METALOGIKA

Andrzej Indrzejczak

Katedra Logiki i Metodologii Nauk UŁ

Łódź, semestr letni 2009/2010

Zastosowania indukcji

Zastosowania indukcji

Dowodzenie poprzez indukcję matematyczną stosuje się powszechnie m.in. w:

Zastosowania indukcji

Dowodzenie poprzez indukcję matematyczną stosuje się powszechnie m.in. w:

- arytmetyce (indukcja matematyczna)

Zastosowania indukcji

Dowodzenie poprzez indukcję matematyczną stosuje się powszechnie m.in. w:

- arytmetyce (indukcja matematyczna)
- metalogice (indukcja strukturalna)

Zastosowania indukcji

Dowodzenie poprzez indukcję matematyczną stosuje się powszechnie m.in. w:

- arytmetyce (indukcja matematyczna)
- metalogice (indukcja strukturalna)
- informatyce (dowodzenie poprawności programów)

Przypadek paradygmatyczny – arytmetyka liczb naturalnych

Różne sformułowania zasady indukcji matematycznej (słabej):

Przypadek paradygmatyczny – arytmetyka liczb naturalnych

Różne sformułowania zasady indukcji matematycznej (słabej):

niech N oznacza zbiór liczb naturalnych, a sx następnik liczby x

Przypadek paradygmatyczny – arytmetyka liczb naturalnych

Różne sformułowania zasady indukcji matematycznej (słabej):

niech N oznacza zbiór liczb naturalnych, a sx następnik liczby x

- $\varphi(0) \wedge \forall_{x \in N}(\varphi(x) \to \varphi(sx)) \to \forall_{x \in N}\varphi(x)$

Przypadek paradygmatyczny – arytmetyka liczb naturalnych

Różne sformułowania zasady indukcji matematycznej (słabej):

niech N oznacza zbiór liczb naturalnych, a sx następnik liczby x

- $\varphi(0) \wedge \forall_{x \in N}(\varphi(x) \rightarrow \varphi(sx)) \rightarrow \forall_{x \in N}\varphi(x)$
- $\varphi(0) \wedge \forall_{x \in N}(\varphi(x) \rightarrow \varphi(x+1)) \rightarrow \forall_{x \in N}\varphi(x)$

Przypadek paradygmatyczny – arytmetyka liczb naturalnych

Różne sformułowania zasady indukcji matematycznej (słabej):

niech N oznacza zbiór liczb naturalnych, a sx następnik liczby x

- $\varphi(0) \wedge \forall_{x \in N}(\varphi(x) \rightarrow \varphi(sx)) \rightarrow \forall_{x \in N}\varphi(x)$
- $\varphi(0) \wedge \forall_{x \in N}(\varphi(x) \rightarrow \varphi(x+1)) \rightarrow \forall_{x \in N}\varphi(x)$
- $0 \in A \wedge \forall_{x \in N}(x \in A \rightarrow sx \in A) \rightarrow A = N$

Przypadek paradygmatyczny – arytmetyka liczb naturalnych

Różne sformułowania zasady indukcji matematycznej (mocnej):

Przypadek paradygmatyczny – arytmetyka liczb naturalnych

Różne sformułowania zasady indukcji matematycznej (mocnej):

- $\varphi(0) \wedge \forall_{x \in N}(\forall_{y \in N}(0 \leq y < x \rightarrow \varphi(y)) \rightarrow \varphi(x)) \rightarrow \forall_{x \in N}\varphi(x)$

Przypadek paradygmatyczny – arytmetyka liczb naturalnych

Różne sformułowania zasady indukcji matematycznej (mocnej):

- $\varphi(0) \land \forall_{x \in N}(\forall_{y \in N}(0 \leq y < x \to \varphi(y)) \to \varphi(x)) \to \forall_{x \in N}\varphi(x)$
- $0 \in A \land \forall_{x \in N}(\forall_{y \in N}(0 \leq y < x \to y \in A) \to x \in A) \to A = N$

Przypadek paradygmatyczny – arytmetyka liczb naturalnych

Różne sformułowania zasady indukcji matematycznej (mocnej):

- $\varphi(0) \wedge \forall_{x\in N}(\forall_{y\in N}(0 \leq y < x \rightarrow \varphi(y)) \rightarrow \varphi(x)) \rightarrow \forall_{x\in N}\varphi(x)$
- $0 \in A \wedge \forall_{x\in N}(\forall_{y\in N}(0 \leq y < x \rightarrow y \in A) \rightarrow x \in A) \rightarrow A = N$
- $\forall_{x\in N}(\forall_{y\in N}(0 \leq y < x \rightarrow \varphi(y)) \rightarrow \varphi(x)) \rightarrow \forall_{x\in N}\varphi(x)$

Przypadek paradygmatyczny – arytmetyka liczb naturalnych

Różne sformułowania zasady indukcji matematycznej (mocnej):

- $\varphi(0) \wedge \forall_{x \in N}(\forall_{y \in N}(0 \leq y < x \to \varphi(y)) \to \varphi(x)) \to \forall_{x \in N}\varphi(x)$
- $0 \in A \wedge \forall_{x \in N}(\forall_{y \in N}(0 \leq y < x \to y \in A) \to x \in A) \to A = N$
- $\forall_{x \in N}(\forall_{y \in N}(0 \leq y < x \to \varphi(y)) \to \varphi(x)) \to \forall_{x \in N}\varphi(x)$
- $\forall_{x \in N}(\forall_{y \in N}(0 \leq y < x \to y \in A) \to x \in A) \to A = N$

Przypadek paradygmatyczny – arytmetyka liczb naturalnych

Uwagi terminologiczne i historyczne:

Przypadek paradygmatyczny – arytmetyka liczb naturalnych

Uwagi terminologiczne i historyczne:

Określenie mocna i słaba indukcja matematyczna jest mylące – obie zasady są równoważne. (zamiast terminu mocna czasem używa się terminu zupełna)

Przypadek paradygmatyczny – arytmetyka liczb naturalnych

Uwagi terminologiczne i historyczne:

Określenie mocna i słaba indukcja matematyczna jest mylące – obie zasady są równoważne. (zamiast terminu mocna czasem używa się terminu zupełna)
Rozumowania przez indukcję matematyczną były stosowane już w XVII w. przez Pascala i Fermata.

Przypadek paradygmatyczny – arytmetyka liczb naturalnych

Uwagi terminologiczne i historyczne:

Określenie mocna i słaba indukcja matematyczna jest mylące – obie zasady są równoważne. (zamiast terminu mocna czasem używa się terminu zupełna)

Rozumowania przez indukcję matematyczną były stosowane już w XVII w. przez Pascala i Fermata.

Termin i definicja pochodzą od DeMorgana.

Przypadek paradygmatyczny – arytmetyka liczb naturalnych

Uwagi terminologiczne i historyczne:

Określenie mocna i słaba indukcja matematyczna jest mylące – obie zasady są równoważne. (zamiast terminu mocna czasem używa się terminu zupełna)
Rozumowania przez indukcję matematyczną były stosowane już w XVII w. przez Pascala i Fermata.
Termin i definicja pochodzą od DeMorgana.
Jako aksjomat arytmetyki pojawia się u Fregego i Peano.

Przypadek paradygmatyczny – arytmetyka liczb naturalnych

Struktura dowodu indukcyjnego:

Przypadek paradygmatyczny – arytmetyka liczb naturalnych

Struktura dowodu indukcyjnego:

Dowody przez indukcję matematyczną zawierają dwie części:

Przypadek paradygmatyczny – arytmetyka liczb naturalnych

Struktura dowodu indukcyjnego:

Dowody przez indukcję matematyczną zawierają dwie części:

a baza indukcyjna – dowodzimy, że 0 spełnia dany warunek φ

Przypadek paradygmatyczny – arytmetyka liczb naturalnych

Struktura dowodu indukcyjnego:

Dowody przez indukcję matematyczną zawierają dwie części:

a baza indukcyjna – dowodzimy, że 0 spełnia dany warunek φ

b krok indukcyjny (teza indukcyjna) – zakładamy, że liczba x spełnia warunek φ (założenie indukcyjne) i na podstawie tego założenie i ew. bazy ind. dowodzimy, że sx również spełnia φ.

Przypadek paradygmatyczny – arytmetyka liczb naturalnych

Struktura dowodu indukcyjnego:

Dowody przez indukcję matematyczną zawierają dwie części:

- a baza indukcyjna – dowodzimy, że 0 spełnia dany warunek φ
- b krok indukcyjny (teza indukcyjna) – zakładamy, że liczba x spełnia warunek φ (założenie indukcyjne) i na podstawie tego założenie i ew. bazy ind. dowodzimy, że sx również spełnia φ.

a. i b. przez zasadę indukcji implikują, że dowolna liczba spełnia φ.

Przypadek paradygmatyczny – arytmetyka liczb naturalnych

Przykład dowodu indukcyjnego:

Przypadek paradygmatyczny – arytmetyka liczb naturalnych

Przykład dowodu indukcyjnego:

Dowodzimy, że: $\forall_{x \in N} \neg(sx = x)$ przez indukcję po x

Przypadek paradygmatyczny – arytmetyka liczb naturalnych

Przykład dowodu indukcyjnego:

Dowodzimy, że: $\forall_{x \in N} \neg(sx = x)$ przez indukcję po x

a. baza: $\varphi(0) := \neg(s0 = 0)$

Przypadek paradygmatyczny – arytmetyka liczb naturalnych

Przykład dowodu indukcyjnego:

Dowodzimy, że: $\forall_{x \in N} \neg(sx = x)$ przez indukcję po x

a. baza: $\varphi(0) := \neg(s0 = 0)$

1.	$\forall_{x \in N} \neg(sx = 0)$	aksjomat
2.	$\neg(s0 = 0)$	1., $\forall O, x/0$

Przypadek paradygmatyczny – arytmetyka liczb naturalnych

Przykład dowodu indukcyjnego:

Dowodzimy, że: $\forall_{x \in N} \neg(sx = x)$ przez indukcję po x

a. baza: $\varphi(0) := \neg(s0 = 0)$

1.	$\forall_{x \in N} \neg(sx = 0)$	aksjomat
2.	$\neg(s0 = 0)$	1., $\forall O, x/0$

b. teza: $\varphi(x) \rightarrow \varphi(sx) := \neg(sx = x) \rightarrow \neg(ssx = sx)$

Przypadek paradygmatyczny – arytmetyka liczb naturalnych

Przykład dowodu indukcyjnego:

Dowodzimy, że: $\forall_{x \in N} \neg(sx = x)$ przez indukcję po x

a. baza: $\varphi(0) := \neg(s0 = 0)$

1.	$\forall_{x \in N} \neg(sx = 0)$	aksjomat
2.	$\neg(s0 = 0)$	1., $\forall O, x/0$

b. teza: $\varphi(x) \rightarrow \varphi(sx) := \neg(sx = x) \rightarrow \neg(ssx = sx)$

1.	$\neg(sx = x)$	zał. ind.
2.	$\forall_{x,y \in N}(sx = sy \rightarrow x = y)$	aksjomat
3.	$ssx = sx \rightarrow sx = x$	2., $\forall O, x/sx, y/x$
4.	$\neg(ssx = sx)$	1., 3. MT

Przypadek paradygmatyczny – arytmetyka liczb naturalnych

Dlaczego indukcja pracuje?

Przypadek paradygmatyczny – arytmetyka liczb naturalnych

Dlaczego indukcja pracuje?

Bo zbiór liczb naturalnych jest zbiorem indukcyjnym/rekurencyjnym.

Przypadek paradygmatyczny – arytmetyka liczb naturalnych

Dlaczego indukcja pracuje?

Bo zbiór liczb naturalnych jest zbiorem indukcyjnym/rekurencyjnym.
Ogólniej – dowody indukcyjne można stosować do twierdzeń postaci:

Przypadek paradygmatyczny – arytmetyka liczb naturalnych

Dlaczego indukcja pracuje?

Bo zbiór liczb naturalnych jest zbiorem indukcyjnym/rekurencyjnym.
Ogólniej – dowody indukcyjne można stosować do twierdzeń postaci:

$$\forall_x (x \in A \to x \in B)$$

Przypadek paradygmatyczny – arytmetyka liczb naturalnych

Dlaczego indukcja pracuje?

Bo zbiór liczb naturalnych jest zbiorem indukcyjnym/rekurencyjnym.
Ogólniej – dowody indukcyjne można stosować do twierdzeń postaci:

$$\forall_x (x \in A \rightarrow x \in B)$$

lub

Przypadek paradygmatyczny – arytmetyka liczb naturalnych

Dlaczego indukcja pracuje?

Bo zbiór liczb naturalnych jest zbiorem indukcyjnym/rekurencyjnym.
Ogólniej – dowody indukcyjne można stosować do twierdzeń postaci:

$$\forall_x (x \in A \to x \in B)$$

lub

$$\forall_x (\varphi(x) \to \psi(x))$$

Przypadek paradygmatyczny – arytmetyka liczb naturalnych

Dlaczego indukcja pracuje?

Bo zbiór liczb naturalnych jest zbiorem indukcyjnym/rekurencyjnym.
Ogólniej – dowody indukcyjne można stosować do twierdzeń postaci:

$$\forall_x (x \in A \rightarrow x \in B)$$

lub

$$\forall_x (\varphi(x) \rightarrow \psi(x))$$

pod warunkiem, że A jest zbiorem indukcyjnym (φ jest własnością zdefiniowaną rekurencyjnie).

Ogólny kształt definicji indukcyjnych

Każda definicja indukcyjna zawiera 3 części:

Ogólny kształt definicji indukcyjnych

Każda definicja indukcyjna zawiera 3 części:

1. bazowa – wymienia elementy wyjściowe, które bezwarunkowo zawierają się w definiowanym zbiorze

Ogólny kształt definicji indukcyjnych

Każda definicja indukcyjna zawiera 3 części:

1. bazowa – wymienia elementy wyjściowe, które bezwarunkowo zawierają się w definiowanym zbiorze
2. indukcyjna – określa jak nowe elementy definiowanego zbioru powstają z elementów już do niego należących (podaje reguły konstrukcji zbioru indukcyjnego)

Ogólny kształt definicji indukcyjnych

Każda definicja indukcyjna zawiera 3 części:

1. bazowa – wymienia elementy wyjściowe, które bezwarunkowo zawierają się w definiowanym zbiorze
2. indukcyjna – określa jak nowe elementy definiowanego zbioru powstają z elementów już do niego należących (podaje reguły konstrukcji zbioru indukcyjnego)
3. końcowa – stwierdza, że nic innego poza obiektami uzyskanymi przez odwołanie się do 1. lub 2. nie należy do definiowanego zbioru

Ogólny kształt definicji indukcyjnych

Alternatywnie można wysłowić definicję indukcyjną następująco:

Ogólny kształt definicji indukcyjnych

Alternatywnie można wysłowić definicję indukcyjną następująco:

A jest zbiorem indukcyjnym wtw A jest najmniejszym zbiorem spełniającym warunki 1. i 2.

Ogólny kształt definicji indukcyjnych

Alternatywnie można wysłowić definicję indukcyjną następująco:

A jest zbiorem indukcyjnym wtw A jest najmniejszym zbiorem spełniającym warunki 1. i 2.
Uwaga! istnienie takiego najmniejszego zbioru jest zagwarantowane przez teorię mnogości – jest to iloczyn wszystkich zbiorów zawierających zbiór elementów wyjściowych i domkniętych na zastosowanie wszystkich operacji konstruowania nowych elementów.

