.4. (zdania z pustymi nazwami)

Do odrzucenia zasady 2-wartościowości prowadzi uznawanie zasady kompozycyjności znaczenia Fregego, głoszącej, że denotacja zdania jest funkcją denotacji jego składników. Zatem brak denotacji jakiegoś składnika zdania powoduje brak jego wartości logicznej – w szczególności problem zdań z nazwami pustymi.

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Ad B.4. (zdania z pustymi nazwami)

Do odrzucenia zasady 2-wartościowości prowadzi uznawanie zasady kompozycyjności znaczenia Fregego, głoszącej, że denotacja zdania jest funkcją denotacji jego składników. Zatem brak denotacji jakiegoś składnika zdania powoduje brak jego wartości logicznej – w szczególności problem zdań z nazwami pustymi.
Strawson, Geach: aby określić wartość logiczną zdania z nazwą muszą być spełnione 2 kryteria:

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Ad B.4. (zdania z pustymi nazwami)

Do odrzucenia zasady 2-wartościowości prowadzi uznawanie zasady kompozycyjności znaczenia Fregego, głoszącej, że denotacja zdania jest funkcją denotacji jego składników. Zatem brak denotacji jakiegoś składnika zdania powoduje brak jego wartości logicznej – w szczególności problem zdań z nazwami pustymi.
Strawson, Geach: aby określić wartość logiczną zdania z nazwą muszą być spełnione 2 kryteria:

- desygnat podmiotu istnieje

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Ad B.4. (zdania z pustymi nazwami)

Do odrzucenia zasady 2-wartościowości prowadzi uznawanie zasady kompozycyjności znaczenia Fregego, głoszącej, że denotacja zdania jest funkcją denotacji jego składników. Zatem brak denotacji jakiegoś składnika zdania powoduje brak jego wartości logicznej – w szczególności problem zdań z nazwami pustymi.
Strawson, Geach: aby określić wartość logiczną zdania z nazwą muszą być spełnione 2 kryteria:

- desygnat podmiotu istnieje
- desygnat ma (nie ma) odpowiednią cechę z orzecznika

Ad B.4. (zdania z pustymi nazwami)

Do odrzucenia zasady 2-wartościowości prowadzi uznawanie zasady kompozycyjności znaczenia Fregego, głoszącej, że denotacja zdania jest funkcją denotacji jego składników. Zatem brak denotacji jakiegoś składnika zdania powoduje brak jego wartości logicznej – w szczególności problem zdań z nazwami pustymi.
Strawson, Geach: aby określić wartość logiczną zdania z nazwą muszą być spełnione 2 kryteria:

- desygnat podmiotu istnieje
- desygnat ma (nie ma) odpowiednią cechę z orzecznika

Ogólniej: potrzebna logika presupozycji. Np. Smiley (także Woodruff) proponuje matryce Bochvara dla formalizacji logiki Fregego.

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Obrona 2-wartościowości:

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Obrona 2-wartościowości:

1. Russell – rozwiazanie Arystotelesowskie ale zmodyfikowane. U Arystotelesa mamy kryterium formalne: zdanie twierdzące jest 0 a przeczące jest 1, co prowadzi do paradoksalnego wniosku, ze np. "Sokrates jest chory"=0, a "Sokrates nie jest chory"=1. Poprawka Russella to uwzględnienie zasięgu negacji; zdanie drugie interpretujemy wtedy: Fałszem jest, że istnieje Sokrates i że jest chory.

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Obrona 2-wartościowości:

1. Russell – rozwiazanie Arystotelesowskie ale zmodyfikowane. U Arystotelesa mamy kryterium formalne: zdanie twierdzące jest 0 a przeczące jest 1, co prowadzi do paradoksalnego wniosku, ze np. "Sokrates jest chory"=0, a "Sokrates nie jest chory"=1. Poprawka Russella to uwzględnienie zasięgu negacji; zdanie drugie interpretujemy wtedy: Fałszem jest, że istnieje Sokrates i że jest chory.
2. Grodziński – wszystkie takie zdania są 0. Uwaga! – pada zasada, że zdania sprzeczne nie mogą być jednocześnie fałszywe, choć zostaje, że nie mogą być równocześnie prawdziwe. Jest to mocna interpretacja takich zdań (por. Kotarbiński) – w grę wchodzi też słaba interpretacja, przy której prawdę przypiszemy każdemu zdaniu, w którym nieistniejącemu obiektowi przypiszemy cechy definicyjne lub z nich wynikające, np. "Cyklop ma 1 oko"=1.

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Ad. B.5. (zdania literackie)

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Ad. B.5. (zdania literackie)

1. Świat przedstawiony

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Ad. B.5. (zdania literackie)

1. Świat przedstawiony
Problem konkretyzacji postaci literackich, które nie mają kompletnego opisu np.

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Ad. B.5. (zdania literackie)

1. Świat przedstawiony

Problem konkretyzacji postaci literackich, które nie mają kompletnego opisu np.

– "Odyseusz ma bliznę na udzie"=1

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Ad. B.5. (zdania literackie)

1. Świat przedstawiony

Problem konkretyzacji postaci literackich, które nie mają kompletnego opisu np.

– "Odyseusz ma bliznę na udzie"=1

– "Odyseusz jest wyższy od Diomedesa"=0

Ad. B.5. (zdania literackie)

1. Świat przedstawiony

Problem konkretyzacji postaci literackich, które nie mają kompletnego opisu np.

– "Odyseusz ma bliznę na udzie"=1

– "Odyseusz jest wyższy od Diomedesa"=0

– "Odyseusz ma pieprzyk na lewym pośladku"=?

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Ad. B.5. (zdania literackie)

1. Świat przedstawiony

Problem konkretyzacji postaci literackich, które nie mają kompletnego opisu np.

– "Odyseusz ma bliznę na udzie"=1

– "Odyseusz jest wyższy od Diomedesa"=0

– "Odyseusz ma pieprzyk na lewym pośladku"=?

Oczywiście takie rozróżnienia wartości logicznych są możliwe tylko przy odrzuceniu wyżej podanych rozwiązań dla zdań z nazwami pustymi – ewentualnie przy przyjęciu zmodyfikowanej teorii słabej interpretacji (zdanie=1 jeśli jest zgodne z opisem świata przedstawionego). Można jednak użyć przykładów literackich z nazwami niepustymi jeśli chcemy się uniezależnić od poprzednich rozważań.

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Ad. B.5. (zdania literackie)

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Ad. B.5. (zdania literackie)

2. Językowe składniki dzieła

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Ad. B.5. (zdania literackie)

2. Językowe składniki dzieła
Ingarden – quasi-sady. Zdania w literackich utworach nie mają podmiotowej intencji sądzenia, czyli asertywności, więc nie ma sensu oceniać ich pod względem ich logicznej wartości

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Ad. B.5. (zdania literackie)

2. Językowe składniki dzieła
Ingarden – quasi-sady. Zdania w literackich utworach nie mają podmiotowej intencji sądzenia, czyli asertywności, więc nie ma sensu oceniać ich pod względem ich logicznej wartości
(uwaga! tu mówi się o sądach – składnikach tekstu, a nie o zdaniach zewnętrznych dotyczących świata przedstawionego jak było wyżej).

Ad. B.5. (zdania literackie)

2. Językowe składniki dzieła
Ingarden – quasi-sady. Zdania w literackich utworach nie mają podmiotowej intencji sądzenia, czyli asertywności, więc nie ma sensu oceniać ich pod względem ich logicznej wartości
(uwaga! tu mówi się o sądach – składnikach tekstu, a nie o zdaniach zewnętrznych dotyczących świata przedstawionego jak było wyżej).
Strawson jeszcze bardziej radykalna teoria – nie tylko zdania literackie nie mają wartości logicznej, prawdziwe mogą być tylko twierdzenia (intencja asercji) a nie zdania jako takie (np. niemożliwe jest prawdziwe kłamstwo!).

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Ad B.6. (nonsensy)

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Ad B.6. (nonsensy)

Rozumienie waskie: mieszanie kategorii syntaktycznych lub semantycznych ("Pies liczyć albo", "liczba 3 jest różowa" – błędy kategorialne).

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Ad B.6. (nonsensy)

Rozumienie waskie: mieszanie kategorii syntaktycznych lub semantycznych ("Pies liczyć albo", "liczba 3 jest różowa" – błędy kategorialne).
Rozumienie szerokie: Hallden (oceny moralne), Aqvist (rozkazy), Goddard, Routley (wszystko co ani prawdziwe ani fałszywe) – pokłosie neopozytywizmu z jego ostrymi kryteriami sensu=weryfikowalności.

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Ad B.6. (nonsensy)

Rozumienie waskie: mieszanie kategorii syntaktycznych lub semantycznych ("Pies liczyć albo", "liczba 3 jest różowa" – błędy kategorialne).
Rozumienie szerokie: Hallden (oceny moralne), Aqvist (rozkazy), Goddard, Routley (wszystko co ani prawdziwe ani fałszywe) – pokłosie neopozytywizmu z jego ostrymi kryteriami sensu=weryfikowalności.
System Bochvara jako techniczna propozycja.

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Ad B.7. (twierdzenia mechaniki kwantowej)

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Ad B.7. (twierdzenia mechaniki kwantowej)

Reichenbach (1944, również Putnam) – projekt logiki wielowartościowej aby uniknąć tzw. anomalii przyczynowych, czyli zdań o mikroobiektach, które są sprzeczne z zasadami mechaniki klasycznej, a wyprowadzalne z pomocą logiki klasycznej.

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Ad B.7. (twierdzenia mechaniki kwantowej)

Reichenbach (1944, również Putnam) – projekt logiki wielowartościowej aby uniknąć tzw. anomalii przyczynowych, czyli zdań o mikroobiektach, które są sprzeczne z zasadami mechaniki klasycznej, a wyprowadzalne z pomocą logiki klasycznej.
Przykład: Nie można zarazem zmierzyć położenia i momentu pędu cząstki elementarnej, chociaż można zmierzyć każde z osobna.

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Ad B.7. (twierdzenia mechaniki kwantowej)

Reichenbach (1944, również Putnam) – projekt logiki wielowartościowej aby uniknąć tzw. anomalii przyczynowych, czyli zdań o mikroobiektach, które są sprzeczne z zasadami mechaniki klasycznej, a wyprowadzalne z pomocą logiki klasycznej.

Przykład: Nie można zarazem zmierzyć położenia i momentu pędu cząstki elementarnej, chociaż można zmierzyć każde z osobna.

Wg. Bohra i Heisenberga takie zdania są bezsensowne, wg. Reichenbacha są sensowne ale mają nieokreśloną wartość logiczną.

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

C. Zlepki

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

C. Zlepki

1. zdania z wyrażeniami nieostrymi

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

C. Zlepki

1. zdania z wyrażeniami nieostrymi
2. zdania mówiące o zmianie stanu rzeczy

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

C. Zlepki

1. zdania z wyrażeniami nieostrymi
2. zdania mówiące o zmianie stanu rzeczy
3. twierdzenia systemów dialektycznych

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

C. Zlepki

1. zdania z wyrażeniami nieostrymi
2. zdania mówiące o zmianie stanu rzeczy
3. twierdzenia systemów dialektycznych
4. zdania o obiektach sprzecznych

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

C. Zlepki

1. zdania z wyrażeniami nieostrymi
2. zdania mówiące o zmianie stanu rzeczy
3. twierdzenia systemów dialektycznych
4. zdania o obiektach sprzecznych
5. sprzeczne prawa

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

C. Zlepki

1. zdania z wyrażeniami nieostrymi
2. zdania mówiące o zmianie stanu rzeczy
3. twierdzenia systemów dialektycznych
4. zdania o obiektach sprzecznych
5. sprzeczne prawa
6. paradoksy samozwrotności

Ad. C.1. (zdania z wyrażeniami nieostrymi)

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Ad. C.1. (zdania z wyrażeniami nieostrymi)

Nie chodzi o dowolne zdania ale o zdania z przypadkami granicznymi, które zarazem mogą być odbierane jako prawdziwe bądź fałszywe przez różnych użytkowników. Może to prowadzić do relatywizmu lub do akceptacji istnienia zdań, które są zarazem prawdziwe i fałszywe.

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Ad. C.1. (zdania z wyrażeniami nieostrymi)

Nie chodzi o dowolne zdania ale o zdania z przypadkami granicznymi, które zarazem mogą być odbierane jako prawdziwe bądź fałszywe przez różnych użytkowników. Może to prowadzić do relatywizmu lub do akceptacji istnienia zdań, które są zarazem prawdziwe i fałszywe.

Ad. C.3. i C.4. (twierdzenia systemów dialektycznych o zdania o obiektach sprzecznych)

Ad. C.3. i C.4. (twierdzenia systemów dialektycznych o zdania o obiektach sprzecznych)

Tradycja dialektyczna (Heraklit – Hegel – Marx) stwierdzająca istnienie sprzeczności w rzeczywistości prowadzi do uznania odpowiadających im zdań jako zarazem prawdziwych i fałszywych.

Ad. C.3. i C.4. (twierdzenia systemów dialektycznych o zdania o obiektach sprzecznych)

Tradycja dialektyczna (Heraklit – Hegel – Marx) stwierdzająca istnienie sprzeczności w rzeczywistości prowadzi do uznania odpowiadających im zdań jako zarazem prawdziwych i fałszywych.
Tradycja Meinongowska uznająca istnienie obiektów sprzecznych zradykalizowana u Łukasiewicza (wątpliwe jest istnienie obiektów niesprzecznych).

Ad. C.5. (sprzeczne prawa)

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Ad. C.5. (sprzeczne prawa)

Nowe ustawy mogą być sprzeczne z innymi prawami w ramach tego samego systemu. Akceptacja sprzeczności prawnych wymaga przypisania im obu wartości logicznych.

Ad. C.5. (sprzeczne prawa)

Nowe ustawy mogą być sprzeczne z innymi prawami w ramach tego samego systemu. Akceptacja sprzeczności prawnych wymaga przypisania im obu wartości logicznych.

Ad. C.6. (paradoksy samozwrotnosci)

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Ad. C.5. (sprzeczne prawa)

Nowe ustawy mogą być sprzeczne z innymi prawami w ramach tego samego systemu. Akceptacja sprzeczności prawnych wymaga przypisania im obu wartości logicznych.
Ad. C.6. (paradoksy samozwrotnosci)
Przyjęcie, że wnioski z rozumowań paradoksalnych są zarazem prawdziwe i fałszywe jest uznawane za możliwy sposób ich rozwiązania.

Ad. C.5. (sprzeczne prawa)

Nowe ustawy mogą być sprzeczne z innymi prawami w ramach tego samego systemu. Akceptacja sprzeczności prawnych wymaga przypisania im obu wartości logicznych.
Ad. C.6. (paradoksy samozwrotnosci)
Przyjęcie, że wnioski z rozumowań paradoksalnych są zarazem prawdziwe i fałszywe jest uznawane za możliwy sposób ich rozwiązania.
Generalnie są to różne argumenty na rzecz dialetheizmu, stanowiska głoszącego, że są prawdziwe zdania sprzeczne, rozwiniętego w latach 90-tych przez G. Priesta.

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Ad. C.6. (paradoksy samozwrotnosci)

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Ad. C.6. (paradoksy samozwrotnosci)

Niezależny argument zarówno za wartościami-lukami jak i zlepkami pochodzi z badań nad AI (Belnap 1977). Dotyczy gromadzenia i przetwarzania informacji w systemach eksperckich.

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Ad. C.6. (paradoksy samozwrotnosci)

Niezależny argument zarówno za wartościami-lukami jak i zlepkami pochodzi z badań nad AI (Belnap 1977). Dotyczy gromadzenia i przetwarzania informacji w systemach eksperckich.
Dowolne zdanie może znaleźć się w bazie danych jako informacja o nieustalonej wartości (luka) lub jako zdanie kwalifikowane zarazem jako 1 i 0 (zlepek), gdyż pochodzące z różnych źródeł. Zatem potrzebna jest logika do przetwarzania wszelkich typów danych.