Formalna postać definicji indukcyjnych

Formalna postać definicji indukcyjnych

Wprowadzimy następujące oznaczenia:

Formalna postać definicji indukcyjnych

Wprowadzimy następujące oznaczenia:

Niech B to zbiór elementów wyjściowych;

Formalna postać definicji indukcyjnych

Wprowadzimy następujące oznaczenia:

Niech B to zbiór elementów wyjściowych;
$CL(A, O)$ oznacza, że A jest domknięty na każdą operację ze zbioru O, tzn. $x_1, ..., x_n \in A \rightarrow o(x_1, ..., x_n) \in A$, dla każdej n-argumentowej operacji (reguły konstrukcji) $o \in O$ $(n \geq 0)$.

Formalna postać definicji indukcyjnych

Wprowadzimy następujące oznaczenia:

Niech B to zbiór elementów wyjściowych;
$CL(A, O)$ oznacza, że A jest domknięty na każdą operację ze zbioru O, tzn. $x_1, ..., x_n \in A \to o(x_1, ..., x_n) \in A$, dla każdej n-argumentowej operacji (reguły konstrukcji) $o \in O$ $(n \geq 0)$.
A jest zbiorem indukcyjnym wtw:

Formalna postać definicji indukcyjnych

Wprowadzimy następujące oznaczenia:

Niech B to zbiór elementów wyjściowych;
$CL(A, O)$ oznacza, że A jest domknięty na każdą operację ze zbioru O, tzn. $x_1, ..., x_n \in A \rightarrow o(x_1, ..., x_n) \in A$, dla każdej n-argumentowej operacji (reguły konstrukcji) $o \in O$ $(n \geq 0)$.
A jest zbiorem indukcyjnym wtw:

1. $B \subset A$

Formalna postać definicji indukcyjnych

Wprowadzimy następujące oznaczenia:

Niech B to zbiór elementów wyjściowych;
$CL(A, O)$ oznacza, że A jest domknięty na każdą operację ze zbioru O, tzn. $x_1, ..., x_n \in A \rightarrow o(x_1, ..., x_n) \in A$, dla każdej n-argumentowej operacji (reguły konstrukcji) $o \in O$ $(n \geq 0)$.
A jest zbiorem indukcyjnym wtw:

1. $B \subset A$
2. $CL(A, O)$

Formalna postać definicji indukcyjnych

Wprowadzimy następujące oznaczenia:

Niech B to zbiór elementów wyjściowych;
$CL(A, O)$ oznacza, że A jest domknięty na każdą operację ze zbioru O, tzn. $x_1, ..., x_n \in A \rightarrow o(x_1, ..., x_n) \in A$, dla każdej n-argumentowej operacji (reguły konstrukcji) $o \in O$ $(n \geq 0)$.
A jest zbiorem indukcyjnym wtw:

1. $B \subset A$
2. $CL(A, O)$
3. $\forall_C (B \subset C \wedge CL(C, O) \rightarrow A \subset C)$

Formalna postać definicji indukcyjnych

Wprowadzimy następujące oznaczenia:

Niech B to zbiór elementów wyjściowych;
$CL(A, O)$ oznacza, że A jest domknięty na każdą operację ze zbioru O, tzn. $x_1, ..., x_n \in A \rightarrow o(x_1, ..., x_n) \in A$, dla każdej n-argumentowej operacji (reguły konstrukcji) $o \in O$ $(n \geq 0)$.
A jest zbiorem indukcyjnym wtw:

1. $B \subset A$
2. $CL(A, O)$
3. $\forall_C (B \subset C \wedge CL(C, O) \rightarrow A \subset C)$

Warunek 3. wyraża fakt, że A jest najmniejszym zbiorem spełniającym 1. i 2.

Ogólny kształt definicji indukcyjnych

Ogólny kształt definicji indukcyjnych

Przykład 1. Definicja zbioru liczb naturalnych N

Ogólny kształt definicji indukcyjnych

Przykład 1. Definicja zbioru liczb naturalnych N

N jest najmniejszym zbiorem spełniającym warunki:

Ogólny kształt definicji indukcyjnych

Przykład 1. Definicja zbioru liczb naturalnych N

N jest najmniejszym zbiorem spełniającym warunki:

1. $0 \in N$

Ogólny kształt definicji indukcyjnych

Przykład 1. Definicja zbioru liczb naturalnych N

N jest najmniejszym zbiorem spełniającym warunki:

1. $0 \in N$
2. jeżeli $x \in N$, to $sx \in N$

Ogólny kształt definicji indukcyjnych

Przykład 2. Definicja zbioru formuł KRZ *FOR*

Ogólny kształt definicji indukcyjnych

Przykład 2. Definicja zbioru formuł KRZ *FOR*

FOR jest najmniejszym zbiorem spełniającym warunki:

Ogólny kształt definicji indukcyjnych

Przykład 2. Definicja zbioru formuł KRZ FOR

FOR jest najmniejszym zbiorem spełniającym warunki:

1. $ZZ \subset FOR$

Ogólny kształt definicji indukcyjnych

Przykład 2. Definicja zbioru formuł KRZ FOR

FOR jest najmniejszym zbiorem spełniającym warunki:

1. $ZZ \subset FOR$

2a. jeżeli $\varphi \in FOR$, to $\neg\varphi \in FOR$

Ogólny kształt definicji indukcyjnych

Przykład 2. Definicja zbioru formuł KRZ *FOR*

FOR jest najmniejszym zbiorem spełniającym warunki:

1. $ZZ \subset FOR$

2a. jeżeli $\varphi \in FOR$, to $\neg\varphi \in FOR$

2b. jeżeli $\varphi, \psi \in FOR$, to $(\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \rightarrow \psi) \in FOR$

Ogólny kształt definicji indukcyjnych

Przykład 2. Definicja zbioru formuł KRZ FOR

FOR jest najmniejszym zbiorem spełniającym warunki:

1. $ZZ \subset FOR$

2a. jeżeli $\varphi \in FOR$, to $\neg\varphi \in FOR$

2b. jeżeli $\varphi, \psi \in FOR$, to $(\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \rightarrow \psi) \in FOR$

Uwaga 1: w praktyce stosujemy konwencje pomijania zbędnych nawiasów.

Ogólny kształt definicji indukcyjnych

Przykład 2. Definicja zbioru formuł **KRZ** *FOR*

FOR jest najmniejszym zbiorem spełniającym warunki:

1. $ZZ \subset FOR$

2a. jeżeli $\varphi \in FOR$, to $\neg\varphi \in FOR$

2b. jeżeli $\varphi, \psi \in FOR$, to $(\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \rightarrow \psi) \in FOR$

Uwaga 1: w praktyce stosujemy konwencje pomijania zbędnych nawiasów.
Uwaga 2: $\leftrightarrow$ i $\perp$ używamy dalej jako definicyjnych skrótów.

Ogólny kształt definicji indukcyjnych

Inne sposoby definiowania języka zdaniowego:

Ogólny kształt definicji indukcyjnych

Inne sposoby definiowania języka zdaniowego:

1. Popularnym obecnie sposobem definiowania jest użycie notacji Backusa/Naura:

Ogólny kształt definicji indukcyjnych

Inne sposoby definiowania języka zdaniowego:

1. Popularnym obecnie sposobem definiowania jest użycie notacji Backusa/Naura:

$$\varphi \in FOR$$

Ogólny kształt definicji indukcyjnych

Inne sposoby definiowania języka zdaniowego:

1. Popularnym obecnie sposobem definiowania jest użycie notacji Backusa/Naura:

$$\varphi \in FOR$$

$$\text{wtw}$$

$$\varphi := p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \psi) \mid (\varphi \vee \psi) \mid (\varphi \rightarrow \psi)$$

Ogólny kształt definicji indukcyjnych

Inne sposoby definiowania języka zdaniowego:

1. Popularnym obecnie sposobem definiowania jest użycie notacji Backusa/Naura:

$$\varphi \in FOR$$
$$\text{wtw}$$
$$\varphi := p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \psi) \mid (\varphi \vee \psi) \mid (\varphi \rightarrow \psi)$$

Jest to forma równoważna – dowody indukcyjne stosują się również do takich zbiorów.

Ogólny kształt definicji indukcyjnych

Inne sposoby definiowania języka zdaniowego:

1. Popularnym obecnie sposobem definiowania jest użycie notacji Backusa/Naura:

$$\varphi \in FOR$$
$$\text{wtw}$$
$$\varphi := p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \psi) \mid (\varphi \vee \psi) \mid (\varphi \to \psi)$$

Jest to forma równoważna – dowody indukcyjne stosują się również do takich zbiorów.

2. Język **KRZ** (lub dowolny język zdaniowy) jako algebra wolna – ten wątek ew. rozwiniemy później

Stosowanie dowodów indukcyjnych w logice

Zasadniczo dwa sposoby:

Stosowanie dowodów indukcyjnych w logice

Zasadniczo dwa sposoby:

- bezpośrednie zastosowanie indukcji matematycznej (zazwyczaj mocnej) do pewnej przyjętej miary;

Stosowanie dowodów indukcyjnych w logice

Zasadniczo dwa sposoby:

- bezpośrednie zastosowanie indukcji matematycznej (zazwyczaj mocnej) do pewnej przyjętej miary;
- wprowadzenie osobnej zasady indukcji, np. indukcji strukturalnej w wersji dla FOR:

Stosowanie dowodów indukcyjnych w logice

A. bezpośrednie zastosowanie indukcji matematycznej (zazwyczaj mocnej) do przyjętej miary, np.:

Stosowanie dowodów indukcyjnych w logice

A. bezpośrednie zastosowanie indukcji matematycznej (zazwyczaj mocnej) do przyjętej miary, np.:

1. długość formuł (ilość symboli)

Stosowanie dowodów indukcyjnych w logice

A. bezpośrednie zastosowanie indukcji matematycznej (zazwyczaj mocnej) do przyjętej miary, np.:

1. długość formuł (ilość symboli)
2. złożoność formuł (ilość stałych logicznych)

Stosowanie dowodów indukcyjnych w logice

A. bezpośrednie zastosowanie indukcji matematycznej (zazwyczaj mocnej) do przyjętej miary, np.:

1. długość formuł (ilość symboli)
2. złożoność formuł (ilość stałych logicznych)
3. długość dowodu (ilość wierszy)

Stosowanie dowodów indukcyjnych w logice

B. wprowadzenie zasady indukcji strukturalnej – np. w wersji dla *FOR*:

Stosowanie dowodów indukcyjnych w logice

B. wprowadzenie zasady indukcji strukturalnej – np. w wersji dla *FOR*:

Jeżeli:

Stosowanie dowodów indukcyjnych w logice

B. wprowadzenie zasady indukcji strukturalnej – np. w wersji dla *FOR*:

Jeżeli:

1. każda zmienna zdaniowa ma własność θ

Stosowanie dowodów indukcyjnych w logice

B. wprowadzenie zasady indukcji strukturalnej – np. w wersji dla *FOR*:

Jeżeli:

1. każda zmienna zdaniowa ma własność θ

2a. jeżeli φ ma własność θ, to $\neg\varphi$ ma własność θ

Stosowanie dowodów indukcyjnych w logice

B. wprowadzenie zasady indukcji strukturalnej – np. w wersji dla *FOR*:

Jeżeli:

1. każda zmienna zdaniowa ma własność θ

2a. jeżeli φ ma własność θ, to $\neg\varphi$ ma własność θ

2b. jeżeli φ i ψ ma własność θ, to $(\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \rightarrow \psi)$ ma własność θ

Stosowanie dowodów indukcyjnych w logice

B. wprowadzenie zasady indukcji strukturalnej – np. w wersji dla *FOR*:

Jeżeli:

1. każda zmienna zdaniowa ma własność θ

2a. jeżeli φ ma własność θ, to $\neg\varphi$ ma własność θ

2b. jeżeli φ i ψ ma własność θ, to $(\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \rightarrow \psi)$ ma własność θ

to każda formuła ma własność θ

Stosowanie dowodów indukcyjnych w logice

Dowody indukcyjne w logice – 3 przykłady dla KRZ:

Stosowanie dowodów indukcyjnych w logice

Dowody indukcyjne w logice – 3 przykłady dla KRZ:

1. przykład ilustracyjny – parowanie nawiasów

Stosowanie dowodów indukcyjnych w logice

Dowody indukcyjne w logice – 3 przykłady dla KRZ:

1. przykład ilustracyjny – parowanie nawiasów
2. dopuszczalność reguły ekstensjonalności

Stosowanie dowodów indukcyjnych w logice

Dowody indukcyjne w logice – 3 przykłady dla KRZ:

1. przykład ilustracyjny – parowanie nawiasów
2. dopuszczalność reguły ekstensjonalności
3. twierdzenie o dedukcji

Stosowanie dowodów indukcyjnych w logice

Przykład 1 – prosty.

Stosowanie dowodów indukcyjnych w logice

Przykład 1 – prosty.

Twierdzenie: w każdej formule **KRZ** χ ilość nawiasów lewych ($nl(\chi)$) jest równa ilości nawiasów prawych ($np(\chi)$)

Stosowanie dowodów indukcyjnych w logice

Przykład 1 – prosty.

Twierdzenie: w każdej formule **KRZ** χ ilość nawiasów lewych ($nl(\chi)$) jest równa ilości nawiasów prawych ($np(\chi)$)
Indukcja strukturalna

Stosowanie dowodów indukcyjnych w logice

Przykład 1 – prosty.

Twierdzenie: w każdej formule **KRZ** χ ilość nawiasów lewych ($nl(\chi)$) jest równa ilości nawiasów prawych ($np(\chi)$)

Indukcja strukturalna

a. baza: formuła χ jest zmienną, zatem $nl(\chi) = np(\chi) = 0$

Stosowanie dowodów indukcyjnych w logice

Przykład 1 – prosty.

Twierdzenie: w każdej formule **KRZ** χ ilość nawiasów lewych ($nl(\chi)$) jest równa ilości nawiasów prawych ($np(\chi)$)
Indukcja strukturalna
a. baza: formuła χ jest zmienną, zatem $nl(\chi) = np(\chi) = 0$
b. teza: założenie indukcyjne: dowodzone twierdzenie zachodzi dla φ i ψ

Stosowanie dowodów indukcyjnych w logice

Przykład 1 – prosty.

Twierdzenie: w każdej formule **KRZ** χ ilość nawiasów lewych ($nl(\chi)$) jest równa ilości nawiasów prawych ($np(\chi)$)

Indukcja strukturalna

a. baza: formuła χ jest zmienną, zatem $nl(\chi) = np(\chi) = 0$

b. teza: założenie indukcyjne: dowodzone twierdzenie zachodzi dla φ i ψ

– jeżeli formuła χ ma postać $\neg\varphi$, to ma tyle samo nawiasów co φ, więc z założenia indukcyjnego $nl(\chi) = np(\chi)$

Stosowanie dowodów indukcyjnych w logice

Przykład 1 – prosty.