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Trójwartościowa logika Łukasiewicza $Ł_3$

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Trójwartościowa logika Łukasiewicza Ł$_3$

Przyjmujemy standardowy język zdaniowy z $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$. Wartościowanie V to funkcja ze zmiennych zdaniowych w zbiór $\{1, 0, 1/2\}$. V poszerzamy na dowolne formuły według poniższych definicji spójników w **Ł**$_3$

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Trójwartościowa logika Łukasiewicza Ł$_3$

Przyjmujemy standardowy język zdaniowy z $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$. Wartościowanie V to funkcja ze zmiennych zdaniowych w zbiór $\{1, 0, 1/2\}$. V poszerzamy na dowolne formuły według poniższych definicji spójników w **Ł**$_3$

$\wedge$	1	1/2	0	$\vee$	1	1/2	0
1	1	1/2	0	1	1	1	1
1/2	1/2	1/2	0	1/2	1	1/2	1/2
0	0	0	0	0	1	1/2	0

$\rightarrow$	1	1/2	0	φ	$\neg\varphi$
1	1	1/2	0	1	0
1/2	1	1	1/2	1/2	1/2
0	1	1	1	0	1

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Trójwartościowa logika Łukasiewicza Ł$_3$

Przyjmujemy standardowy język zdaniowy z $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$. Wartościowanie V to funkcja ze zmiennych zdaniowych w zbiór $\{1, 0, 1/2\}$. V poszerzamy na dowolne formuły według poniższych definicji spójników w **Ł**$_3$

$\wedge$	1	1/2	0	$\vee$	1	1/2	0
1	1	1/2	0	1	1	1	1
1/2	1/2	1/2	0	1/2	1	1/2	1/2
0	0	0	0	0	1	1/2	0

$\rightarrow$	1	1/2	0	φ	$\neg\varphi$
1	1	1/2	0	1	0
1/2	1	1	1/2	1/2	1/2
0	1	1	1	0	1

φ jest tautologią **Ł**$_3$ ($\models_{L_3} \varphi$) wtw $V(\varphi) = 1$ dla dowolnego V.

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Przykładowo:

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Przykładowo:

- $\not\models_{L_3} p \vee \neg p$, $\not\models_{L_3} \neg(p \wedge \neg p)$

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Przykładowo:

- $\not\models_{L_3} p \vee \neg p$, $\not\models_{L_3} \neg(p \wedge \neg p)$
- $\models_{L_3} (p \wedge q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$, ale

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Przykładowo:

- $\not\models_{L_3} p \vee \neg p$, $\not\models_{L_3} \neg(p \wedge \neg p)$
- $\models_{L_3} (p \wedge q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$, ale
  $\not\models_{L_3} (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \wedge q \rightarrow r)$

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Przykładowo:

- $\not\models_{L_3} p \vee \neg p$, $\not\models_{L_3} \neg(p \wedge \neg p)$
- $\models_{L_3} (p \wedge q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$, ale
  $\not\models_{L_3} (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \wedge q \rightarrow r)$
- $\models_{L_3} (p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$, ale

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Przykładowo:

- $\not\models_{L_3} p \vee \neg p$, $\not\models_{L_3} \neg(p \wedge \neg p)$
- $\models_{L_3} (p \wedge q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$, ale
  $\not\models_{L_3} (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \wedge q \rightarrow r)$
- $\models_{L_3} (p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$, ale
  $\not\models_{L_3} (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Przykładowo:

- $\not\models_{L_3} p \vee \neg p$, $\not\models_{L_3} \neg(p \wedge \neg p)$
- $\models_{L_3} (p \wedge q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$, ale $\not\models_{L_3} (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \wedge q \rightarrow r)$
- $\models_{L_3} (p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$, ale $\not\models_{L_3} (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$
- $\models_{L_3} p \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$ ale

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Przykładowo:

- $\not\models_{L_3} p \vee \neg p$, $\not\models_{L_3} \neg(p \wedge \neg p)$
- $\models_{L_3} (p \wedge q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$, ale
  $\not\models_{L_3} (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \wedge q \rightarrow r)$
- $\models_{L_3} (p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$, ale
  $\not\models_{L_3} (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$
- $\models_{L_3} p \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$ ale
  $\not\models_{L_3} p \wedge \neg p \rightarrow q$

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Przykładowo:

- $\not\models_{L_3} p \vee \neg p$, $\not\models_{L_3} \neg(p \wedge \neg p)$
- $\models_{L_3} (p \wedge q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$, ale
  $\not\models_{L_3} (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \wedge q \rightarrow r)$
- $\models_{L_3} (p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$, ale
  $\not\models_{L_3} (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$
- $\models_{L_3} p \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$ ale
  $\not\models_{L_3} p \wedge \neg p \rightarrow q$

Uwaga: $p \leftrightarrow \neg p$ nie jest kontrtautologią, co umożliwia rozwiązanie paradoksu Russella!

Modalności w $Ł_3$

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Modalności w Ł$_3$

Jednym z motywów wprowadzenia wielowartościowości przez Łukasiewicza było przekonanie o możliwości rekonstrukcji w takich rachunkach Arystotelesowskiej logiki modalnej. W **Ł**$_3$ modalności definiuje się następująco (I oznacza przygodność):

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Modalności w $Ł_3$

Jednym z motywów wprowadzenia wielowartościowości przez Łukasiewicza było przekonanie o możliwości rekonstrukcji w takich rachunkach Arystotelesowskiej logiki modalnej. W $\mathbf{Ł}_3$ modalności definiuje się następująco (I oznacza przygodność):

φ	$\Box\varphi$	$\Diamond\varphi$	$I\varphi$
1	1	1	0
1/2	0	1	1
0	0	0	0

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Modalności w Ł$_3$

Jednym z motywów wprowadzenia wielowartościowości przez Łukasiewicza było przekonanie o możliwości rekonstrukcji w takich rachunkach Arystotelesowskiej logiki modalnej. W **Ł**$_3$ modalności definiuje się następująco (I oznacza przygodność):

φ	$\Box\varphi$	$\Diamond\varphi$	$I\varphi$
1	1	1	0
1/2	0	1	1
0	0	0	0

Użycie I pozwala na formalne wyrażenie 3-wartościowości **Ł**$_3$; tautologiami są bowiem następujące warianty prawa wyłączonego środka i niesprzeczności:

$p \vee \neg p \vee Ip \quad \neg(p \wedge \neg p \wedge \neg Ip)$

Trójwartościowa logika Kleene'go K_3

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Trójwartościowa logika Kleene'go K_3

Język i wartościowania oraz definicje $\neg, \wedge, \vee$ jak w $\mathbf{Ł}_3$, natomiast implikacja ma następującą charakterystykę:

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Trójwartościowa logika Kleene'go K_3

Język i wartościowania oraz definicje $\neg, \wedge, \vee$ jak w **Ł**$_3$, natomiast implikacja ma następującą charakterystykę:

$\rightarrow$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1	1/2	1/2
0	1	1	1

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Trójwartościowa logika Kleene'go K_3

Język i wartościowania oraz definicje $\neg, \wedge, \vee$ jak w $\mathbf{Ł}_3$, natomiast implikacja ma następującą charakterystykę:

$\rightarrow$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1	1/2	1/2
0	1	1	1

Uwaga! $\mathbf{K}_3$ jest logiką z pustym zbiorem tautologii!

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Trójwartościowa logika Kleene'go K_3

Język i wartościowania oraz definicje $\neg, \wedge, \vee$ jak w $\mathbf{Ł}_3$, natomiast implikacja ma następującą charakterystykę:

$\rightarrow$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1	1/2	1/2
0	1	1	1

Uwaga! $\mathbf{K}_3$ jest logiką z pustym zbiorem tautologii!
Relację wynikania definiujemy następująco:

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Trójwartościowa logika Kleene'go K_3

Język i wartościowania oraz definicje $\neg, \wedge, \vee$ jak w **Ł**$_3$, natomiast implikacja ma następującą charakterystykę:

$\rightarrow$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1	1/2	1/2
0	1	1	1

Uwaga! **K**$_3$ jest logiką z pustym zbiorem tautologii!
Relację wynikania definiujemy następująco:
$\Gamma \models_{K_3} \varphi$ wtw dla dowolnego V, jeżeli $V(\Gamma) = 1$, to $V(\varphi) = 1$

Trójwartościowa logika Bochvara B_3

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Trójwartościowa logika Bochvara B_3

Trzecia wartość oznacza brak sensu.