Twierdzenie: w każdej formule **KRZ** χ ilość nawiasów lewych ($nl(\chi)$) jest równa ilości nawiasów prawych ($np(\chi)$)

Indukcja strukturalna

a. baza: formuła χ jest zmienną, zatem $nl(\chi) = np(\chi) = 0$

b. teza: założenie indukcyjne: dowodzone twierdzenie zachodzi dla φ i ψ

– jeżeli formuła χ ma postać $\neg\varphi$, to ma tyle samo nawiasów co φ, więc z założenia indukcyjnego $nl(\chi) = np(\chi)$

– jeżeli formuła χ ma postać $(\varphi \star \psi)$, gdzie $\star$ to dowolny spójnik dwuargumentowy, to twierdzenie zachodzi, gdyż $nl(\chi) = nl(\varphi) + nl(\psi) + 1$ i $np(\chi) = np(\varphi) + np(\psi) + 1$, a z założenia indukcyjnego mamy $nl(\varphi) = np(\varphi)$ i $nl(\psi) = np(\psi)$.

Stosowanie dowodów indukcyjnych w logice

Przykład 1 – prosty.

Twierdzenie: w każdej formule **KRZ** χ ilość nawiasów lewych ($nl(\chi)$) jest równa ilości nawiasów prawych ($np(\chi)$)

Indukcja strukturalna

a. baza: formuła χ jest zmienną, zatem $nl(\chi) = np(\chi) = 0$

b. teza: założenie indukcyjne: dowodzone twierdzenie zachodzi dla φ i ψ

– jeżeli formuła χ ma postać $\neg\varphi$, to ma tyle samo nawiasów co φ, więc z założenia indukcyjnego $nl(\chi) = np(\chi)$

– jeżeli formuła χ ma postać $(\varphi \star \psi)$, gdzie $\star$ to dowolny spójnik dwuargumentowy, to twierdzenie zachodzi, gdyż $nl(\chi) = nl(\varphi) + nl(\psi) + 1$ i $np(\chi) = np(\varphi) + np(\psi) + 1$, a z założenia indukcyjnego mamy $nl(\varphi) = np(\varphi)$ i $nl(\psi) = np(\psi)$.

Zatem twierdzenie zachodzi dla dowolnej formuły.

Stosowanie dowodów indukcyjnych w logice

Przykład 2 – reguła ekstensjonalności

Stosowanie dowodów indukcyjnych w logice

Przykład 2 – reguła ekstensjonalności

Udowodnimy, że reguła ekstensjonalności RE jest regułą dopuszczalną w **KRZ**, tzn, że:

Stosowanie dowodów indukcyjnych w logice

Przykład 2 – reguła ekstensjonalności

Udowodnimy, że reguła ekstensjonalności RE jest reguła dopuszczalną w **KRZ**, tzn, że:
jeżeli $\varphi \leftrightarrow \psi$ jest tezą **KRZ**, to $\chi \leftrightarrow \chi[\varphi//\psi]$ też jest tezą;

Stosowanie dowodów indukcyjnych w logice

Przykład 2 – reguła ekstensjonalności

Udowodnimy, że reguła ekstensjonalności RE jest reguła dopuszczalną w **KRZ**, tzn, że:
jeżeli $\varphi \leftrightarrow \psi$ jest tezą **KRZ**, to $\chi \leftrightarrow \chi[\varphi//\psi]$ też jest tezą;
lub krótko:

Stosowanie dowodów indukcyjnych w logice

Przykład 2 – reguła ekstensjonalności

Udowodnimy, że reguła ekstensjonalności RE jest reguła dopuszczalną w **KRZ**, tzn, że:
jeżeli $\varphi \leftrightarrow \psi$ jest tezą **KRZ**, to $\chi \leftrightarrow \chi[\varphi//\psi]$ też jest tezą;
lub krótko:
RE: $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi \;/\; \vdash \chi \leftrightarrow \chi[\varphi//\psi]$
gdzie $\chi[\varphi//\psi]$ oznacza zastąpienie co najmniej jednego wystąpienia φ (jako podformuły χ) przez ψ

Stosowanie dowodów indukcyjnych w logice

Przykład 2 – reguła ekstensjonalności

Stosowanie dowodów indukcyjnych w logice

Przykład 2 – reguła ekstensjonalności

Wstępnie odnotujmy następujący lemat (twierdzenie pomocnicze)

Stosowanie dowodów indukcyjnych w logice

Przykład 2 – reguła ekstensjonalności

Wstępnie odnotujmy następujący lemat (twierdzenie pomocnicze)
Lemat 1: Każda formuła podpadająca pod jeden z poniższych schematów jest tezą dowolnego pełnego systemu dedukcyjnego dla **KRZ**:

Stosowanie dowodów indukcyjnych w logice

Przykład 2 – reguła ekstensjonalności

Wstępnie odnotujmy następujący lemat (twierdzenie pomocnicze)
Lemat 1: Każda formuła podpadająca pod jeden z poniższych schematów jest tezą dowolnego pełnego systemu dedukcyjnego dla **KRZ**:

a. $(\varphi \leftrightarrow \psi) \to (\neg\varphi \leftrightarrow \neg\psi)$
b. $(\varphi \leftrightarrow \psi) \to (\varphi \wedge \chi \leftrightarrow \psi \wedge \chi)$
c. $(\varphi \leftrightarrow \psi) \to (\chi \wedge \varphi \leftrightarrow \chi \wedge \psi)$
d. $(\varphi \leftrightarrow \psi) \to (\varphi \vee \chi \leftrightarrow \psi \vee \chi)$
e. $(\varphi \leftrightarrow \psi) \to (\chi \vee \varphi \leftrightarrow \chi \vee \psi)$
f. $(\varphi \leftrightarrow \psi) \to (\varphi \to \chi \leftrightarrow \psi \to \chi)$
g. $(\varphi \leftrightarrow \psi) \to (\chi \to \varphi \leftrightarrow \chi \to \psi)$
h. $(\varphi \leftrightarrow \psi) \wedge (\gamma \leftrightarrow \delta) \to (\varphi \wedge \gamma \leftrightarrow \psi \wedge \delta)$
i. $(\varphi \leftrightarrow \psi) \wedge (\gamma \leftrightarrow \delta) \to (\varphi \vee \gamma \leftrightarrow \psi \vee \delta)$
j. $(\varphi \leftrightarrow \psi) \wedge (\gamma \leftrightarrow \delta) \to (\varphi \to \gamma \leftrightarrow \psi \to \delta)$

Stosowanie dowodów indukcyjnych w logice

Przykład 2 – reguła ekstensjonalności

Stosowanie dowodów indukcyjnych w logice

Przykład 2 – reguła ekstensjonalności

Indukcja (mocna) po długości χ przy założeniu indukcyjnym, że RE zachodzi dla każdej formuły krótszej. Rozważamy 5 przypadków:

Stosowanie dowodów indukcyjnych w logice

Przykład 2 – reguła ekstensjonalności

Indukcja (mocna) po długości χ przy założeniu indukcyjnym, że RE zachodzi dla każdej formuły krótszej. Rozważamy 5 przypadków:
a. χ jest zmienną, zatem operacja jest wykonalna wtw $\chi := \varphi$, ale wtedy jest to operacja trywialna, tj. $\chi[\varphi//\psi] := \psi$

Stosowanie dowodów indukcyjnych w logice

Przykład 2 – reguła ekstensjonalności

Indukcja (mocna) po długości χ przy założeniu indukcyjnym, że RE zachodzi dla każdej formuły krótszej. Rozważamy 5 przypadków:
a. χ jest zmienną, zatem operacja jest wykonalna wtw $\chi := \varphi$, ale wtedy jest to operacja trywialna, tj. $\chi[\varphi//\psi] := \psi$
b. $\chi := \neg\gamma$.

Stosowanie dowodów indukcyjnych w logice

Przykład 2 – reguła ekstensjonalności

Indukcja (mocna) po długości χ przy założeniu indukcyjnym, że RE zachodzi dla każdej formuły krótszej. Rozważamy 5 przypadków:
a. χ jest zmienną, zatem operacja jest wykonalna wtw $\chi := \varphi$, ale wtedy jest to operacja trywialna, tj. $\chi[\varphi//\psi] := \psi$
b. $\chi := \neg\gamma$.
Z zał. indukcyjnego mamy $\vdash \gamma \leftrightarrow \gamma[\varphi//\psi]$,

Stosowanie dowodów indukcyjnych w logice

Przykład 2 – reguła ekstensjonalności

Indukcja (mocna) po długości χ przy założeniu indukcyjnym, że RE zachodzi dla każdej formuły krótszej. Rozważamy 5 przypadków:
a. χ jest zmienną, zatem operacja jest wykonalna wtw $\chi := \varphi$, ale wtedy jest to operacja trywialna, tj. $\chi[\varphi//\psi] := \psi$
b. $\chi := \neg\gamma$.
Z zał. indukcyjnego mamy $\vdash \gamma \leftrightarrow \gamma[\varphi//\psi]$,
przez lemat 1.a. otrzymujemy $\vdash \neg\gamma \leftrightarrow \neg\gamma[\varphi//\psi]$.

Stosowanie dowodów indukcyjnych w logice

Przykład 2 – reguła ekstensjonalności

Stosowanie dowodów indukcyjnych w logice

Przykład 2 – reguła ekstensjonalności

c. $\chi := (\gamma \wedge \delta)$. Do rozważenia mamy trzy (pod)przypadki:

Stosowanie dowodów indukcyjnych w logice

Przykład 2 – reguła ekstensjonalności

c. $\chi := (\gamma \wedge \delta)$. Do rozważenia mamy trzy (pod)przypadki:
– zastąpienie φ przez ψ tylko w γ, czyli $\chi[\varphi//\psi] := (\gamma[\varphi//\psi] \wedge \delta)$.

Stosowanie dowodów indukcyjnych w logice

Przykład 2 – reguła ekstensjonalności

c. $\chi := (\gamma \wedge \delta)$. Do rozważenia mamy trzy (pod)przypadki:
– zastąpienie φ przez ψ tylko w γ, czyli $\chi[\varphi//\psi] := (\gamma[\varphi//\psi] \wedge \delta)$.
Z zał. indukcyjnego mamy $\vdash \gamma \leftrightarrow \gamma[\varphi//\psi]$,

Stosowanie dowodów indukcyjnych w logice

Przykład 2 – reguła ekstensjonalności

c. $\chi := (\gamma \wedge \delta)$. Do rozważenia mamy trzy (pod)przypadki:
– zastąpienie φ przez ψ tylko w γ, czyli $\chi[\varphi//\psi] := (\gamma[\varphi//\psi] \wedge \delta)$.
Z zał. indukcyjnego mamy $\vdash \gamma \leftrightarrow \gamma[\varphi//\psi]$,
przez lemat 1.b. otrzymujemy $\vdash (\gamma \wedge \delta) \leftrightarrow (\gamma[\varphi//\psi] \wedge \delta)$.

Stosowanie dowodów indukcyjnych w logice

Przykład 2 – reguła ekstensjonalności

c. $\chi := (\gamma \wedge \delta)$. Do rozważenia mamy trzy (pod)przypadki:
– zastąpienie φ przez ψ tylko w γ, czyli $\chi[\varphi//\psi] := (\gamma[\varphi//\psi] \wedge \delta)$.
Z zał. indukcyjnego mamy $\vdash \gamma \leftrightarrow \gamma[\varphi//\psi]$,
przez lemat 1.b. otrzymujemy $\vdash (\gamma \wedge \delta) \leftrightarrow (\gamma[\varphi//\psi] \wedge \delta)$.
– zastąpienie φ przez ψ tylko w δ, czyli $\chi[\varphi//\psi] := (\gamma \wedge \delta[\varphi//\psi])$.

Stosowanie dowodów indukcyjnych w logice

Przykład 2 – reguła ekstensjonalności

c. $\chi := (\gamma \wedge \delta)$. Do rozważenia mamy trzy (pod)przypadki:
– zastąpienie φ przez ψ tylko w γ, czyli $\chi[\varphi//\psi] := (\gamma[\varphi//\psi] \wedge \delta)$.
Z zał. indukcyjnego mamy $\vdash \gamma \leftrightarrow \gamma[\varphi//\psi]$,
przez lemat 1.b. otrzymujemy $\vdash (\gamma \wedge \delta) \leftrightarrow (\gamma[\varphi//\psi] \wedge \delta)$.
– zastąpienie φ przez ψ tylko w δ, czyli $\chi[\varphi//\psi] := (\gamma \wedge \delta[\varphi//\psi])$.
Analogicznie jak w poprzednim przypadku tylko przez lemat 1.c.

Stosowanie dowodów indukcyjnych w logice

Przykład 2 – reguła ekstensjonalności

c. $\chi := (\gamma \wedge \delta)$. Do rozważenia mamy trzy (pod)przypadki:
– zastąpienie φ przez ψ tylko w γ, czyli $\chi[\varphi//\psi] := (\gamma[\varphi//\psi] \wedge \delta)$.
Z zał. indukcyjnego mamy $\vdash \gamma \leftrightarrow \gamma[\varphi//\psi]$,
przez lemat 1.b. otrzymujemy $\vdash (\gamma \wedge \delta) \leftrightarrow (\gamma[\varphi//\psi] \wedge \delta)$.
– zastąpienie φ przez ψ tylko w δ, czyli $\chi[\varphi//\psi] := (\gamma \wedge \delta[\varphi//\psi])$.
Analogicznie jak w poprzednim przypadku tylko przez lemat 1.c.
– zastąpienie φ przez ψ zarówno w γ jak i w δ, czyli
$\chi[\varphi//\psi] := (\gamma[\varphi//\psi] \wedge \delta[\varphi//\psi])$.

Stosowanie dowodów indukcyjnych w logice

Przykład 2 – reguła ekstensjonalności

c. $\chi := (\gamma \wedge \delta)$. Do rozważenia mamy trzy (pod)przypadki:
– zastąpienie φ przez ψ tylko w γ, czyli $\chi[\varphi//\psi] := (\gamma[\varphi//\psi] \wedge \delta)$.
Z zał. indukcyjnego mamy $\vdash \gamma \leftrightarrow \gamma[\varphi//\psi]$,
przez lemat 1.b. otrzymujemy $\vdash (\gamma \wedge \delta) \leftrightarrow (\gamma[\varphi//\psi] \wedge \delta)$.
– zastąpienie φ przez ψ tylko w δ, czyli $\chi[\varphi//\psi] := (\gamma \wedge \delta[\varphi//\psi])$.
Analogicznie jak w poprzednim przypadku tylko przez lemat 1.c.
– zastąpienie φ przez ψ zarówno w γ jak i w δ, czyli
$\chi[\varphi//\psi] := (\gamma[\varphi//\psi] \wedge \delta[\varphi//\psi])$.
Z zał. indukcyjnego mamy $\vdash \gamma \leftrightarrow \gamma[\varphi//\psi]$ i $\vdash \delta \leftrightarrow \delta[\varphi//\psi]$.

Stosowanie dowodów indukcyjnych w logice

Przykład 2 – reguła ekstensjonalności

c. $\chi := (\gamma \wedge \delta)$. Do rozważenia mamy trzy (pod)przypadki:
– zastąpienie φ przez ψ tylko w γ, czyli $\chi[\varphi//\psi] := (\gamma[\varphi//\psi] \wedge \delta)$.
Z zał. indukcyjnego mamy $\vdash \gamma \leftrightarrow \gamma[\varphi//\psi]$,
przez lemat 1.b. otrzymujemy $\vdash (\gamma \wedge \delta) \leftrightarrow (\gamma[\varphi//\psi] \wedge \delta)$.
– zastąpienie φ przez ψ tylko w δ, czyli $\chi[\varphi//\psi] := (\gamma \wedge \delta[\varphi//\psi])$.
Analogicznie jak w poprzednim przypadku tylko przez lemat 1.c.
– zastąpienie φ przez ψ zarówno w γ jak i w δ, czyli
$\chi[\varphi//\psi] := (\gamma[\varphi//\psi] \wedge \delta[\varphi//\psi])$.
Z zał. indukcyjnego mamy $\vdash \gamma \leftrightarrow \gamma[\varphi//\psi]$ i $\vdash \delta \leftrightarrow \delta[\varphi//\psi]$.
Przez lemat 1.h. otrzymujemy $\vdash (\gamma \wedge \delta) \leftrightarrow (\gamma[\varphi//\psi] \wedge \delta[\varphi//\psi])$.

Stosowanie dowodów indukcyjnych w logice

Przykład 2 – reguła ekstensjonalności

c. $\chi := (\gamma \wedge \delta)$. Do rozważenia mamy trzy (pod)przypadki:
– zastąpienie φ przez ψ tylko w γ, czyli $\chi[\varphi//\psi] := (\gamma[\varphi//\psi] \wedge \delta)$.
Z zał. indukcyjnego mamy $\vdash \gamma \leftrightarrow \gamma[\varphi//\psi]$,
przez lemat 1.b. otrzymujemy $\vdash (\gamma \wedge \delta) \leftrightarrow (\gamma[\varphi//\psi] \wedge \delta)$.
– zastąpienie φ przez ψ tylko w δ, czyli $\chi[\varphi//\psi] := (\gamma \wedge \delta[\varphi//\psi])$.
Analogicznie jak w poprzednim przypadku tylko przez lemat 1.c.
– zastąpienie φ przez ψ zarówno w γ jak i w δ, czyli
$\chi[\varphi//\psi] := (\gamma[\varphi//\psi] \wedge \delta[\varphi//\psi])$.
Z zał. indukcyjnego mamy $\vdash \gamma \leftrightarrow \gamma[\varphi//\psi]$ i $\vdash \delta \leftrightarrow \delta[\varphi//\psi]$.
Przez lemat 1.h. otrzymujemy $\vdash (\gamma \wedge \delta) \leftrightarrow (\gamma[\varphi//\psi] \wedge \delta[\varphi//\psi])$.
d. i e. dowodzimy tak jak c. w oparciu o lemat 1. (odpowiednie przypadki dla $\vee$ i $\rightarrow$).

Stosowanie dowodów indukcyjnych w logice

Przykład 2 – reguła ekstensjonalności

c. $\chi := (\gamma \wedge \delta)$. Do rozważenia mamy trzy (pod)przypadki:
– zastąpienie φ przez ψ tylko w γ, czyli $\chi[\varphi//\psi] := (\gamma[\varphi//\psi] \wedge \delta)$.
Z zał. indukcyjnego mamy $\vdash \gamma \leftrightarrow \gamma[\varphi//\psi]$,
przez lemat 1.b. otrzymujemy $\vdash (\gamma \wedge \delta) \leftrightarrow (\gamma[\varphi//\psi] \wedge \delta)$.
– zastąpienie φ przez ψ tylko w δ, czyli $\chi[\varphi//\psi] := (\gamma \wedge \delta[\varphi//\psi])$.
Analogicznie jak w poprzednim przypadku tylko przez lemat 1.c.
– zastąpienie φ przez ψ zarówno w γ jak i w δ, czyli
$\chi[\varphi//\psi] := (\gamma[\varphi//\psi] \wedge \delta[\varphi//\psi])$.
Z zał. indukcyjnego mamy $\vdash \gamma \leftrightarrow \gamma[\varphi//\psi]$ i $\vdash \delta \leftrightarrow \delta[\varphi//\psi]$.
Przez lemat 1.h. otrzymujemy $\vdash (\gamma \wedge \delta) \leftrightarrow (\gamma[\varphi//\psi] \wedge \delta[\varphi//\psi])$.
d. i e. dowodzimy tak jak c. w oparciu o lemat 1. (odpowiednie przypadki dla $\vee$ i $\rightarrow$).
Uwaga: powyższe twierdzenie można udowodnić przez indukcję strukturalną – potraktujcie to jako ćwiczenie

Stosowanie dowodów indukcyjnych w logice

Przykład 3 – twierdzenie o dedukcji dla aksjomatycznego systemu **KRZ**

Stosowanie dowodów indukcyjnych w logice

Przykład 3 – twierdzenie o dedukcji dla aksjomatycznego systemu **KRZ**

Przypomnijmy sobie (pewien) system aksjomatyczny dla **KRZ**

Stosowanie dowodów indukcyjnych w logice

Przykład 3 – twierdzenie o dedukcji dla aksjomatycznego systemu **KRZ**

Przypomnijmy sobie (pewien) system aksjomatyczny dla **KRZ**
Aksjomatem jest dowolna formuła podpadająca pod jeden z poniższych schematów:

Stosowanie dowodów indukcyjnych w logice

Przykład 3 – twierdzenie o dedukcji dla aksjomatycznego systemu **KRZ**

Przypomnijmy sobie (pewien) system aksjomatyczny dla **KRZ**
Aksjomatem jest dowolna formuła podpadająca pod jeden z poniższych schematów:

1. $\varphi \to (\psi \to \varphi)$
2. $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$
3. $\varphi \wedge \psi \to \varphi$; i $\varphi \wedge \psi \to \psi$
4. $\varphi \to (\psi \to \varphi \wedge \psi)$
5. $\varphi \to \varphi \vee \psi$; i $\psi \to \varphi \vee \psi$
6. $(\varphi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \vee \psi \to \chi))$
7. $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$

Stosowanie dowodów indukcyjnych w logice

Przykład 3 – twierdzenie o dedukcji dla aksjomatycznego systemu **KRZ**

Przypomnijmy sobie (pewien) system aksjomatyczny dla **KRZ**
Aksjomatem jest dowolna formuła podpadająca pod jeden z poniższych schematów:

1. $\varphi \to (\psi \to \varphi)$
2. $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$
3. $\varphi \wedge \psi \to \varphi$; i $\varphi \wedge \psi \to \psi$
4. $\varphi \to (\psi \to \varphi \wedge \psi)$
5. $\varphi \to \varphi \vee \psi$; i $\psi \to \varphi \vee \psi$
6. $(\varphi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \vee \psi \to \chi))$
7. $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$

Jedyną regułą jest reguła MP.

Stosowanie dowodów indukcyjnych w logice

Przykład 3 – twierdzenie o dedukcji dla aksjomatycznego systemu **KRZ**

Przypomnijmy sobie (pewien) system aksjomatyczny dla **KRZ**
Aksjomatem jest dowolna formuła podpadająca pod jeden z poniższych schematów:

1. $\varphi \to (\psi \to \varphi)$
2. $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$
3. $\varphi \wedge \psi \to \varphi$; i $\varphi \wedge \psi \to \psi$
4. $\varphi \to (\psi \to \varphi \wedge \psi)$
5. $\varphi \to \varphi \vee \psi$; i $\psi \to \varphi \vee \psi$
6. $(\varphi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \vee \psi \to \chi))$
7. $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$

Jedyną regułą jest reguła MP.

Uwaga: Jest to formalizacja inwariantna (bez reguły podstawiania).

Stosowanie dowodów indukcyjnych w logice

Definicja relacji dowiedlności ($\vdash$) i tezy

Stosowanie dowodów indukcyjnych w logice

Definicja relacji dowiedlności ($\vdash$) i tezy

- $\Gamma \vdash \varphi$ wtw istnieje skończony ciąg formuł (dowód), w którym ostatnim elementem jest φ i gdzie każdy element jest:

Stosowanie dowodów indukcyjnych w logice

Definicja relacji dowiedlności ($\vdash$) i tezy

- $\Gamma \vdash \varphi$ wtw istnieje skończony ciąg formuł (dowód), w którym ostatnim elementem jest φ i gdzie każdy element jest:
  - podstawieniem aksjomatu lub

Stosowanie dowodów indukcyjnych w logice

Definicja relacji dowiedlności ($\vdash$) i tezy

- $\Gamma \vdash \varphi$ wtw istnieje skończony ciąg formuł (dowód), w którym ostatnim elementem jest φ i gdzie każdy element jest:
  - podstawieniem aksjomatu lub
  - elementem zbioru Γ (założeniem) lub

Stosowanie dowodów indukcyjnych w logice

Definicja relacji dowiedlności ($\vdash$) i tezy

- $\Gamma \vdash \varphi$ wtw istnieje skończony ciąg formuł (dowód), w którym ostatnim elementem jest φ i gdzie każdy element jest:
  - podstawieniem aksjomatu lub
  - elementem zbioru Γ (założeniem) lub
  - wynikiem zastosowania MP do poprzedzających wyrazów ciągu

Stosowanie dowodów indukcyjnych w logice

Definicja relacji dowiedlności ($\vdash$) i tezy

- $\Gamma \vdash \varphi$ wtw istnieje skończony ciąg formuł (dowód), w którym ostatnim elementem jest φ i gdzie każdy element jest:
  - podstawieniem aksjomatu lub
  - elementem zbioru Γ (założeniem) lub
  - wynikiem zastosowania MP do poprzedzających wyrazów ciągu
- $\vdash \varphi$ wtw $\varnothing \vdash \varphi$ (φ jest tezą)

Stosowanie dowodów indukcyjnych w logice

Definicja relacji dowiedlności ($\vdash$) i tezy

- $\Gamma \vdash \varphi$ wtw istnieje skończony ciąg formuł (dowód), w którym ostatnim elementem jest φ i gdzie każdy element jest:
  - podstawieniem aksjomatu lub
  - elementem zbioru Γ (założeniem) lub
  - wynikiem zastosowania MP do poprzedzających wyrazów ciągu
- $\vdash \varphi$ wtw $\varnothing \vdash \varphi$ (φ jest tezą)

Uwaga: Zauważ, że definicja dowiedlności ma charakter rekurencyjny.

Stosowanie dowodów indukcyjnych w logice

Twierdzenie o dedukcji dla KRZ: jeżeli $\Gamma, \varphi \vdash \psi$, to $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$

Stosowanie dowodów indukcyjnych w logice

Twierdzenie o dedukcji dla KRZ: jeżeli $\Gamma, \varphi \vdash \psi$, to $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$

Dowód przez mocną indukcję po długości dowodu $\Gamma, \varphi \vdash \psi$.

Stosowanie dowodów indukcyjnych w logice

Twierdzenie o dedukcji dla KRZ: jeżeli $\Gamma, \varphi \vdash \psi$, to $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$

Dowód przez mocną indukcję po długości dowodu $\Gamma, \varphi \vdash \psi$.
Z definicji $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ oznacza, że istnieje skończony ciąg $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, z $\gamma_n := \psi$. Wykazujemy, że dla dowolnego $1 \leq i \leq n$ zachodzi twierdzenie, tzn., że $\Gamma \vdash \varphi \to \gamma_i$ przy założeniu indukcyjnym, że zachodzi dla dowolnego $j < i$.

Stosowanie dowodów indukcyjnych w logice

Twierdzenie o dedukcji dla KRZ: jeżeli $\Gamma, \varphi \vdash \psi$, to $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$

Dowód przez mocną indukcję po długości dowodu $\Gamma, \varphi \vdash \psi$.
Z definicji $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ oznacza, że istnieje skończony ciąg $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, z $\gamma_n := \psi$. Wykazujemy, że dla dowolnego $1 \leq i \leq n$ zachodzi twierdzenie, tzn., że $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \gamma_i$ przy założeniu indukcyjnym, że zachodzi dla dowolnego $j < i$.
Mamy 4 przypadki do rozważenia:

Stosowanie dowodów indukcyjnych w logice

Twierdzenie o dedukcji dla KRZ: jeżeli $\Gamma, \varphi \vdash \psi$, to $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$

Dowód przez mocną indukcję po długości dowodu $\Gamma, \varphi \vdash \psi$.
Z definicji $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ oznacza, że istnieje skończony ciąg $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, z $\gamma_n := \psi$. Wykazujemy, że dla dowolnego $1 \leq i \leq n$ zachodzi twierdzenie, tzn., że $\Gamma \vdash \varphi \to \gamma_i$ przy założeniu indukcyjnym, że zachodzi dla dowolnego $j < i$.
Mamy 4 przypadki do rozważenia:
a. $\gamma_i \in \Gamma$: dołączamy do dowodu podstawienie aksjomatu 1. o postaci $\gamma_i \to (\varphi \to \gamma_i)$ i stosujemy MP otrzymując $\varphi \to \gamma_i$.
b. $\gamma_i := \varphi$: włączamy do dowodu podstawienie aksjomatu 1. o postaci $\varphi \to (\varphi \to \varphi)$ i przez MP otrzymujemy $\varphi \to \varphi$

Stosowanie dowodów indukcyjnych w logice

Twierdzenie o dedukcji dla KRZ: jeżeli $\Gamma, \varphi \vdash \psi$, to $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$

Stosowanie dowodów indukcyjnych w logice

Twierdzenie o dedukcji dla KRZ: jeżeli $\Gamma, \varphi \vdash \psi$, to $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$

c. γ_i jest aksjomatem – postępujemy jak w przypadku a.

Stosowanie dowodów indukcyjnych w logice

Twierdzenie o dedukcji dla KRZ: jeżeli $\Gamma, \varphi \vdash \psi$, to $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$

c. γ_i jest aksjomatem – postępujemy jak w przypadku a.

d. γ_i zostało wydedukowane przez MP z wcześniejszych wierszy dowodu o postaci γ_j $(j < i)$ i $\gamma_j \rightarrow \gamma_i$.

Stosowanie dowodów indukcyjnych w logice

Twierdzenie o dedukcji dla KRZ: jeżeli $\Gamma, \varphi \vdash \psi$, to $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$

c. γ_i jest aksjomatem – postępujemy jak w przypadku a.
d. γ_i zostało wydedukowane przez MP z wcześniejszych wierszy dowodu o postaci γ_j $(j < i)$ i $\gamma_j \to \gamma_i$.
Ponieważ obie przesłanki podpadają pod założenie indukcyjne zatem mamy $\varphi \to (\gamma_j \to \gamma_i)$ i $\varphi \to \gamma_j$.

Stosowanie dowodów indukcyjnych w logice

Twierdzenie o dedukcji dla KRZ: jeżeli $\Gamma, \varphi \vdash \psi$, to $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$

c. γ_i jest aksjomatem – postępujemy jak w przypadku a.
d. γ_i zostało wydedukowane przez MP z wcześniejszych wierszy dowodu o postaci γ_j ($j < i$) i $\gamma_j \rightarrow \gamma_i$.
Ponieważ obie przesłanki podpadają pod założenie indukcyjne zatem mamy $\varphi \rightarrow (\gamma_j \rightarrow \gamma_i)$ i $\varphi \rightarrow \gamma_j$.
Wprowadzamy do dowodu podstawienie aksjomatu 2 postaci: $(\varphi \rightarrow (\gamma_j \rightarrow \gamma_i)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \gamma_j) \rightarrow (\varphi \rightarrow \gamma_i))$. Podwójne zastosowanie MP daje nam $\varphi \rightarrow \gamma_i$.