Trójwartościowa logika Bochvara B_3

Trzecia wartość oznacza brak sensu.

$\wedge$	1	1/2	0	$\vee$	1	1/2	0
1	1	1/2	0	1	1	1/2	1
1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2
0	0	1/2	0	0	1	1/2	0

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Trójwartościowa logika Bochvara B_3

Trzecia wartość oznacza brak sensu.

$\wedge$	1	1/2	0	$\vee$	1	1/2	0
1	1	1/2	0	1	1	1/2	1
1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2
0	0	1/2	0	0	1	1/2	0

$\rightarrow$	1	1/2	0	φ	$\neg\varphi$
1	1	1/2	0	1	0
1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2
0	1	1/2	1	0	1

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Trójwartościowa logika Bochvara B_3

Trzecia wartość oznacza brak sensu.

$\wedge$	1	1/2	0	$\vee$	1	1/2	0
1	1	1/2	0	1	1	1/2	1
1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2
0	0	1/2	0	0	1	1/2	0

$\rightarrow$	1	1/2	0	φ	$\neg\varphi$
1	1	1/2	0	1	0
1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2
0	1	1/2	1	0	1

Logika B_3 ma również pusty zbiór tautologii. Dla relacji wynikania zachodzi następujące twierdzenie o relewancji:

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Trójwartościowa logika Bochvara B_3

Trzecia wartość oznacza brak sensu.

$\wedge$	1	1/2	0	$\vee$	1	1/2	0
1	1	1/2	0	1	1	1/2	1
1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2
0	0	1/2	0	0	1	1/2	0

$\rightarrow$	1	1/2	0	φ	$\neg\varphi$
1	1	1/2	0	1	0
1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2
0	1	1/2	1	0	1

Logika B_3 ma również pusty zbiór tautologii. Dla relacji wynikania zachodzi następujące twierdzenie o relewancji:
Dla dowolnego niesprzecznego Γ: $\Gamma \models_{B_3} \varphi$ wtw $\Gamma \models_{KRZ} \varphi$ i $ZZ(\varphi) \subseteq ZZ(\Gamma)$

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Etykietowane diagramy Betha

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Etykietowane diagramy Betha

Przyjmijmy cztery typy etykiet przed formułami odpowiadające wybranym zbiorom wartości logicznych:

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Etykietowane diagramy Betha

Przyjmijmy cztery typy etykiet przed formułami odpowiadające wybranym zbiorom wartości logicznych:

$+$ oznacza $\{1\}$ $\quad(+)$ oznacza $\{1, 1/2\}$

$-$ oznacza $\{0\}$ $\quad(-)$ oznacza $\{0, 1/2\}$

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Konwencje zapisu:

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Konwencje zapisu:

α	α_1	α_2	β	β_1	β_2
$+\varphi \wedge \psi$	$+\varphi$	$+\psi$	$-\varphi \wedge \psi$	$-\varphi$	$-\psi$
$-\varphi \vee \psi$	$-\varphi$	$-\psi$	$+\varphi \vee \psi$	$+\varphi$	$+\psi$
$-\varphi \rightarrow \psi$	$+\varphi$	$-\psi$	$+\varphi \rightarrow \psi$	$-\varphi$	$+\psi$
$(+)\varphi \wedge \psi$	$(+)\varphi$	$(+)\psi$	$(-)\varphi \wedge \psi$	$(-)\varphi$	$(-)\psi$
$(-)\varphi \vee \psi$	$(-)\varphi$	$(-)\psi$	$(+)\varphi \vee \psi$	$(+)\varphi$	$(+)\psi$
$(-)\varphi \rightarrow \psi$	$(+)\varphi$	$(-)\psi$	$(+)\varphi \rightarrow \psi$	$(-)\varphi$	$(+)\psi$

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Konwencje zapisu:

α	α_1	α_2	β	β_1	β_2
$+\varphi \wedge \psi$	$+\varphi$	$+\psi$	$-\varphi \wedge \psi$	$-\varphi$	$-\psi$
$-\varphi \vee \psi$	$-\varphi$	$-\psi$	$+\varphi \vee \psi$	$+\varphi$	$+\psi$
$-\varphi \rightarrow \psi$	$+\varphi$	$-\psi$	$+\varphi \rightarrow \psi$	$-\varphi$	$+\psi$
$(+)\varphi \wedge \psi$	$(+)\varphi$	$(+)\psi$	$(-)\varphi \wedge \psi$	$(-)\varphi$	$(-)\psi$
$(-)\varphi \vee \psi$	$(-)\varphi$	$(-)\psi$	$(+)\varphi \vee \psi$	$(+)\varphi$	$(+)\psi$
$(-)\varphi \rightarrow \psi$	$(+)\varphi$	$(-)\psi$	$(+)\varphi \rightarrow \psi$	$(-)\varphi$	$(+)\psi$

Intuicyjnie $+\varphi$ oznacza, że φ jest prawdziwe, $-\varphi$, że φ jest fałszywe, $(+)\varphi$ oznacza, że φ jest prawdziwe lub nieokreślone, a $(-)\varphi$, że φ jest fałszywe lub nieokreślone.

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Reguły dla K_3

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Reguły dla K_3

$(\bot)$	$+\varphi,\ -\varphi\ /\ \bot;$	$+\varphi,\ (-)\varphi\ /\ \bot;$
	$(+)\varphi,\ -\varphi\ /\ \bot$	
$(\neg)$	$+\neg\varphi\ /\ -\varphi;$	$-\neg\varphi\ /\ +\varphi;$
	$(+)\neg\varphi\ /\ (-)\varphi;$	$(-)\neg\varphi\ /\ (+)\varphi$
(α)	$\alpha\ /\ \alpha_1,\ \alpha_2;$	$(\beta)\ \beta\ /\ \beta_1\ \mid\ \beta_2$

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Reguły dla K_3

$$
\begin{array}{lll}
(\bot) & +\varphi,\ -\varphi\ /\ \bot; & +\varphi,\ (-)\varphi\ /\ \bot; \\
 & (+)\varphi,\ -\varphi\ /\ \bot & \\
(\neg) & +\neg\varphi\ /\ -\varphi; & -\neg\varphi\ /\ +\varphi; \\
 & (+)\neg\varphi\ /\ (-)\varphi; & (-)\neg\varphi\ /\ (+)\varphi \\
(\alpha) & \alpha\ /\ \alpha_1,\ \alpha_2; & (\beta)\ \beta\ /\ \beta_1\ \mid\ \beta_2
\end{array}
$$

Uwaga! $(+)\varphi$ i $(-)\varphi$ nie dają sprzeczności

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Reguły dla K_3

$(\bot)$ $\quad +\varphi, -\varphi \,/\, \bot; \quad +\varphi, (-)\varphi \,/\, \bot;$

$\quad (+)\varphi, -\varphi \,/\, \bot$

$(\neg)$ $\quad +\neg\varphi \,/\, -\varphi; \quad -\neg\varphi \,/\, +\varphi;$

$\quad (+)\neg\varphi \,/\, (-)\varphi; \quad (-)\neg\varphi \,/\, (+)\varphi$

(α) $\quad \alpha \,/\, \alpha_1,\ \alpha_2; \quad (\beta)\ \beta \,/\, \beta_1 \mid \beta_2$

Uwaga! $(+)\varphi$ i $(-)\varphi$ nie dają sprzeczności

$\psi_1, \ldots, \psi_n /\varphi$ ma dowód w **K**$_3$-EDB wtw istnieje zamknięte drzewo dla $\{+\psi_1, \ldots, +\psi_n, (-)\varphi\}$ zbudowane z użyciem reguł wyżej podanych.

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Reguły dla K_3

$(\bot)$	$+\varphi,\ -\varphi\ /\ \bot$;	$+\varphi,\ (-)\varphi\ /\ \bot$;
	$(+)\varphi,\ -\varphi\ /\ \bot$	
$(\neg)$	$+\neg\varphi\ /\ -\varphi$;	$-\neg\varphi\ /\ +\varphi$;
	$(+)\neg\varphi\ /\ (-)\varphi$;	$(-)\neg\varphi\ /\ (+)\varphi$
(α)	$\alpha\ /\ \alpha_1,\ \alpha_2$;	$(\beta)\ \beta\ /\ \beta_1\ \mid\ \beta_2$

Uwaga! $(+)\varphi$ i $(-)\varphi$ nie dają sprzeczności

$\psi_1, \ ..., \ \psi_n \ /\varphi$ ma dowód w $\mathbf{K}_3$-EDB wtw istnieje zamknięte drzewo dla $\{+\psi_1, \ ..., \ +\psi_n, \ (-)\varphi\}$ zbudowane z użyciem reguł wyżej podanych.

Adekwatność etykietowanych diagramów Betha

Twierdzenie (Mocna adekwatność):

$\Gamma \models \varphi$ *wtw*, $\psi_1, \ ..., \ \psi_n \ /\varphi$ ma dowód w $\mathbf{K}_3$-EDB, gdzie $\{\psi_1, ..., \psi_n\} \subseteq \Gamma$

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Przykłady

$\not\models_{K_3} (p \rightarrow q) \wedge \neg q \rightarrow \neg p$ ale

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Przykłady

$\not\models_{K_3} (p \rightarrow q) \wedge \neg q \rightarrow \neg p$ ale

$p \rightarrow q, \neg q \models_{K_3} \neg p$; $(p \rightarrow q) \wedge \neg q \models_{K_3} \neg p$; $p \rightarrow q \models_{K_3} \neg q \rightarrow \neg p$

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Przykłady

$\not\models_{K_3} (p \to q) \land \neg q \to \neg p$ ale

$p \to q, \neg q \models_{K_3} \neg p$; $(p \to q) \land \neg q \models_{K_3} \neg p$; $p \to q \models_{K_3} \neg q \to \neg p$

$(-)(p \to q) \land \neg q \to \neg p$

$(+)(p \to q) \land \neg q$

$(-)\neg p$

$(+)p \to q$

$(+)\neg q$

$(+)p$

$(-)q$

$(-)p \quad (+)q$

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Przykłady:

$+p \to q$

$+\neg q$

$(-)\neg p$

$-q$

$(+)p$

$$\begin{array}{cc} -p & +q \\ \bot & \bot \end{array}$$

Reguły dla Ł$_3$

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Reguły dla $Ł_3$

Dla $\bot, \neg, \wedge, \vee$ jak w $\mathbf{K}_3$. Dla implikacji z $-$ i z $(+)$ tak samo, natomiast dla $+$ i $(-)$ mamy następujące reguły:

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Reguły dla $Ł_3$

Dla $\bot, \neg, \wedge, \vee$ jak w $\mathbf{K}_3$. Dla implikacji z $-$ i z $(+)$ tak samo, natomiast dla $+$ i $(-)$ mamy następujące reguły:
$(+\rightarrow)$ $+\varphi \rightarrow \psi$ / $(-)\varphi,\ (+)\psi \ \mid\ +\varphi,\ +\psi \ \mid\ -\varphi,\ -\psi$

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Reguły dla Ł$_3$

Dla $\bot, \neg, \wedge, \vee$ jak w $\mathbf{K}_3$. Dla implikacji z $-$ i z $(+)$ tak samo, natomiast dla $+$ i $(-)$ mamy następujące reguły:

$(+\rightarrow)$ $+\varphi \rightarrow \psi$ / $(-)\varphi,\ (+)\psi \mid +\varphi,\ +\psi \mid -\varphi,\ -\psi$

$((-)\rightarrow)$ $(-)\varphi \rightarrow \psi$ / $+\varphi,\ (-)\psi \mid (+)\varphi,\ -\psi$

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Reguły dla $Ł_3$

Dla $\bot, \neg, \wedge, \vee$ jak w $\mathbf{K}_3$. Dla implikacji z $-$ i z $(+)$ tak samo, natomiast dla $+$ i $(-)$ mamy następujące reguły:

$(+\rightarrow)$ $+\varphi \rightarrow \psi$ / $(-)\varphi,\ (+)\psi\ \mid\ +\varphi,\ +\psi\ \mid\ -\varphi,\ -\psi$

$((-)\rightarrow)$ $(-)\varphi \rightarrow \psi$ / $+\varphi,\ (-)\psi\ \mid\ (+)\varphi,\ -\psi$

$\psi_1,\ \ldots,\ \psi_n\ /\varphi$ ma dowód w $\mathbf{Ł}_3$-EDB wtw istnieje zamknięte drzewo dla $\{+\psi_1,\ \ldots,\ +\psi_n,\ (-)\varphi\}$ zbudowane z użyciem reguł wyżej podanych.

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Reguły dla Ł$_3$

Dla $\bot, \neg, \wedge, \vee$ jak w $\mathbf{K}_3$. Dla implikacji z $-$ i z $(+)$ tak samo, natomiast dla $+$ i $(-)$ mamy następujące reguły:

$(+\rightarrow)$ $+\varphi \rightarrow \psi$ / $(-)\varphi$, $(+)\psi$ | $+\varphi$, $+\psi$ | $-\varphi$, $-\psi$

$((-)\rightarrow)$ $(-)\varphi \rightarrow \psi$ / $+\varphi$, $(-)\psi$ | $(+)\varphi$, $-\psi$

$\psi_1, \ldots, \psi_n /\varphi$ ma dowód w **Ł**$_3$-EDB wtw istnieje zamknięte drzewo dla $\{+\psi_1, \ldots, +\psi_n, (-)\varphi\}$ zbudowane z użyciem reguł wyżej podanych.

Adekwatność etykietowanych diagramów Betha

Twierdzenie (Mocna adekwatność):

$\Gamma \models \varphi$ *wtw*, $\psi_1, \ldots, \psi_n /\varphi$ ma dowód w **Ł**$_3$-EDB, gdzie $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \subseteq \Gamma$

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Przykłady

$\models_{L_3} p \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$ ale

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Przykłady

$\models_{L_3} p \to (\neg p \to q)$ ale
$\not\models_{L_3} p \wedge \neg p \to q$

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Przykłady

$\models_{L_3} p \to (\neg p \to q)$ ale

$\not\models_{L_3} p \wedge \neg p \to q$

$$
\begin{array}{ccc}
\multicolumn{3}{c}{(-)p \to (\neg p \to q)} \\
\multicolumn{2}{c}{/} & \backslash \\
\multicolumn{2}{l}{+p} & (+)p \\
\multicolumn{2}{l}{(-)\ \neg p \to q} & -\neg p \to q \\
/ & \backslash & +\neg p \\
+\neg p & (+)\neg p & -q \\
(-)q & -q & -p \\
-p & (-)p & \bot \\
\bot & \bot &
\end{array}
$$

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Przykłady

$$
\begin{array}{ll}
\multicolumn{2}{c}{(-)p \wedge \neg p \to q} \\
\diagup & \diagdown \\
+p \wedge \neg p & (+)p \wedge \neg p \\
(-)q & -q \\
+p & (+)p \\
+\neg p & (+)\neg p \\
-p & (-)p \\
\perp &
\end{array}
$$

Ogólne ujęcie logik wielowartościowych

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Ogólne ujęcie logik wielowartościowych

Matryca to struktura postaci $\mathfrak{M} = \langle A, O, D \rangle$, gdzie:

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Ogólne ujęcie logik wielowartościowych

Matryca to struktura postaci $\mathfrak{M} = \langle A, O, D \rangle$, gdzie:
A to niepusty zbiór wartości logicznych

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Ogólne ujęcie logik wielowartościowych

Matryca to struktura postaci $\mathfrak{M} = \langle A, O, D \rangle$, gdzie:
A to niepusty zbiór wartości logicznych
O to niepusty zbiór operacji zdefiniowanych na A, które odpowiadają spójnikom

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Ogólne ujęcie logik wielowartościowych

Matryca to struktura postaci $\mathfrak{M} = \langle A, O, D \rangle$, gdzie:
A to niepusty zbiór wartości logicznych
O to niepusty zbiór operacji zdefiniowanych na A, które odpowiadają spójnikom
$D \subset A$ to niepusty zbiór wyróżnionych wartości logicznych (niekoniecznie $\{1\}$!)