Stosowanie dowodów indukcyjnych w logice

Twierdzenie o dedukcji dla KRZ: jeżeli $\Gamma, \varphi \vdash \psi$, to $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$

c. γ_i jest aksjomatem – postępujemy jak w przypadku a.
d. γ_i zostało wydedukowane przez MP z wcześniejszych wierszy dowodu o postaci γ_j ($j < i$) i $\gamma_j \to \gamma_i$.
Ponieważ obie przesłanki podpadają pod założenie indukcyjne zatem mamy $\varphi \to (\gamma_j \to \gamma_i)$ i $\varphi \to \gamma_j$.
Wprowadzamy do dowodu podstawienie aksjomatu 2 postaci: $(\varphi \to (\gamma_j \to \gamma_i)) \to ((\varphi \to \gamma_j) \to (\varphi \to \gamma_i))$. Podwójne zastosowanie MP daje nam $\varphi \to \gamma_i$.
Zatem, w szczególności twierdzenie zachodzi dla ψ (przypadek $i = n$), czyli $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$

Stosowanie dowodów indukcyjnych w logice

Inne zastosowania indukcji – przepis na życie wieczne

Stosowanie dowodów indukcyjnych w logice

Inne zastosowania indukcji – przepis na życie wieczne

Raymond Smullyann radzi:

Stosowanie dowodów indukcyjnych w logice

Inne zastosowania indukcji – przepis na życie wieczne

Raymond Smullyann radzi:

1. Zawsze mów prawdę

Stosowanie dowodów indukcyjnych w logice

Inne zastosowania indukcji – przepis na życie wieczne

Raymond Smullyann radzi:

1. Zawsze mów prawdę
2. codziennie mów "jutro powtórzę to zdanie"

Stosowanie dowodów indukcyjnych w logice

Inne zastosowania indukcji – przepis na życie wieczne

Raymond Smullyann radzi:

1. Zawsze mów prawdę
2. codziennie mów "jutro powtórzę to zdanie"

Dowiedź przez indukcję, że stosując te dwie zasady nigdy nie umrzesz:-)

Konstrukcja systemu aksjomatycznego

System aksjomatyczny H standardowo buduje się w następujących etapach:

Konstrukcja systemu aksjomatycznego

System aksjomatyczny H standardowo buduje się w następujących etapach:

1. wyznaczamy zbiór aksjomatów Aks (lub ich schematów – ujęcie inwariantne)

Konstrukcja systemu aksjomatycznego

System aksjomatyczny H standardowo buduje się w następujących etapach:

1. wyznaczamy zbiór aksjomatów Aks (lub ich schematów – ujęcie inwariantne)
2. określamy zbiór pierwotnych reguł inferencji R

Konstrukcja systemu aksjomatycznego

System aksjomatyczny H standardowo buduje się w następujących etapach:

1. wyznaczamy zbiór aksjomatów Aks (lub ich schematów – ujęcie inwariantne)
2. określamy zbiór pierwotnych reguł inferencji R
3. definiujemy pojęcie dowodu (jako ciągu lub drzewa)

Konstrukcja systemu aksjomatycznego

System aksjomatyczny H standardowo buduje się w następujących etapach:

1. wyznaczamy zbiór aksjomatów Aks (lub ich schematów – ujęcie inwariantne)
2. określamy zbiór pierwotnych reguł inferencji R
3. definiujemy pojęcie dowodu (jako ciągu lub drzewa)
4. definiujemy pojęcie tezy systemu H jako formuły mającej dowód

Konstrukcja systemu aksjomatycznego

System aksjomatyczny H standardowo buduje się w następujących etapach:

1. wyznaczamy zbiór aksjomatów Aks (lub ich schematów – ujęcie inwariantne)
2. określamy zbiór pierwotnych reguł inferencji R
3. definiujemy pojęcie dowodu (jako ciągu lub drzewa)
4. definiujemy pojęcie tezy systemu H jako formuły mającej dowód
5. wprowadzamy relację dowiedlności $\vdash_H$

Konstrukcja systemu aksjomatycznego

System aksjomatyczny H standardowo buduje się w następujących etapach:

1. wyznaczamy zbiór aksjomatów Aks (lub ich schematów – ujęcie inwariantne)
2. określamy zbiór pierwotnych reguł inferencji R
3. definiujemy pojęcie dowodu (jako ciągu lub drzewa)
4. definiujemy pojęcie tezy systemu H jako formuły mającej dowód
5. wprowadzamy relację dowiedlności $\vdash_H$

Uwaga1: czasem pojęcie tezy definiuje się bezpośrednio (rekurencyjnie) w terminach 1. i 2.

Konstrukcja systemu aksjomatycznego

System aksjomatyczny H standardowo buduje się w następujących etapach:

1. wyznaczamy zbiór aksjomatów Aks (lub ich schematów – ujęcie inwariantne)
2. określamy zbiór pierwotnych reguł inferencji R
3. definiujemy pojęcie dowodu (jako ciągu lub drzewa)
4. definiujemy pojęcie tezy systemu H jako formuły mającej dowód
5. wprowadzamy relację dowiedlności $\vdash_H$

Uwaga1: czasem pojęcie tezy definiuje się bezpośrednio (rekurencyjnie) w terminach 1. i 2.
TH to najmniejszy zbiór zawierający Aks i domknięty na R.

Konstrukcja systemu aksjomatycznego

System aksjomatyczny H standardowo buduje się w następujących etapach:

1. wyznaczamy zbiór aksjomatów Aks (lub ich schematów – ujęcie inwariantne)
2. określamy zbiór pierwotnych reguł inferencji R
3. definiujemy pojęcie dowodu (jako ciągu lub drzewa)
4. definiujemy pojęcie tezy systemu H jako formuły mającej dowód
5. wprowadzamy relację dowiedlności $\vdash_H$

Uwaga1: czasem pojęcie tezy definiuje się bezpośrednio (rekurencyjnie) w terminach 1. i 2.
TH to najmniejszy zbiór zawierający Aks i domknięty na R.
Uwaga2: czasem zamiast 3. wprowadzamy od razu 5. a pojęcie dowodu i tezy definiujemy jako przypadek z pustym zbiorem

Konstrukcja systemu aksjomatycznego

Konkrety – System aksjomatyczny Hilberta dla **KRZ**:

Konstrukcja systemu aksjomatycznego

Konkrety – System aksjomatyczny Hilberta dla **KRZ**:

Aksjomatem jest dowolna formuła podpadająca pod jeden z poniższych schematów:

Konstrukcja systemu aksjomatycznego

Konkrety – System aksjomatyczny Hilberta dla **KRZ**:

Aksjomatem jest dowolna formuła podpadająca pod jeden z poniższych schematów:

1. $\varphi \to (\psi \to \varphi)$
2. $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$
3. $\varphi \land \psi \to \varphi$; i $\varphi \land \psi \to \psi$
4. $\varphi \to (\psi \to \varphi \land \psi)$
5. $\varphi \to \varphi \lor \psi$; i $\psi \to \varphi \lor \psi$
6. $(\varphi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \lor \psi \to \chi))$
7. $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$

Konstrukcja systemu aksjomatycznego

Konkrety – System aksjomatyczny Hilberta dla **KRZ**:

Aksjomatem jest dowolna formuła podpadająca pod jeden z poniższych schematów:

1. $\varphi \to (\psi \to \varphi)$
2. $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$
3. $\varphi \wedge \psi \to \varphi$; i $\varphi \wedge \psi \to \psi$
4. $\varphi \to (\psi \to \varphi \wedge \psi)$
5. $\varphi \to \varphi \vee \psi$; i $\psi \to \varphi \vee \psi$
6. $(\varphi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \vee \psi \to \chi))$
7. $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$

Jedyną regułą jest reguła MP.

Konstrukcja systemu aksjomatycznego

Konkrety – System aksjomatyczny Hilberta dla KRZ:

Aksjomatem jest dowolna formuła podpadająca pod jeden z poniższych schematów:

1. $\varphi \to (\psi \to \varphi)$
2. $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$
3. $\varphi \wedge \psi \to \varphi$; i $\varphi \wedge \psi \to \psi$
4. $\varphi \to (\psi \to \varphi \wedge \psi)$
5. $\varphi \to \varphi \vee \psi$; i $\psi \to \varphi \vee \psi$
6. $(\varphi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \vee \psi \to \chi))$
7. $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$

Jedyną regułą jest reguła MP.

Uwaga: Jest to formalizacja inwariantna (bez reguły podstawiania).

Konstrukcja systemu aksjomatycznego

Dowód, teza, dowiedlność:

Konstrukcja systemu aksjomatycznego

Dowód, teza, dowiedlność:

- Dowód φ to ciąg formuł, którego dowolny element jest aksjomatem lub został wyprowadzony z poprzednich elementów za pomocą reguł pierwotnych systemu, a ostatni element to φ.

Konstrukcja systemu aksjomatycznego

Dowód, teza, dowiedlność:

- Dowód φ to ciąg formuł, którego dowolny element jest aksjomatem lub został wyprowadzony z poprzednich elementów za pomocą reguł pierwotnych systemu, a ostatni element to φ.
- $\vdash_H \varphi$ (φ jest tezą systemu H) wtw, istnieje dowód φ w systemie H.

Konstrukcja systemu aksjomatycznego

Dowód, teza, dowiedlność:

- Dowód φ to ciąg formuł, którego dowolny element jest aksjomatem lub został wyprowadzony z poprzednich elementów za pomocą reguł pierwotnych systemu, a ostatni element to φ.
- $\vdash_H \varphi$ (φ jest tezą systemu H) wtw, istnieje dowód φ w systemie H.
- $\Gamma \vdash_H \varphi$ wtw:

Konstrukcja systemu aksjomatycznego

Dowód, teza, dowiedlność:

- Dowód φ to ciąg formuł, którego dowolny element jest aksjomatem lub został wyprowadzony z poprzednich elementów za pomocą reguł pierwotnych systemu, a ostatni element to φ.
- $\vdash_H \varphi$ (φ jest tezą systemu H) wtw, istnieje dowód φ w systemie H.
- $\Gamma \vdash_H \varphi$ wtw:
  1. istnieje dowód φ, którego elementami są dodatkowo formuły z Γ

Konstrukcja systemu aksjomatycznego

Dowód, teza, dowiedlność:

- Dowód φ to ciąg formuł, którego dowolny element jest aksjomatem lub został wyprowadzony z poprzednich elementów za pomocą reguł pierwotnych systemu, a ostatni element to φ.
- $\vdash_H \varphi$ (φ jest tezą systemu H) wtw, istnieje dowód φ w systemie H.
- $\Gamma \vdash_H \varphi$ wtw:
  1. istnieje dowód φ, którego elementami są dodatkowo formuły z Γ
  2. $\vdash_H \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n \rightarrow \varphi$ (gdzie $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \subseteq \Gamma$)

Konstrukcja systemu aksjomatycznego

Definicje relacji dowiedlności – uwagi:

Konstrukcja systemu aksjomatycznego

Definicje relacji dowiedlności – uwagi:

Uwaga1: podane charakterystyki $\vdash_H$ generalnie nie są równoważne! ale dla podanej aksjomatyzacji **KRZ** tak.

Konstrukcja systemu aksjomatycznego

Definicje relacji dowiedlności – uwagi:

Uwaga1: podane charakterystyki $\vdash_H$ generalnie nie są równoważne! ale dla podanej aksjomatyzacji **KRZ** tak.
Uwaga2: zazwyczaj $\vdash$ występuje z indeksami oznaczającymi w jakiej logice, lub w jakim systemie/teorii zachodzi ta relacja, np. $\vdash_H, \vdash_{H-L}, \vdash_L^S$; ponieważ zajmujemy się tu tylko logiką klasyczną i (w danym momencie systemem aksjomatycznym H) więc ten dodatek dalej pomijamy.

Konstrukcja systemu aksjomatycznego

Definicje relacji dowiedlności – uwagi:

Uwaga1: podane charakterystyki $\vdash_H$ generalnie nie są równoważne! ale dla podanej aksjomatyzacji **KRZ** tak.

Uwaga2: zazwyczaj $\vdash$ występuje z indeksami oznaczającymi w jakiej logice, lub w jakim systemie/teorii zachodzi ta relacja, np. $\vdash_H, \vdash_{H-L}, \vdash_L^S$; ponieważ zajmujemy się tu tylko logiką klasyczną i (w danym momencie systemem aksjomatycznym H) więc ten dodatek dalej pomijamy.

Uwaga3: będziemy używać dalej symbolu $Cn(\Gamma)$ na określenie zbioru wszystkich formuł dedukowalnych z Γ (zbioru jego logicznych konsekwencji) tj.

$$Cn(\Gamma) = \{\varphi : \Gamma \vdash \varphi\}$$

Własności relacji dowiedlności:

Lemat1: Własności strukturalne relacji dowiedlności:

Własności relacji dowiedlności:

Lemat1: Własności strukturalne relacji dowiedlności:

1. $\vdash \varphi$ wtw $\varnothing \vdash \varphi$

Własności relacji dowiedlności:

Lemat1: Własności strukturalne relacji dowiedlności:

1. $\vdash \varphi$ wtw $\varnothing \vdash \varphi$
2. jeżeli $\varphi \in \Gamma$, to $\Gamma \vdash \varphi$

Własności relacji dowiedlności:

Lemat1: Własności strukturalne relacji dowiedlności:

1. $\vdash \varphi$ wtw $\varnothing \vdash \varphi$
2. jeżeli $\varphi \in \Gamma$, to $\Gamma \vdash \varphi$
3. jeżeli $\Gamma \vdash \varphi$ i $\Gamma \subseteq \Delta$, to $\Delta \vdash \varphi$

Własności relacji dowiedlności:

Lemat1: Własności strukturalne relacji dowiedlności:

1. $\vdash \varphi$ wtw $\varnothing \vdash \varphi$
2. jeżeli $\varphi \in \Gamma$, to $\Gamma \vdash \varphi$
3. jeżeli $\Gamma \vdash \varphi$ i $\Gamma \subseteq \Delta$, to $\Delta \vdash \varphi$
4. $\vdash \varphi$ wtw $\Gamma \vdash \varphi$, dla dowolnego zbioru Γ

Własności relacji dowiedlności:

Lemat1: Własności strukturalne relacji dowiedlności:

1. $\vdash \varphi$ wtw $\varnothing \vdash \varphi$
2. jeżeli $\varphi \in \Gamma$, to $\Gamma \vdash \varphi$
3. jeżeli $\Gamma \vdash \varphi$ i $\Gamma \subseteq \Delta$, to $\Delta \vdash \varphi$
4. $\vdash \varphi$ wtw $\Gamma \vdash \varphi$, dla dowolnego zbioru Γ
5. jeżeli $\Gamma \vdash \varphi$ i $\Delta, \varphi \vdash \psi$, to $\Gamma, \Delta \vdash \psi$

Własności relacji dowiedlności:

Lemat1: Własności strukturalne relacji dowiedlności:

1. $\vdash \varphi$ wtw $\varnothing \vdash \varphi$
2. jeżeli $\varphi \in \Gamma$, to $\Gamma \vdash \varphi$
3. jeżeli $\Gamma \vdash \varphi$ i $\Gamma \subseteq \Delta$, to $\Delta \vdash \varphi$
4. $\vdash \varphi$ wtw $\Gamma \vdash \varphi$, dla dowolnego zbioru Γ
5. jeżeli $\Gamma \vdash \varphi$ i $\Delta, \varphi \vdash \psi$, to $\Gamma, \Delta \vdash \psi$
6. $\Gamma \vdash \varphi$ wtw $\Delta \vdash \varphi$, dla pewnego skończonego $\Delta \subseteq \Gamma$

Własności relacji dowiedlności:

Dowody własności strukturalnych relacji dowiedlności:

Własności relacji dowiedlności:

Dowody własności strukturalnych relacji dowiedlności:

ad 1. $\vdash \varphi$ wtw $\varnothing \vdash \varphi$

Własności relacji dowiedlności:

Dowody własności strukturalnych relacji dowiedlności:

ad 1. $\vdash \varphi$ wtw $\varnothing \vdash \varphi$

dowód z definicji tezy i relacji $\vdash$; φ jest tezą wtw w jej dowodzie nie ma założeń.