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Ogólne ujęcie logik wielowartościowych

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Ogólne ujęcie logik wielowartościowych

Para $\mathcal{A} = \langle A, O \rangle$ z danej matrycy, zawierająca operacje odpowiadające każdemu spójnikowi danego języka to algebra podobna do tego języka.

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Ogólne ujęcie logik wielowartościowych

Para $\mathcal{A} = \langle A, O \rangle$ z danej matrycy, zawierająca operacje odpowiadające każdemu spójnikowi danego języka to algebra podobna do tego języka. Dowolny homomorfizm $h : FOR \longrightarrow \mathcal{A}$ to interpretacja języka w tej matrycy. Zawartość matrycy $E(\mathfrak{M})$ definiujemy następująco:

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Ogólne ujęcie logik wielowartościowych

Para $\mathcal{A} = \langle A, O \rangle$ z danej matrycy, zawierająca operacje odpowiadające każdemu spójnikowi danego języka to algebra podobna do tego języka. Dowolny homomorfizm $h : FOR \longrightarrow \mathcal{A}$ to interpretacja języka w tej matrycy. Zawartość matrycy $E(\mathfrak{M})$ definiujemy następująco:
$E(\mathfrak{M}) = \{\varphi : h(\varphi) \in D$, dla dowolnego homomorfizmu $h\}$

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Ogólne ujęcie logik wielowartościowych

Para $\mathcal{A} = \langle A, O \rangle$ z danej matrycy, zawierająca operacje odpowiadające każdemu spójnikowi danego języka to algebra podobna do tego języka. Dowolny homomorfizm $h : FOR \longrightarrow \mathcal{A}$ to interpretacja języka w tej matrycy. Zawartość matrycy $E(\mathfrak{M})$ definiujemy następująco:
$E(\mathfrak{M}) = \{\varphi : h(\varphi) \in D$, dla dowolnego homomorfizmu $h\}$
Jeżeli zawartość matrycy $\mathfrak{M}$ jest identyczna ze zbiorem tautologii logiki **L**, to mówimy, że matryca ta wyznacza logikę **L** (jest adekwatna).

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Ogólne ujęcie logik wielowartościowych

Ogólne ujęcie logik wielowartościowych

Dla danej matrycy relacja konsekwencji matrycowej jest definiowana następująco:

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Ogólne ujęcie logik wielowartościowych

Dla danej matrycy relacja konsekwencji matrycowej jest definiowana następująco:
$\Gamma \models_M \varphi$ wtw dla dowolnego homomorfizmu h: jeżeli $h(\Gamma) \subseteq D$, to $h(\varphi) \in D$

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Ogólne ujęcie logik wielowartościowych

Dla danej matrycy relacja konsekwencji matrycowej jest definiowana następująco:
$\Gamma \models_M \varphi$ wtw dla dowolnego homomorfizmu h: jeżeli $h(\Gamma) \subseteq D$, to $h(\varphi) \in D$
Przykładowo matryca dla $\mathbf{K}_3$ to $\mathfrak{M}_1^3$, gdzie $A = \{0, 1/2, 1\}$, $D = \{1\}$, a O zawiera jednoargumentową operację $\underline{\neg} : A \longrightarrow A$ i dwuargumentowe operacje $\odot : A \times A \longrightarrow A$, gdzie $\odot \in \{\underline{\wedge}, \underline{\vee}, \underline{\rightarrow}\}$. Operacje są zdefiniowane podanymi wyżej tabelkami. Matryca dla 3-wartościowej logiki Łukasiewicza różni się jedynie definicją operacji $\underline{\rightarrow}$.

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Ogólne ujęcie logik wielowartościowych

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Ogólne ujęcie logik wielowartościowych

Jeżeli przyjmiemy naturalny porządek na wartościach logicznych odpowiadający porządkowi liczb wymiernych, to operacje w matrycy dla $\mathbf{Ł}_3$ można zdefiniować następująco:

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Ogólne ujęcie logik wielowartościowych

Jeżeli przyjmiemy naturalny porządek na wartościach logicznych odpowiadający porządkowi liczb wymiernych, to operacje w matrycy dla $\mathbf{Ł}_3$ można zdefiniować następująco:

$\neg x = 1 - x$

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Ogólne ujęcie logik wielowartościowych

Jeżeli przyjmiemy naturalny porządek na wartościach logicznych odpowiadający porządkowi liczb wymiernych, to operacje w matrycy dla $\mathbf{Ł}_3$ można zdefiniować następująco:

$\underline{\neg} x = 1 - x$

$x \underline{\triangle} y = min(x, y)$

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Ogólne ujęcie logik wielowartościowych

Jeżeli przyjmiemy naturalny porządek na wartościach logicznych odpowiadający porządkowi liczb wymiernych, to operacje w matrycy dla $\mathbf{Ł}_3$ można zdefiniować następująco:

$\underline{\neg} x = 1 - x$

$x \underline{\wedge} y = min(x, y)$

$x \underline{\vee} y = max(x, y)$

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Ogólne ujęcie logik wielowartościowych

Jeżeli przyjmiemy naturalny porządek na wartościach logicznych odpowiadający porządkowi liczb wymiernych, to operacje w matrycy dla $\mathbf{Ł}_3$ można zdefiniować następująco:

$\underline{\neg} x = 1 - x$

$x \underline{\wedge} y = min(x, y)$

$x \underline{\vee} y = max(x, y)$

$x \underline{\rightarrow} y = min(1, 1 - x + y)$

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Ogólne ujęcie logik wielowartościowych

Jeżeli przyjmiemy naturalny porządek na wartościach logicznych odpowiadający porządkowi liczb wymiernych, to operacje w matrycy dla $\mathbf{Ł}_3$ można zdefiniować następująco:

$\underline{\neg} x = 1 - x$

$x \underline{\wedge} y = min(x, y)$

$x \underline{\vee} y = max(x, y)$

$x \underline{\rightarrow} y = min(1, 1 - x + y)$

Ma to znaczenie przy uogólnieniach na większą liczbę wartości logicznych, gdyż jedyne co ulega zmianie, to A. Np. dla dowolnej logiki n-wartościowej o skończonej liczbie wartości $A = \{0, 1/n - 1, 2/n - 1, ..., 1\}$.

Dygresja: parakonsystencja w logikach trójwartościowych

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Dygresja: parakonsystencja w logikach trójwartościowych

1. Logika **LP** (logika paradoksu) Priesta wyznaczona przez matrycę $\mathfrak{M}_2^3$, gdzie $A = \{0, 1/2, 1\}$, $D = \{1, 1/2\}$, O zawiera operacje zdefiniowane identycznie jak w matrycy $\mathfrak{M}_1^3$ wyznaczającej $\mathbf{K}_3$.

Dygresja: parakonsystencja w logikach trójwartościowych

1. Logika **LP** (logika paradoksu) Priesta wyznaczona przez matrycę $\mathfrak{M}_2^3$, gdzie $A = \{0, 1/2, 1\}$, $D = \{1, 1/2\}$, O zawiera operacje zdefiniowane identycznie jak w matrycy $\mathfrak{M}_1^3$ wyznaczającej $\mathbf{K}_3$.
W przeciwieństwie do rozważanych dotąd logik 1/2 interpretujemy tutaj jako zlepek (zarazem prawdziwe i fałszywe). Poszerzenie zbioru wartości wyróżnionych o 1/2 powoduje, że w przeciwieństwie do K_3 zbiór tautologii **LP** jest niepusty. Np. $\models_{LP} p \vee \neg p$.

Dygresja: parakonsystencja w logikach trójwartościowych

Dygresja: parakonsystencja w logikach trójwartościowych

Parakonsystencja w **LP** ma jedynie częściowy wyraz: $p \wedge \neg p \not\models_{LP} q$ (chociaż w $\mathbf{K}_3$ wynikanie zachodzi), ale $\models_{LP} p \wedge \neg p \rightarrow q$!

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Dygresja: parakonsystencja w logikach trójwartościowych

Parakonsystencja w **LP** ma jedynie częściowy wyraz: $p \wedge \neg p \not\models_{LP} q$ (chociaż w $\mathbf{K}_3$ wynikanie zachodzi), ale $\models_{LP} p \wedge \neg p \rightarrow q$!
Podstawowa wada **LP** – nieintuicyjne własności $\rightarrow$, np. ani MP ani SH nie są poprawnymi regułami.

Dygresja: parakonsystencja w logikach trójwartościowych

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Dygresja: parakonsystencja w logikach trójwartościowych

2. **RM**$_3$ – logika wyznaczona przez matrycę $\mathfrak{M}_2^{3\prime}$, gdzie $A = \{0, 1/2, 1\}$, $D = \{1, 1/2\}$, O zawiera operacje zdefiniowane identycznie jak w matrycy $\mathfrak{M}_2^3$ z wyjątkiem definicji implikacji.

Dygresja: parakonsystencja w logikach trójwartościowych

2. **RM**$_3$ – logika wyznaczona przez matrycę $\mathfrak{M}_2^{3\prime}$, gdzie $A = \{0, 1/2, 1\}$, $D = \{1, 1/2\}$, O zawiera operacje zdefiniowane identycznie jak w matrycy $\mathfrak{M}_2^3$ z wyjątkiem definicji implikacji.

$\rightarrow$	1	1/2	0
1	1	0	0
1/2	1	1/2	0
0	1	1	1

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Dygresja: parakonsystencja w logikach trójwartościowych

2. **RM**$_3$ – logika wyznaczona przez matrycę $\mathfrak{M}_2^{3\prime}$, gdzie $A = \{0, 1/2, 1\}$, $D = \{1, 1/2\}$, O zawiera operacje zdefiniowane identycznie jak w matrycy $\mathfrak{M}_2^3$ z wyjątkiem definicji implikacji.

$\to$	1	1/2	0
1	1	0	0
1/2	1	1/2	0
0	1	1	1

Zmiana definicji implikacji pozwala ocalić jej podstawowe własności (zachodzi zarówno MP jak i SH oraz definiowalność $\to$ przez $\vee$ i $\neg$).

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Dygresja: parakonsystencja w logikach trójwartościowych

2. **RM**$_3$ – logika wyznaczona przez matrycę $\mathfrak{M}_2^{3}{}'$, gdzie $A = \{0, 1/2, 1\}$, $D = \{1, 1/2\}$, O zawiera operacje zdefiniowane identycznie jak w matrycy $\mathfrak{M}_2^3$ z wyjątkiem definicji implikacji.

$\to$	1	1/2	0
1	1	0	0
1/2	1	1/2	0
0	1	1	1

Zmiana definicji implikacji pozwala ocalić jej podstawowe własności (zachodzi zarówno MP jak i SH oraz definiowalność $\to$ przez $\vee$ i $\neg$).
RM$_3$ mocniej wyraża parakonsystencję, gdyż $p \wedge \neg p \to q$ nie jest tautologią tej logiki.

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Dygresja: parakonsystencja w logikach trójwartościowych

2. **RM**$_3$ – logika wyznaczona przez matrycę $\mathfrak{M}_2^{3}{}'$, gdzie $A = \{0, 1/2, 1\}$, $D = \{1, 1/2\}$, O zawiera operacje zdefiniowane identycznie jak w matrycy $\mathfrak{M}_2^3$ z wyjątkiem definicji implikacji.

$\rightarrow$	1	1/2	0
1	1	0	0
1/2	1	1/2	0
0	1	1	1

Zmiana definicji implikacji pozwala ocalić jej podstawowe własności (zachodzi zarówno MP jak i SH oraz definiowalność $\rightarrow$ przez $\vee$ i $\neg$).
RM$_3$ mocniej wyraża parakonsystencję, gdyż $p \wedge \neg p \rightarrow q$ nie jest tautologią tej logiki.
RM$_3$ jest podlogiką relewantnej logiki **RM**.

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Dygresja: parakonsystencja w logikach trójwartościowych

Dygresja: parakonsystencja w logikach trójwartościowych

3. Logika DaCosty $\mathbf{J}_3$ – wyznaczona przez matrycę $\mathfrak{M}_2^{3''}$, gdzie $A = \{0, 1/2, 1\}$, $D = \{1, 1/2\}$, O zawiera operacje zdefiniowane identycznie jak w matrycy $\mathfrak{M}_2^3$ z wyjątkiem definicji implikacji.

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Dygresja: parakonsystencja w logikach trójwartościowych

3. Logika DaCosty $\mathbf{J}_3$ – wyznaczona przez matrycę $\mathfrak{M}_2^{3}$", gdzie $A = \{0, 1/2, 1\}$, $D = \{1, 1/2\}$, O zawiera operacje zdefiniowane identycznie jak w matrycy $\mathfrak{M}_2^3$ z wyjątkiem definicji implikacji.

$\rightarrow$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1	1/2	0
0	1	1	1

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Dygresja: parakonsystencja w logikach trójwartościowych

3. Logika DaCosty $\mathbf{J}_3$ – wyznaczona przez matrycę $\mathfrak{M}_2^{3}$", gdzie $A = \{0, 1/2, 1\}$, $D = \{1, 1/2\}$, O zawiera operacje zdefiniowane identycznie jak w matrycy $\mathfrak{M}_2^3$ z wyjątkiem definicji implikacji.

$\rightarrow$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1	1/2	0
0	1	1	1

$\mathbf{J}_3$ to próba formalnego ujęcia intuicji Jaśkowskiego wyrażonych w jego projekcie logiki dyskusyjnej.

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Dwa w jednym: 4-wartościowa logika Belnapa

Dwa w jednym: 4-wartościowa logika Belnapa

Podstawowa intuicja: rozwinąć logikę, w której oprócz klasycznych wartości 1 i 0 mamy wartość odpowiadającą brakowi wartości (luka) i obu wartościom klasycznym łącznie (zlepek) Niech $\perp$ oznacza lukę a $\top$ oznacza zlepek. Wartości wyróżnione to 1 i $\top$. B_4 jest wyznaczona przez matrycę $\mathfrak{M}_2^4$, gdzie $A = \{0, \perp, \top, 1\}$, $D = \{1, \top\}$, O zawiera operacje zdefiniowane następująco:

Dwa w jednym: 4-wartościowa logika Belnapa

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Dwa w jednym: 4-wartościowa logika Belnapa

$\wedge$	1	$\top$	$\bot$	0	$\vee$	1	$\top$	$\bot$	0
1	1	$\top$	$\bot$	0	1	1	1	1	1
$\top$	$\top$	$\top$	0	0	$\top$	1	$\top$	1	$\top$
$\bot$	$\bot$	0	$\bot$	0	$\bot$	1	1	$\bot$	$\bot$
0	0	0	0	0	0	1	$\top$	$\bot$	0

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Dwa w jednym: 4-wartościowa logika Belnapa

$\wedge$	1	$\top$	$\bot$	0	$\vee$	1	$\top$	$\bot$	0
1	1	$\top$	$\bot$	0	1	1	1	1	1
$\top$	$\top$	$\top$	0	0	$\top$	1	$\top$	1	$\top$
$\bot$	$\bot$	0	$\bot$	0	$\bot$	1	1	$\bot$	$\bot$
0	0	0	0	0	0	1	$\top$	$\bot$	0

$\rightarrow$	1	$\top$	$\bot$	0	φ	$\neg\varphi$
1	1	$\top$	$\bot$	0	1	0
$\top$	1	$\top$	$\bot$	0	$\top$	$\top$
$\bot$	1	1	1	1	$\bot$	$\bot$
0	1	1	1	1	0	1

Dwa w jednym: 4-wartościowa logika Belnapa

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Dwa w jednym: 4-wartościowa logika Belnapa

Krata prawdy z porządkiem $\leq_t$ (kres górny to 1 a dolny to 0) i krata wiedzy z porządkiem $\leq_k$ (kres górny to $\top$, a dolny to $\perp$).

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Dwa w jednym: 4-wartościowa logika Belnapa

Krata prawdy z porządkiem $\leq_t$ (kres górny to 1 a dolny to 0) i krata wiedzy z porządkiem $\leq_k$ (kres górny to $\top$, a dolny to $\bot$).