Własności relacji dowiedlności:

Dowody własności strukturalnych relacji dowiedlności:

ad 1. $\vdash \varphi$ wtw $\varnothing \vdash \varphi$
dowód z definicji tezy i relacji $\vdash$; φ jest tezą wtw w jej dowodzie nie ma założeń.
ad 2. jeżeli $\varphi \in \Gamma$, to $\Gamma \vdash \varphi$

Własności relacji dowiedlności:

Dowody własności strukturalnych relacji dowiedlności:

ad 1. $\vdash \varphi$ wtw $\varnothing \vdash \varphi$
dowód z definicji tezy i relacji $\vdash$; φ jest tezą wtw w jej dowodzie nie ma założeń.
ad 2. jeżeli $\varphi \in \Gamma$, to $\Gamma \vdash \varphi$
dowód z definicji relacji $\vdash$

Własności relacji dowiedlności:

Dowody własności strukturalnych relacji dowiedlności:

ad 1. $\vdash \varphi$ wtw $\varnothing \vdash \varphi$
dowód z definicji tezy i relacji $\vdash$; φ jest tezą wtw w jej dowodzie nie ma założeń.
ad 2. jeżeli $\varphi \in \Gamma$, to $\Gamma \vdash \varphi$
dowód z definicji relacji $\vdash$
ad 3. jeżeli $\Gamma \vdash \varphi$ i $\Gamma \subseteq \Delta$, to $\Delta \vdash \varphi$

Własności relacji dowiedlności:

Dowody własności strukturalnych relacji dowiedlności:

ad 1. $\vdash \varphi$ wtw $\varnothing \vdash \varphi$
dowód z definicji tezy i relacji $\vdash$; φ jest tezą wtw w jej dowodzie nie ma założeń.
ad 2. jeżeli $\varphi \in \Gamma$, to $\Gamma \vdash \varphi$
dowód z definicji relacji $\vdash$
ad 3. jeżeli $\Gamma \vdash \varphi$ i $\Gamma \subseteq \Delta$, to $\Delta \vdash \varphi$
jw.

Własności relacji dowiedlności:

Dowody własności strukturalnych relacji dowiedlności:

Własności relacji dowiedlności:

Dowody własności strukturalnych relacji dowiedlności:

ad 4. $\vdash \varphi$ wtw $\Gamma \vdash \varphi$, dla dowolnego zbioru Γ

Własności relacji dowiedlności:

Dowody własności strukturalnych relacji dowiedlności:

ad 4. $\vdash \varphi$ wtw $\Gamma \vdash \varphi$, dla dowolnego zbioru Γ
dowód $\Longrightarrow$ przez własość 1. i 3., gdyż $\varnothing \subseteq \Gamma$, dla dowolnego zbioru Γ. $\Longleftarrow$ jeżeli φ jest dedukowalne z każdego zbioru to i z pustego, zatem jest tezą.

Własności relacji dowiedlności:

Dowody własności strukturalnych relacji dowiedlności:

ad 4. $\vdash \varphi$ wtw $\Gamma \vdash \varphi$, dla dowolnego zbioru Γ
dowód $\Longrightarrow$ przez własość 1. i 3., gdyż $\varnothing \subseteq \Gamma$, dla dowolnego zbioru Γ. $\Longleftarrow$ jeżeli φ jest dedukowalne z każdego zbioru to i z pustego, zatem jest tezą.

ad 5. jeżeli $\Gamma \vdash \varphi$ i $\Delta, \varphi \vdash \psi$, to $\Gamma, \Delta \vdash \psi$

Własności relacji dowiedlności:

Dowody własności strukturalnych relacji dowiedlności:

ad 4. $\vdash \varphi$ wtw $\Gamma \vdash \varphi$, dla dowolnego zbioru Γ
dowód $\Longrightarrow$ przez własość 1. i 3., gdyż $\varnothing \subseteq \Gamma$, dla dowolnego zbioru Γ. $\Longleftarrow$ jeżeli φ jest dedukowalne z każdego zbioru to i z pustego, zatem jest tezą.
ad 5. jeżeli $\Gamma \vdash \varphi$ i $\Delta, \varphi \vdash \psi$, to $\Gamma, \Delta \vdash \psi$
dowód: z drugiego założenia przez TD mamy $\Delta \vdash \varphi \to \psi$, łącząc to z dowodem $\Gamma \vdash \varphi$ przez MP otrzymujemy $\Gamma, \Delta \vdash \psi$.

Własności relacji dowiedlności:

Dowody własności strukturalnych relacji dowiedlności:

ad 4. $\vdash \varphi$ wtw $\Gamma \vdash \varphi$, dla dowolnego zbioru Γ
dowód $\Longrightarrow$ przez własość 1. i 3., gdyż $\varnothing \subseteq \Gamma$, dla dowolnego zbioru Γ. $\Longleftarrow$ jeżeli φ jest dedukowalne z każdego zbioru to i z pustego, zatem jest tezą.
ad 5. jeżeli $\Gamma \vdash \varphi$ i $\Delta, \varphi \vdash \psi$, to $\Gamma, \Delta \vdash \psi$
dowód: z drugiego założenia przez TD mamy $\Delta \vdash \varphi \rightarrow \psi$, łącząc to z dowodem $\Gamma \vdash \varphi$ przez MP otrzymujemy $\Gamma, \Delta \vdash \psi$.
ad 6. $\Gamma \vdash \varphi$ wtw $\Delta \vdash \varphi$, dla pewnego skończonego $\Delta \subseteq \Gamma$

Własności relacji dowiedlności:

Dowody własności strukturalnych relacji dowiedlności:

ad 4. $\vdash \varphi$ wtw $\Gamma \vdash \varphi$, dla dowolnego zbioru Γ
dowód $\Longrightarrow$ przez własość 1. i 3., gdyż $\varnothing \subseteq \Gamma$, dla dowolnego zbioru Γ. $\Longleftarrow$ jeżeli φ jest dedukowalne z każdego zbioru to i z pustego, zatem jest tezą.
ad 5. jeżeli $\Gamma \vdash \varphi$ i $\Delta, \varphi \vdash \psi$, to $\Gamma, \Delta \vdash \psi$
dowód: z drugiego założenia przez TD mamy $\Delta \vdash \varphi \rightarrow \psi$, łącząc to z dowodem $\Gamma \vdash \varphi$ przez MP otrzymujemy $\Gamma, \Delta \vdash \psi$.
ad 6. $\Gamma \vdash \varphi$ wtw $\Delta \vdash \varphi$, dla pewnego skończonego $\Delta \subseteq \Gamma$
dowód $\Longleftarrow$ oczywisty; $\Longrightarrow$ też, bo każdy dowód to skończony ciąg formuł.

Własności relacji dowiedlności:

Lemat2: Własności logiczne relacji dowiedlności:

Własności relacji dowiedlności:

Lemat2: Własności logiczne relacji dowiedlności:

1. $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ wtw $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$

Własności relacji dowiedlności:

Lemat2: Własności logiczne relacji dowiedlności:

1. $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ wtw $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$
2. $\Gamma, \varphi, \psi \vdash \chi$ wtw $\Gamma, \varphi \land \psi \vdash \chi$

Własności relacji dowiedlności:

Lemat2: Własności logiczne relacji dowiedlności:

1. $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ wtw $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$
2. $\Gamma, \varphi, \psi \vdash \chi$ wtw $\Gamma, \varphi \wedge \psi \vdash \chi$
3. jeżeli $\Gamma \vdash \varphi \vee \psi$ i $\Delta, \varphi \vdash \chi$ i $\Pi, \psi \vdash \chi$, to $\Gamma, \Delta, \Pi \vdash \chi$

Własności relacji dowiedlności:

Lemat2: Własności logiczne relacji dowiedlności:

1. $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ wtw $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$
2. $\Gamma, \varphi, \psi \vdash \chi$ wtw $\Gamma, \varphi \wedge \psi \vdash \chi$
3. jeżeli $\Gamma \vdash \varphi \vee \psi$ i $\Delta, \varphi \vdash \chi$ i $\Pi, \psi \vdash \chi$, to $\Gamma, \Delta, \Pi \vdash \chi$
4. jeżeli $\Gamma, \neg\varphi \vdash \varphi$, to $\Gamma \vdash \varphi$

Własności relacji dowiedlności:

Lemat2: Własności logiczne relacji dowiedlności:

1. $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ wtw $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$
2. $\Gamma, \varphi, \psi \vdash \chi$ wtw $\Gamma, \varphi \wedge \psi \vdash \chi$
3. jeżeli $\Gamma \vdash \varphi \vee \psi$ i $\Delta, \varphi \vdash \chi$ i $\Pi, \psi \vdash \chi$, to $\Gamma, \Delta, \Pi \vdash \chi$
4. jeżeli $\Gamma, \neg\varphi \vdash \varphi$, to $\Gamma \vdash \varphi$
5. jeżeli $\Gamma, \varphi \vdash \neg\varphi$, to $\Gamma \vdash \neg\varphi$

Własności relacji dowiedlności:

Lemat2: Własności logiczne relacji dowiedlności:

1. $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ wtw $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$
2. $\Gamma, \varphi, \psi \vdash \chi$ wtw $\Gamma, \varphi \wedge \psi \vdash \chi$
3. jeżeli $\Gamma \vdash \varphi \vee \psi$ i $\Delta, \varphi \vdash \chi$ i $\Pi, \psi \vdash \chi$, to $\Gamma, \Delta, \Pi \vdash \chi$
4. jeżeli $\Gamma, \neg\varphi \vdash \varphi$, to $\Gamma \vdash \varphi$
5. jeżeli $\Gamma, \varphi \vdash \neg\varphi$, to $\Gamma \vdash \neg\varphi$
6. $\Gamma, \neg\varphi \vdash \bot$ wtw $\Gamma \vdash \varphi$

Własności relacji dowiedlności:

Lemat2: Własności logiczne relacji dowiedlności:

1. $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ wtw $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$
2. $\Gamma, \varphi, \psi \vdash \chi$ wtw $\Gamma, \varphi \land \psi \vdash \chi$
3. jeżeli $\Gamma \vdash \varphi \lor \psi$ i $\Delta, \varphi \vdash \chi$ i $\Pi, \psi \vdash \chi$, to $\Gamma, \Delta, \Pi \vdash \chi$
4. jeżeli $\Gamma, \neg\varphi \vdash \varphi$, to $\Gamma \vdash \varphi$
5. jeżeli $\Gamma, \varphi \vdash \neg\varphi$, to $\Gamma \vdash \neg\varphi$
6. $\Gamma, \neg\varphi \vdash \bot$ wtw $\Gamma \vdash \varphi$
7. jeżeli $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ i $\Delta, \neg\varphi \vdash \psi$, to $\Gamma, \Delta \vdash \psi$

Własności relacji dowiedlności:

Lemat2: Własności logiczne relacji dowiedlności:

1. $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ wtw $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$
2. $\Gamma, \varphi, \psi \vdash \chi$ wtw $\Gamma, \varphi \wedge \psi \vdash \chi$
3. jeżeli $\Gamma \vdash \varphi \vee \psi$ i $\Delta, \varphi \vdash \chi$ i $\Pi, \psi \vdash \chi$, to $\Gamma, \Delta, \Pi \vdash \chi$
4. jeżeli $\Gamma, \neg\varphi \vdash \varphi$, to $\Gamma \vdash \varphi$
5. jeżeli $\Gamma, \varphi \vdash \neg\varphi$, to $\Gamma \vdash \neg\varphi$
6. $\Gamma, \neg\varphi \vdash \perp$ wtw $\Gamma \vdash \varphi$
7. jeżeli $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ i $\Delta, \neg\varphi \vdash \psi$, to $\Gamma, \Delta \vdash \psi$
8. jeżeli $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ i $\Delta, \varphi \vdash \neg\psi$, to $\Gamma, \Delta \vdash \neg\varphi$

Własności relacji dowiedlności:

Lemat2: Własności logiczne relacji dowiedlności:

1. $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ wtw $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$
2. $\Gamma, \varphi, \psi \vdash \chi$ wtw $\Gamma, \varphi \wedge \psi \vdash \chi$
3. jeżeli $\Gamma \vdash \varphi \vee \psi$ i $\Delta, \varphi \vdash \chi$ i $\Pi, \psi \vdash \chi$, to $\Gamma, \Delta, \Pi \vdash \chi$
4. jeżeli $\Gamma, \neg\varphi \vdash \varphi$, to $\Gamma \vdash \varphi$
5. jeżeli $\Gamma, \varphi \vdash \neg\varphi$, to $\Gamma \vdash \neg\varphi$
6. $\Gamma, \neg\varphi \vdash \perp$ wtw $\Gamma \vdash \varphi$
7. jeżeli $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ i $\Delta, \neg\varphi \vdash \psi$, to $\Gamma, \Delta \vdash \psi$
8. jeżeli $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ i $\Delta, \varphi \vdash \neg\psi$, to $\Gamma, \Delta \vdash \neg\varphi$
9. jeżeli $\Gamma \vdash \varphi$ i $\Delta \vdash \neg\varphi$, to $\Gamma, \Delta \vdash \psi$, dla dowolnego ψ

Własności relacji dowiedlności:

Dowody własności logicznych relacji dowiedlności:

Własności relacji dowiedlności:

Dowody własności logicznych relacji dowiedlności:

ad 1. $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ wtw $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$

Własności relacji dowiedlności:

Dowody własności logicznych relacji dowiedlności:

ad 1. $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ wtw $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$

dowód $\Longrightarrow$ przez TD; $\Longleftarrow$ jeżeli z samej Γ jest dedukowalna implikacja, to jeżeli dołączymy do tego dowodu jej poprzednik jako założenie, to dedukowalny jest następnik.

Własności relacji dowiedlności:

Dowody własności logicznych relacji dowiedlności:

ad 1. $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ wtw $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$

dowód $\Longrightarrow$ przez TD; $\Longleftarrow$ jeżeli z samej Γ jest dedukowalna implikacja, to jeżeli dołączymy do tego dowodu jej poprzednik jako założenie, to dedukowalny jest następnik.