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & 1 & \\ \top \arrow[ur, dash] & & \bot \arrow[ul, dash] \\ & 0 \arrow[ul, dash] \arrow[ur, dash] & \end{tikzcd}$$

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Dwa w jednym: 4-wartościowa logika Belnapa

Krata prawdy z porządkiem $\leq_t$ (kres górny to 1 a dolny to 0) i krata wiedzy z porządkiem $\leq_k$ (kres górny to $\top$, a dolny to $\bot$).

$$\begin{tikzcd} & 1 & \\ \top \arrow[ur, dash] & & \bot \arrow[ul, dash] \\ & 0 \arrow[ul, dash] \arrow[ur, dash] & \end{tikzcd}$$

$\Gamma \models_{B_4} \varphi$ wtw dla dowolnego homomorfizmu h: jeżeli $h(\Gamma) \subseteq D$, to $h(\varphi) \in D$

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Dwa w jednym: 4-wartościowa logika Belnapa

Krata prawdy z porządkiem $\leq_t$ (kres górny to 1 a dolny to 0) i krata wiedzy z porządkiem $\leq_k$ (kres górny to $\top$, a dolny to $\bot$).

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & 1 & \\
\top \arrow[ur, dash] & & \bot \arrow[ul, dash] \\
 & 0 \arrow[ul, dash] \arrow[ur, dash] &
\end{tikzcd}$$

$\Gamma \models_{B_4} \varphi$ wtw dla dowolnego homomorfizmu h: jeżeli $h(\Gamma) \subseteq D$, to $h(\varphi) \in D$

Twierdzenie: Niech φ, ψ nie zawierają $\rightarrow$, wtedy: $\varphi \models_{B_4} \psi$ wtw, $\varphi \rightarrow \psi$ jest tezą **FDE**$\subset$**E**

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

4-wartościowa logika Belnapa – etykietowane diagramy Betha

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

4-wartościowa logika Belnapa – etykietowane diagramy Betha

$+$ oznacza $\{1, \top\}$ $(+)$ oznacza $\{1, \bot\}$

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

4-wartościowa logika Belnapa – etykietowane diagramy Betha

$+$ oznacza $\{1, \top\}$ $(+)$ oznacza $\{1, \bot\}$

$-$ oznacza $\{0, \top\}$ $(-)$ oznacza $\{0, \bot\}$

4-wartościowa logika Belnapa – etykietowane diagramy Betha

$+$ oznacza $\{1, \top\}$ $(+)$ oznacza $\{1, \bot\}$
$-$ oznacza $\{0, \top\}$ $(-)$ oznacza $\{0, \bot\}$
Intuicyjnie $+\varphi$ oznacza, że φ jest na pewno uznane, $(-)\varphi$, że φ jest na pewno odrzucone, $(+)\varphi$ oznacza, że φ może być prawdziwe a $-\varphi$, że φ może być fałszywe.

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

4-wartościowa logika Belnapa – etykietowane diagramy Betha

$+$ oznacza $\{1, \top\}$ $(+)$ oznacza $\{1, \bot\}$
$-$ oznacza $\{0, \top\}$ $(-)$ oznacza $\{0, \bot\}$
Intuicyjnie $+\varphi$ oznacza, że φ jest na pewno uznane, $(-)\varphi$, że φ jest na pewno odrzucone, $(+)\varphi$ oznacza, że φ może być prawdziwe a $-\varphi$, że φ może być fałszywe.
$\psi_1, \ldots, \psi_n / \varphi$ ma dowód w $\mathbf{B}_4$-EDB wtw istnieje zamknięte drzewo dla $\{+\psi_1, \ldots, +\psi_n, (-)\varphi\}$ zbudowane z użyciem reguł dalej podanych.

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Reguły dla B_4

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Reguły dla B_4

Dla $\neg, \wedge, \vee$ jak w $\mathbf{K}_3$. Dla implikacji z $-$ i z $(+)$ tak samo, natomiast dla $+$ i $(-)$ oraz dla $\perp$ mamy następujące reguły:

Reguły dla B_4

Dla $\neg, \wedge, \vee$ jak w $\mathbf{K}_3$. Dla implikacji z $-$ i z $(+)$ tak samo, natomiast dla $+$ i $(-)$ oraz dla $\perp$ mamy następujące reguły:

$(+)\ \ +\varphi \rightarrow \psi\ /\ (-)\varphi\ \mid\ +\psi$

Reguły dla B_4

Dla $\neg, \wedge, \vee$ jak w $\mathbf{K}_3$. Dla implikacji z $-$ i z $(+)$ tak samo, natomiast dla $+$ i $(-)$ oraz dla $\perp$ mamy następujące reguły:

$(+)\ \ +\varphi \rightarrow \psi \ /\ (-)\varphi \ \mid\ +\psi$

$((-))\ (-)\varphi \rightarrow \psi \ /\ +\varphi,\ (-)\psi$

Reguły dla B_4

Dla $\neg, \wedge, \vee$ jak w $\mathbf{K}_3$. Dla implikacji z $-$ i z $(+)$ tak samo, natomiast dla $+$ i $(-)$ oraz dla $\perp$ mamy następujące reguły:

$(+)$ $+\varphi \rightarrow \psi$ / $(-)\varphi$ | $+\psi$

$((-))$ $(-)\varphi \rightarrow \psi$ / $+\varphi$, $(-)\psi$

$(\perp)$ $+\varphi$, $(-)\varphi$ / $\perp$; $(+)\varphi$, $-\varphi$ / $\perp$

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Reguły dla B_4

Dla $\neg, \wedge, \vee$ jak w $\mathbf{K}_3$. Dla implikacji z $-$ i z $(+)$ tak samo, natomiast dla $+$ i $(-)$ oraz dla $\perp$ mamy następujące reguły:

$(+)$ $+\varphi \rightarrow \psi \;/\; (-)\varphi \mid +\psi$

$((-))$ $(-)\varphi \rightarrow \psi \;/\; +\varphi,\ (-)\psi$

$(\perp)$ $+\varphi,\ (-)\varphi \;/\; \perp$; $\quad (+)\varphi,\ -\varphi \;/\; \perp$

Uwaga! ani $(+)\varphi$ i $(-)\varphi$, ani $+\varphi$ i $-\varphi$ nie dają sprzeczności.

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Reguły dla B_4

Dla $\neg, \wedge, \vee$ jak w $\mathbf{K}_3$. Dla implikacji z $-$ i z $(+)$ tak samo, natomiast dla $+$ i $(-)$ oraz dla $\perp$ mamy następujące reguły:

$(+)$ $+\varphi \rightarrow \psi$ / $(-)\varphi$ | $+\psi$

$((-))$ $(-)\varphi \rightarrow \psi$ / $+\varphi$, $(-)\psi$

$(\perp)$ $+\varphi$, $(-)\varphi$ / $\perp$; $(+)\varphi$, $-\varphi$ / $\perp$

Uwaga! ani $(+)\varphi$ i $(-)\varphi$, ani $+\varphi$ i $-\varphi$ nie dają sprzeczności.

Adekwatność etykietowanych diagramów Betha

Twierdzenie (Mocna adekwatność):

$\Gamma \models \varphi$ *wtw*, ψ_1, ..., ψ_n $/\varphi$ ma dowód w $\mathbf{B}_4$-EDB, gdzie $\{\psi_1, ..., \psi_n\} \subseteq \Gamma$

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Przykłady

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Przykłady

$\not\models_{B_4} (p \rightarrow q) \wedge \neg q \rightarrow \neg p$ ale

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Przykłady

$\not\models_{B_4} (p \rightarrow q) \wedge \neg q \rightarrow \neg p$ ale
$\models_{B_4} (p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Przykłady

$\not\models_{B_4} (p \to q) \wedge \neg q \to \neg p$ ale

$\models_{B_4} (p \to q) \wedge p \to q$

$(-)(p \to q) \wedge \neg q \to \neg p$

$+(p \to q) \wedge \neg q$

$(-)\neg p$

$+p \to q$

$+\neg q$

$(+)p$

$-q$

$(-)p \qquad +q$

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE

Przykłady

$$(-)(p \to q) \wedge p \to q$$
$$+(p \to q) \wedge p$$
$$(-)q$$
$$+p \to q$$
$$+p$$
$$\begin{array}{cc} (-)p & +q \\ \perp & \perp \end{array}$$