Uwaga1: $\Longleftarrow$ w istocie rzeczy wyraża domkniętość $\vdash$ na MP; równoważnie można to podać następująco:

Własności relacji dowiedlności:

Dowody własności logicznych relacji dowiedlności:

ad 1. $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ wtw $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$
dowód $\Longrightarrow$ przez TD; $\Longleftarrow$ jeżeli z samej Γ jest dedukowalna implikacja, to jeżeli dołączymy do tego dowodu jej poprzednik jako założenie, to dedukowalny jest następnik.
Uwaga1: $\Longleftarrow$ w istocie rzeczy wyraża domkniętość $\vdash$ na MP; równoważnie można to podać następująco:

1. $\varphi, \varphi \to \psi \vdash \psi$ (inferencyjny MP)

Własności relacji dowiedlności:

Dowody własności logicznych relacji dowiedlności:

ad 1. $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ wtw $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$
dowód $\Longrightarrow$ przez TD; $\Longleftarrow$ jeżeli z samej Γ jest dedukowalna implikacja, to jeżeli dołączymy do tego dowodu jej poprzednik jako założenie, to dedukowalny jest następnik.
Uwaga1: $\Longleftarrow$ w istocie rzeczy wyraża domkniętość $\vdash$ na MP; równoważnie można to podać następująco:

1. $\varphi, \varphi \to \psi \vdash \psi$ (inferencyjny MP)
2. jeżeli $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$, to $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ (konwers TD)

Własności relacji dowiedlności:

Dowody własności logicznych relacji dowiedlności:

ad 1. $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ wtw $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$
dowód $\Longrightarrow$ przez TD; $\Longleftarrow$ jeżeli z samej Γ jest dedukowalna implikacja, to jeżeli dołączymy do tego dowodu jej poprzednik jako założenie, to dedukowalny jest następnik.
Uwaga1: $\Longleftarrow$ w istocie rzeczy wyraża domkniętość $\vdash$ na MP; równoważnie można to podać następująco:

1. $\varphi, \varphi \to \psi \vdash \psi$ (inferencyjny MP)
2. jeżeli $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$, to $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ (konwers TD)
3. jeżeli $\Gamma \vdash \varphi$ i $\Delta \vdash \varphi \to \psi$, to $\Gamma, \Delta \vdash \psi$ (dedukcyjny MP)

Własności relacji dowiedlności:

Dowody własności logicznych relacji dowiedlności:

ad 1. $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ wtw $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$
dowód $\Longrightarrow$ przez TD; $\Longleftarrow$ jeżeli z samej Γ jest dedukowalna implikacja, to jeżeli dołączymy do tego dowodu jej poprzednik jako założenie, to dedukowalny jest następnik.
Uwaga1: $\Longleftarrow$ w istocie rzeczy wyraża domkniętość $\vdash$ na MP; równoważnie można to podać następująco:

1. $\varphi, \varphi \to \psi \vdash \psi$ (inferencyjny MP)
2. jeżeli $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$, to $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ (konwers TD)
3. jeżeli $\Gamma \vdash \varphi$ i $\Delta \vdash \varphi \to \psi$, to $\Gamma, \Delta \vdash \psi$ (dedukcyjny MP)

Uwaga2: w przypadku przyjęcia drugiej definicji $\vdash$ dowód TD wygląda nieco inaczej (prościej) i wymaga wykorzystania uprzednio dowiedzionej tezy $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\psi \to (\varphi \to \chi))$.

Własności relacji dowiedlności:

Dowody własności logicznych relacji dowiedlności:

Własności relacji dowiedlności:

Dowody własności logicznych relacji dowiedlności:

ad 2. $\Gamma, \varphi, \psi \vdash \chi$ wtw $\Gamma, \varphi \wedge \psi \vdash \chi$

Własności relacji dowiedlności:

Dowody własności logicznych relacji dowiedlności:

ad 2. $\Gamma, \varphi, \psi \vdash \chi$ wtw $\Gamma, \varphi \wedge \psi \vdash \chi$
dowód $\Longrightarrow$ załóżmy, że $\Gamma, \varphi, \psi \vdash \chi$, do dowodu, w którym jako założenia występuje $\Gamma, \varphi \wedge \psi$ dodaj aksjomaty dla koniunkcji (nr. 3) i przez MP otrzymujemy φ i ψ, co z założenia pozwala na dedukcję χ. $\Longleftarrow$ analogicznie ale przez wprowadzenie aksjomatu 4.

Własności relacji dowiedlności:

Dowody własności logicznych relacji dowiedlności:

ad 2. $\Gamma, \varphi, \psi \vdash \chi$ wtw $\Gamma, \varphi \wedge \psi \vdash \chi$
dowód $\Longrightarrow$ załóżmy, że $\Gamma, \varphi, \psi \vdash \chi$, do dowodu, w którym jako założenia występuje $\Gamma, \varphi \wedge \psi$ dodaj aksjomaty dla koniunkcji (nr. 3) i przez MP otrzymujemy φ i ψ, co z założenia pozwala na dedukcję χ. $\Longleftarrow$ analogicznie ale przez wprowadzenie aksjomatu 4.
ad 3. jeżeli $\Gamma \vdash \varphi \vee \psi$ i $\Delta, \varphi \vdash \chi$ i $\Pi, \psi \vdash \chi$, to $\Gamma, \Delta, \Pi \vdash \chi$

Własności relacji dowiedlności:

Dowody własności logicznych relacji dowiedlności:

ad 2. $\Gamma, \varphi, \psi \vdash \chi$ wtw $\Gamma, \varphi \wedge \psi \vdash \chi$
dowód $\Longrightarrow$ załóżmy, że $\Gamma, \varphi, \psi \vdash \chi$, do dowodu, w którym jako założenia występuje $\Gamma, \varphi \wedge \psi$ dodaj aksjomaty dla koniunkcji (nr. 3) i przez MP otrzymujemy φ i ψ, co z założenia pozwala na dedukcję χ. $\Longleftarrow$ analogicznie ale przez wprowadzenie aksjomatu 4.
ad 3. jeżeli $\Gamma \vdash \varphi \vee \psi$ i $\Delta, \varphi \vdash \chi$ i $\Pi, \psi \vdash \chi$, to $\Gamma, \Delta, \Pi \vdash \chi$
dowód: przez TD otrzymujemy $\Delta \vdash \varphi \rightarrow \chi$ i $\Pi \vdash \psi \rightarrow \chi$, przez 3-krotne zastosowanie MP na aksjomacie 6. otrzymujemy $\Gamma, \Delta, \Pi \vdash \chi$.

Własności relacji dowiedlności:

Dowody własności logicznych relacji dowiedlności:

Własności relacji dowiedlności:

Dowody własności logicznych relacji dowiedlności:

Dowody dla własności negacji (4–9) we własnym zakresie.

Przydatne mogą być następujące tezy:

Własności relacji dowiedlności:

Dowody własności logicznych relacji dowiedlności:

Dowody dla własności negacji (4–9) we własnym zakresie.
Przydatne mogą być następujące tezy:

1. $\varphi \to (\neg\varphi \to \psi)$

Własności relacji dowiedlności:

Dowody własności logicznych relacji dowiedlności:

Dowody dla własności negacji (4–9) we własnym zakresie.
Przydatne mogą być następujące tezy:

1. $\varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \psi)$
2. $(\varphi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow \neg\varphi$

Własności relacji dowiedlności:

Dowody własności logicznych relacji dowiedlności:

Dowody dla własności negacji (4–9) we własnym zakresie.
Przydatne mogą być następujące tezy:

1. $\varphi \to (\neg\varphi \to \psi)$
2. $(\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi$
3. $(\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$

Własności relacji dowiedlności:

Dowody własności logicznych relacji dowiedlności:

Dowody dla własności negacji (4–9) we własnym zakresie.
Przydatne mogą być następujące tezy:

1. $\varphi \to (\neg\varphi \to \psi)$
2. $(\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi$
3. $(\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$
4. $(\varphi \to \neg\psi) \to ((\varphi \to \psi) \to \neg\varphi)$

Własności relacji dowiedlności:

Dowody własności logicznych relacji dowiedlności:

Dowody dla własności negacji (4–9) we własnym zakresie.
Przydatne mogą być następujące tezy:

1. $\varphi \to (\neg\varphi \to \psi)$
2. $(\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi$
3. $(\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$
4. $(\varphi \to \neg\psi) \to ((\varphi \to \psi) \to \neg\varphi)$
5. $(\varphi \to \psi) \to ((\neg\varphi \to \psi) \to \psi)$

Własności relacji dowiedlności:

Dowody własności logicznych relacji dowiedlności:

Dowody dla własności negacji (4–9) we własnym zakresie. Przydatne mogą być następujące tezy:

1. $\varphi \to (\neg\varphi \to \psi)$
2. $(\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi$
3. $(\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$
4. $(\varphi \to \neg\psi) \to ((\varphi \to \psi) \to \neg\varphi)$
5. $(\varphi \to \psi) \to ((\neg\varphi \to \psi) \to \psi)$

Ich dowody można znaleźć np. w książce Pogorzelskiego lub Porębskiej/Suchonia lub spróbować dowieść je samemu – powodzenia!

Reguły wtórne:

Wprowadzenie dodatkowych reguł do systemu aksjomatycznego ułatwia i skraca konstrukcję dowodów.

Reguły wtórne:

Wprowadzenie dodatkowych reguł do systemu aksjomatycznego ułatwia i skraca konstrukcję dowodów.

Wyróżniamy dwa typy reguł wtórnych:

Reguły wtórne:

Wprowadzenie dodatkowych reguł do systemu aksjomatycznego ułatwia i skraca konstrukcję dowodów.

Wyróżniamy dwa typy reguł wtórnych:

- reguły wyprowadzalne: $\psi_1, ..., \psi_n/\varphi$ wtw $\psi_1, ..., \psi_n \vdash \varphi$

Reguły wtórne:

Wprowadzenie dodatkowych reguł do systemu aksjomatycznego ułatwia i skraca konstrukcję dowodów.

Wyróżniamy dwa typy reguł wtórnych:

- reguły wyprowadzalne: $\psi_1, ..., \psi_n/\varphi$ wtw $\psi_1, ..., \psi_n \vdash \varphi$
- reguły dopuszczalne: $\psi_1, ..., \psi_n/\varphi$ wtw jeżeli $\vdash \psi_1, ..., \vdash \psi_n$, to $\vdash \varphi$

Reguły wtórne:

Wprowadzenie dodatkowych reguł do systemu aksjomatycznego ułatwia i skraca konstrukcję dowodów.

Wyróżniamy dwa typy reguł wtórnych:

- reguły wyprowadzalne: $\psi_1, ..., \psi_n / \varphi$ wtw $\psi_1, ..., \psi_n \vdash \varphi$
- reguły dopuszczalne: $\psi_1, ..., \psi_n / \varphi$ wtw jeżeli $\vdash \psi_1, ..., \vdash \psi_n$, to $\vdash \varphi$

Zachodzi następujący twierdzenie:

Reguły wtórne:

Wprowadzenie dodatkowych reguł do systemu aksjomatycznego ułatwia i skraca konstrukcję dowodów.

Wyróżniamy dwa typy reguł wtórnych:

- reguły wyprowadzalne: $\psi_1, ..., \psi_n / \varphi$ wtw $\psi_1, ..., \psi_n \vdash \varphi$
- reguły dopuszczalne: $\psi_1, ..., \psi_n / \varphi$ wtw jeżeli $\vdash \psi_1, ..., \vdash \psi_n$, to $\vdash \varphi$

Zachodzi następujący twierdzenie:
Każda reguła wyprowadzalna jest dopuszczalna

Reguły wtórne:

Wprowadzenie dodatkowych reguł do systemu aksjomatycznego ułatwia i skraca konstrukcję dowodów.

Wyróżniamy dwa typy reguł wtórnych:

- reguły wyprowadzalne: $\psi_1, ..., \psi_n / \varphi$ wtw $\psi_1, ..., \psi_n \vdash \varphi$
- reguły dopuszczalne: $\psi_1, ..., \psi_n / \varphi$ wtw jeżeli $\vdash \psi_1, ..., \vdash \psi_n$, to $\vdash \varphi$

Zachodzi następujący twierdzenie:
Każda reguła wyprowadzalna jest dopuszczalna
dowód: załóżmy, że $\psi_1, ..., \psi_n / \varphi$ jest regułą wyprowadzalną, zatem $\psi_1, ..., \psi_n \vdash \varphi$. Załóżmy też, że $\vdash \psi_1, ..., \vdash \psi_n$. Przez przechodniość $\vdash$ (Lemat2, własność 5) zastosowaną n razy mamy $\vdash \varphi$.

Reguły wtórne:

Wprowadzenie dodatkowych reguł do systemu aksjomatycznego ułatwia i skraca konstrukcję dowodów.

Wyróżniamy dwa typy reguł wtórnych:

- reguły wyprowadzalne: $\psi_1, \ldots, \psi_n / \varphi$ wtw $\psi_1, \ldots, \psi_n \vdash \varphi$
- reguły dopuszczalne: $\psi_1, \ldots, \psi_n / \varphi$ wtw jeżeli $\vdash \psi_1, \ldots, \vdash \psi_n$, to $\vdash \varphi$

Zachodzi następujący twierdzenie:
Każda reguła wyprowadzalna jest dopuszczalna
dowód: załóżmy, że $\psi_1, \ldots, \psi_n / \varphi$ jest regułą wyprowadzalną, zatem $\psi_1, \ldots, \psi_n \vdash \varphi$. Załóżmy też, że $\vdash \psi_1, \ldots, \vdash \psi_n$. Przez przechodniość $\vdash$ (Lemat2, własność 5) zastosowaną n razy mamy $\vdash \varphi$.

Uwaga: Zależność w drugą stronę zachodzi tylko dla niektórych systemów dedukcyjnych – nazywamy je strukturalnie zupełnymi.

Sprzeczność/Niesprzeczność

Alternatywne definicje sprzeczności

Sprzeczność/Niesprzeczność

Alternatywne definicje sprzeczności

Γ jest sprzeczna wtw:

Sprzeczność/Niesprzeczność

Alternatywne definicje sprzeczności

Γ jest sprzeczna wtw:

1. $\Gamma \vdash \perp$

Sprzeczność/Niesprzeczność

Alternatywne definicje sprzeczności

Γ jest sprzeczna wtw:

1. $\Gamma \vdash \perp$
2. $\Gamma \vdash \neg\varphi \wedge \varphi$, dla pewnego φ

Sprzeczność/Niesprzeczność

Alternatywne definicje sprzeczności

Γ jest sprzeczna wtw:

1. $\Gamma \vdash \bot$
2. $\Gamma \vdash \neg\varphi \wedge \varphi$, dla pewnego φ
3. $\Gamma \vdash \varphi$ i $\Gamma \vdash \neg\varphi$, dla pewnego φ

Sprzeczność/Niesprzeczność

Alternatywne definicje sprzeczności

Γ jest sprzeczna wtw:

1. $\Gamma \vdash \bot$
2. $\Gamma \vdash \neg\varphi \wedge \varphi$, dla pewnego φ
3. $\Gamma \vdash \varphi$ i $\Gamma \vdash \neg\varphi$, dla pewnego φ
4. $\Gamma \vdash \varphi$, dla dowolnej φ

Sprzeczność/Niesprzeczność

Alternatywne definicje sprzeczności

Γ jest sprzeczna wtw:

1. $\Gamma \vdash \bot$
2. $\Gamma \vdash \neg\varphi \wedge \varphi$, dla pewnego φ
3. $\Gamma \vdash \varphi$ i $\Gamma \vdash \neg\varphi$, dla pewnego φ
4. $\Gamma \vdash \varphi$, dla dowolnej φ
5. $Cn(\Gamma) =$ FOR

Sprzeczność/Niesprzeczność

Alternatywne definicje sprzeczności

Γ jest sprzeczna wtw:

1. $\Gamma \vdash \bot$
2. $\Gamma \vdash \neg\varphi \wedge \varphi$, dla pewnego φ
3. $\Gamma \vdash \varphi$ i $\Gamma \vdash \neg\varphi$, dla pewnego φ
4. $\Gamma \vdash \varphi$, dla dowolnej φ
5. $Cn(\Gamma) =$ FOR

Uwaga: analogicznie jek relację dowiedlności, pojęcie (nie)sprzeczności relatywizujemy do konkretnej logiki/systemu mówiąc, np. o L-niesprzeczności. Tutaj pomijamy ten dodatek, gdyż ograniczamy się do logiki klasycznej w ujęciu aksjomatycznym.

Sprzeczność/Niesprzeczność

Równoważność tych ujęć:

Sprzeczność/Niesprzeczność

Równoważność tych ujęć:

1. i 2. z definicji $\perp$

Sprzeczność/Niesprzeczność

Równoważność tych ujęć:

1. i 2. z definicji $\perp$

2. i 3: $\Rightarrow$ z aksjomatu 3. i 2 razy MP; $\Leftarrow$ z aksjomatu 4. i 2 razy MP.

Sprzeczność/Niesprzeczność

Równoważność tych ujęć:

1. i 2. z definicji $\perp$

2. i 3: $\Rightarrow$ z aksjomatu 3. i 2 razy MP; $\Leftarrow$ z aksjomatu 4. i 2 razy MP.

2. i 4: $\Rightarrow$ z tezy Dunsa Szkota; $\Leftarrow$ skoro φ jest dowolne, to w szczególności może mieć postać $\neg\varphi \wedge \varphi$

Sprzeczność/Niesprzeczność

Równoważność tych ujęć:

1. i 2. z definicji $\perp$

2. i 3: $\Rightarrow$ z aksjomatu 3. i 2 razy MP; $\Leftarrow$ z aksjomatu 4. i 2 razy MP.

2. i 4: $\Rightarrow$ z tezy Dunsa Szkota; $\Leftarrow$ skoro φ jest dowolne, to w szczególności może mieć postać $\neg\varphi \wedge \varphi$

4. i 5. z definicji operacji Cn

Sprzeczność/Niesprzeczność

Równoważność tych ujęć:

1. i 2. z definicji $\perp$

2. i 3: $\Rightarrow$ z aksjomatu 3. i 2 razy MP; $\Leftarrow$ z aksjomatu 4. i 2 razy MP.

2. i 4: $\Rightarrow$ z tezy Dunsa Szkota; $\Leftarrow$ skoro φ jest dowolne, to w szczególności może mieć postać $\neg\varphi \land \varphi$

4. i 5. z definicji operacji Cn

Uwaga1: definicje 4 i 5 mogą być stosowane do logik bez negacji (lub z negacją słabszą od klasycznej).

Sprzeczność/Niesprzeczność

Równoważność tych ujęć:

1. i 2. z definicji $\bot$

2. i 3: $\Rightarrow$ z aksjomatu 3. i 2 razy MP; $\Leftarrow$ z aksjomatu 4. i 2 razy MP.

2. i 4: $\Rightarrow$ z tezy Dunsa Szkota; $\Leftarrow$ skoro φ jest dowolne, to w szczególności może mieć postać $\neg\varphi \wedge \varphi$

4. i 5. z definicji operacji Cn

Uwaga1: definicje 4 i 5 mogą być stosowane do logik bez negacji (lub z negacją słabszą od klasycznej).

Uwaga2:Definicje niesprzecznych zbiorów uzyskujemy przez negację def. zbiorów sprzecznych – w szczególności: dla 2. nie istnieje takie φ, że $\Gamma \vdash \neg\varphi \wedge \varphi$ (lub $\Gamma \nvdash \neg\varphi \wedge \varphi$, dla dowolnego φ); dla 4. istnieje takie φ, że $\Gamma \nvdash \varphi$.

Sprzeczność/Niesprzeczność

Lemat3: Własności (nie)sprzeczności:

Sprzeczność/Niesprzeczność

Lemat3: Własności (nie)sprzeczności:

1. jeżeli Γ jest sprzeczna i $\Gamma \subseteq \Delta$, to Δ jest sprzeczna

Sprzeczność/Niesprzeczność

Lemat3: Własności (nie)sprzeczności:

1. jeżeli Γ jest sprzeczna i $\Gamma \subseteq \Delta$, to Δ jest sprzeczna
2. jeżeli Γ jest niesprzeczna i $\Gamma \supseteq \Delta$, to Δ jest niesprzeczna

Sprzeczność/Niesprzeczność

Lemat3: Własności (nie)sprzeczności:

1. jeżeli Γ jest sprzeczna i $\Gamma \subseteq \Delta$, to Δ jest sprzeczna
2. jeżeli Γ jest niesprzeczna i $\Gamma \supseteq \Delta$, to Δ jest niesprzeczna
3. Γ jest niesprzeczna wtw Δ jest niesprzeczna, dla dowolnego skończonego $\Delta \subseteq \Gamma$

Sprzeczność/Niesprzeczność

Lemat3: Własności (nie)sprzeczności:

1. jeżeli Γ jest sprzeczna i $\Gamma \subseteq \Delta$, to Δ jest sprzeczna
2. jeżeli Γ jest niesprzeczna i $\Gamma \supseteq \Delta$, to Δ jest niesprzeczna
3. Γ jest niesprzeczna wtw Δ jest niesprzeczna, dla dowolnego skończonego $\Delta \subseteq \Gamma$
4. $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ jest sprzeczna wtw $\Gamma \vdash \varphi$

Sprzeczność/Niesprzeczność

Lemat3: Własności (nie)sprzeczności:

1. jeżeli Γ jest sprzeczna i $\Gamma \subseteq \Delta$, to Δ jest sprzeczna
2. jeżeli Γ jest niesprzeczna i $\Gamma \supseteq \Delta$, to Δ jest niesprzeczna
3. Γ jest niesprzeczna wtw Δ jest niesprzeczna, dla dowolnego skończonego $\Delta \subseteq \Gamma$
4. $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ jest sprzeczna wtw $\Gamma \vdash \varphi$
5. $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ jest niesprzeczna wtw $\Gamma \nvdash \varphi$

Sprzeczność/Niesprzeczność

Lemat3: Własności (nie)sprzeczności:

1. jeżeli Γ jest sprzeczna i $\Gamma \subseteq \Delta$, to Δ jest sprzeczna
2. jeżeli Γ jest niesprzeczna i $\Gamma \supseteq \Delta$, to Δ jest niesprzeczna
3. Γ jest niesprzeczna wtw Δ jest niesprzeczna, dla dowolnego skończonego $\Delta \subseteq \Gamma$
4. $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ jest sprzeczna wtw $\Gamma \vdash \varphi$
5. $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ jest niesprzeczna wtw $\Gamma \nvdash \varphi$
6. Γ jest sprzeczna wtw $\Gamma \cup \{\varphi\}$ jest sprzeczna i $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ jest sprzeczna, dla dowolnej φ

Sprzeczność/Niesprzeczność

Lemat3: Własności (nie)sprzeczności:

1. jeżeli Γ jest sprzeczna i $\Gamma \subseteq \Delta$, to Δ jest sprzeczna
2. jeżeli Γ jest niesprzeczna i $\Gamma \supseteq \Delta$, to Δ jest niesprzeczna
3. Γ jest niesprzeczna wtw Δ jest niesprzeczna, dla dowolnego skończonego $\Delta \subseteq \Gamma$
4. $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ jest sprzeczna wtw $\Gamma \vdash \varphi$
5. $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ jest niesprzeczna wtw $\Gamma \nvdash \varphi$
6. Γ jest sprzeczna wtw $\Gamma \cup \{\varphi\}$ jest sprzeczna i $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ jest sprzeczna, dla dowolnej φ
7. Γ jest niesprzeczna wtw $\Gamma \cup \{\varphi\}$ jest niesprzeczna lub $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ jest niesprzeczna, dla dowolnej φ

Sprzeczność/Niesprzeczność

Dowody własności (nie)sprzeczności:

Sprzeczność/Niesprzeczność

Dowody własności (nie)sprzeczności:

ad 1. jeżeli Γ jest sprzeczna i $\Gamma \subseteq \Delta$, to Δ jest sprzeczna

Sprzeczność/Niesprzeczność

Dowody własności (nie)sprzeczności:

ad 1. jeżeli Γ jest sprzeczna i $\Gamma \subseteq \Delta$, to Δ jest sprzeczna
dowód przez monotoniczność $\vdash$ (Lemat1, własność 3.).

Sprzeczność/Niesprzeczność

Dowody własności (nie)sprzeczności:

ad 1. jeżeli Γ jest sprzeczna i $\Gamma \subseteq \Delta$, to Δ jest sprzeczna
dowód przez monotoniczność $\vdash$ (Lemat1, własność 3.).
ad 2. jeżeli Γ jest niesprzeczna i $\Gamma \supseteq \Delta$, to Δ jest niesprzeczna

Sprzeczność/Niesprzeczność

Dowody własności (nie)sprzeczności:

ad 1. jeżeli Γ jest sprzeczna i $\Gamma \subseteq \Delta$, to Δ jest sprzeczna
dowód przez monotoniczność $\vdash$ (Lemat1, własność 3.).
ad 2. jeżeli Γ jest niesprzeczna i $\Gamma \supseteq \Delta$, to Δ jest niesprzeczna
dowód przez kontrapozycję z poprzedniej własności.

Sprzeczność/Niesprzeczność

Dowody własności (nie)sprzeczności:

ad 1. jeżeli Γ jest sprzeczna i $\Gamma \subseteq \Delta$, to Δ jest sprzeczna
dowód przez monotoniczność $\vdash$ (Lemat1, własność 3.).
ad 2. jeżeli Γ jest niesprzeczna i $\Gamma \supseteq \Delta$, to Δ jest niesprzeczna
dowód przez kontrapozycję z poprzedniej własności.
ad 3. Γ jest niesprzeczna wtw Δ jest niesprzeczna, dla dowolnego skończonego $\Delta \subseteq \Gamma$

Sprzeczność/Niesprzeczność

Dowody własności (nie)sprzeczności:

ad 1. jeżeli Γ jest sprzeczna i $\Gamma \subseteq \Delta$, to Δ jest sprzeczna
dowód przez monotoniczność $\vdash$ (Lemat1, własność 3.).
ad 2. jeżeli Γ jest niesprzeczna i $\Gamma \supseteq \Delta$, to Δ jest niesprzeczna
dowód przez kontrapozycję z poprzedniej własności.
ad 3. Γ jest niesprzeczna wtw Δ jest niesprzeczna, dla dowolnego skończonego $\Delta \subseteq \Gamma$
dowód $\Longrightarrow$ z poprzedniego; $\Longleftarrow$ załóżmy, że dowolna skończona $\Delta \subseteq \Gamma$ jest niesprzeczna, ale że $\Gamma \vdash \bot$. Z definicji $\vdash$ musi istnieć skończony podzbiór $\Delta \subseteq \Gamma$ taki, że $\Delta \vdash \bot$ – sprzeczość, zatem Γ też jest niesprzeczne.

Sprzeczność/Niesprzeczność

Dowody własności (nie)sprzeczności:

Sprzeczność/Niesprzeczność

Dowody własności (nie)sprzeczności:

ad 4. $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ jest sprzeczna wtw $\Gamma \vdash \varphi$

Sprzeczność/Niesprzeczność

Dowody własności (nie)sprzeczności:

ad 4. $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ jest sprzeczna wtw $\Gamma \vdash \varphi$
dowód z lematu2, własność 6.

Sprzeczność/Niesprzeczność

Dowody własności (nie)sprzeczności:

ad 4. $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ jest sprzeczna wtw $\Gamma \vdash \varphi$

dowód z lematu2, własność 6.

ad 5. $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ jest niesprzeczna wtw $\Gamma \nvdash \varphi$

Sprzeczność/Niesprzeczność

Dowody własności (nie)sprzeczności:

ad 4. $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ jest sprzeczna wtw $\Gamma \vdash \varphi$
dowód z lematu2, własność 6.
ad 5. $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ jest niesprzeczna wtw $\Gamma \nvdash \varphi$
dowód przez kontrapozycję z poprzedniej własności.

Sprzeczność/Niesprzeczność

Dowody własności (nie)sprzeczności:

ad 4. $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ jest sprzeczna wtw $\Gamma \vdash \varphi$
dowód z lematu2, własność 6.
ad 5. $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ jest niesprzeczna wtw $\Gamma \nvdash \varphi$
dowód przez kontrapozycję z poprzedniej własności.
ad 6. Γ jest sprzeczna wtw $\Gamma \cup \{\varphi\}$ jest sprzeczna i $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ jest sprzeczna, dla dowolnej φ

Sprzeczność/Niesprzeczność

Dowody własności (nie)sprzeczności:

ad 4. $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ jest sprzeczna wtw $\Gamma \vdash \varphi$
dowód z lematu2, własność 6.
ad 5. $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ jest niesprzeczna wtw $\Gamma \nvdash \varphi$
dowód przez kontrapozycję z poprzedniej własności.
ad 6. Γ jest sprzeczna wtw $\Gamma \cup \{\varphi\}$ jest sprzeczna i $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ jest sprzeczna, dla dowolnej φ
dowód $\Longrightarrow$ z monotoniczności $\vdash$ (Lemat1, własność 3.). $\Longleftarrow$ z lematu2, własność 7.

Sprzeczność/Niesprzeczność

Dowody własności (nie)sprzeczności:

ad 4. $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ jest sprzeczna wtw $\Gamma \vdash \varphi$
dowód z lematu2, własność 6.
ad 5. $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ jest niesprzeczna wtw $\Gamma \nvdash \varphi$
dowód przez kontrapozycję z poprzedniej własności.
ad 6. Γ jest sprzeczna wtw $\Gamma \cup \{\varphi\}$ jest sprzeczna i $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ jest sprzeczna, dla dowolnej φ
dowód $\Longrightarrow$ z monotoniczności $\vdash$ (Lemat1, własność 3.). $\Longleftarrow$ z lematu2, własność 7.
ad 7. Γ jest niesprzeczna wtw $\Gamma \cup \{\varphi\}$ jest niesprzeczna lub $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ jest niesprzeczna, dla dowolnej φ

Sprzeczność/Niesprzeczność

Dowody własności (nie)sprzeczności:

ad 4. $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ jest sprzeczna wtw $\Gamma \vdash \varphi$
dowód z lematu2, własność 6.
ad 5. $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ jest niesprzeczna wtw $\Gamma \nvdash \varphi$
dowód przez kontrapozycję z poprzedniej własności.
ad 6. Γ jest sprzeczna wtw $\Gamma \cup \{\varphi\}$ jest sprzeczna i $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ jest sprzeczna, dla dowolnej φ
dowód $\Longrightarrow$ z monotoniczności $\vdash$ (Lemat1, własność 3.). $\Longleftarrow$ z lematu2, własność 7.
ad 7. Γ jest niesprzeczna wtw $\Gamma \cup \{\varphi\}$ jest niesprzeczna lub $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ jest niesprzeczna, dla dowolnej φ
dowód przez kontrapozycję z poprzedniej własności.