METALOGIKA

Andrzej Indrzejczak

Katedra Logiki i Metodologii Nauk UŁ

Łódź, semestr letni 2009/2010

Maksymalna niesprzeczność

Zbiory maksymalnie niesprzeczne:

Maksymalna niesprzeczność

Zbiory maksymalnie niesprzeczne:

Zbiór Γ jest maksymalnie niesprzeczny (MNSP) wtw:

Maksymalna niesprzeczność

Zbiory maksymalnie niesprzeczne:

Zbiór Γ jest maksymalnie niesprzeczny (MNSP) wtw:

- jest niesprzeczny

Maksymalna niesprzeczność

Zbiory maksymalnie niesprzeczne:

Zbiór Γ jest maksymalnie niesprzeczny (MNSP) wtw:

- jest niesprzeczny
- jest zupełny: jeżeli $\Gamma \subset \Delta$, to Δ jest sprzeczna

Maksymalna niesprzeczność

Zbiory maksymalnie niesprzeczne:

Zbiór Γ jest maksymalnie niesprzeczny (MNSP) wtw:

- jest niesprzeczny
- jest zupełny: jeżeli $\Gamma \subset \Delta$, to Δ jest sprzeczna

Uwaga: inne określenia – zb. zupełne, nasycone, teorie itp.

Maksymalna niesprzeczność

Zbiory maksymalnie niesprzeczne:

Maksymalna niesprzeczność

Zbiory maksymalnie niesprzeczne:

Lemat4: Jeżeli Γ jest niesprzeczna, to następujące warunki są równoważne:

Maksymalna niesprzeczność

Zbiory maksymalnie niesprzeczne:

Lemat4: Jeżeli Γ jest niesprzeczna, to następujące warunki są równoważne:

1. Γ jest zupełna, tj. jeżeli $\Gamma \subset \Delta$, to Δ jest sprzeczna

Maksymalna niesprzeczność

Zbiory maksymalnie niesprzeczne:

Lemat4: Jeżeli Γ jest niesprzeczna, to następujące warunki są równoważne:

1. Γ jest zupełna, tj. jeżeli $\Gamma \subset \Delta$, to Δ jest sprzeczna
2. jeżeli $\Gamma \cup \{\varphi\}$ jest niesprzeczny, to $\varphi \in \Gamma$, dla dowolnej formuły φ

Maksymalna niesprzeczność

Zbiory maksymalnie niesprzeczne:

Lemat4: Jeżeli Γ jest niesprzeczna, to następujące warunki są równoważne:

1. Γ jest zupełna, tj. jeżeli $\Gamma \subset \Delta$, to Δ jest sprzeczna
2. jeżeli $\Gamma \cup \{\varphi\}$ jest niesprzeczny, to $\varphi \in \Gamma$, dla dowolnej formuły φ
3. jeżeli $\Gamma \subseteq \Delta$ i Δ jest niesprzeczna, to $\Gamma = \Delta$

Maksymalna niesprzeczność

Zbiory maksymalnie niesprzeczne:

Lemat4: Jeżeli Γ jest niesprzeczna, to następujące warunki są równoważne:

1. Γ jest zupełna, tj. jeżeli $\Gamma \subset \Delta$, to Δ jest sprzeczna
2. jeżeli $\Gamma \cup \{\varphi\}$ jest niesprzeczny, to $\varphi \in \Gamma$, dla dowolnej formuły φ
3. jeżeli $\Gamma \subseteq \Delta$ i Δ jest niesprzeczna, to $\Gamma = \Delta$
4. dla dowolnej formuły φ, $\varphi \in \Gamma$ lub $\neg\varphi \in \Gamma$ (Γ jest $\neg$-zupełny)

Maksymalna niesprzeczność

Dowód Lematu 4:

Maksymalna niesprzeczność

Dowód Lematu 4:

1 $\Longrightarrow$ 2 dowód przez kontrapozycję: załóżmy, że $\varphi \notin \Gamma$, wtedy $\Gamma \subset \Gamma \cup \{\varphi\}$ co przez 1. prowadzi do sprzeczności $\Gamma \cup \{\varphi\}$.

Maksymalna niesprzeczność

Dowód Lematu 4:

$1 \Longrightarrow 2$ dowód przez kontrapozycję: załóżmy, że $\varphi \notin \Gamma$, wtedy $\Gamma \subset \Gamma \cup \{\varphi\}$ co przez 1. prowadzi do sprzeczności $\Gamma \cup \{\varphi\}$.
$2 \Longrightarrow 3$ załóżmy, że $\Gamma \subseteq \Delta$ i Δ jest niesprzeczna ale $\Gamma \neq \Delta$. Zatem $\Delta = \Gamma \cup \Pi$, dla pewnego niepustego $\Pi \neq \Gamma$. Dla dowolnego $\varphi \in \Pi$, $\Gamma \cup \{\varphi\}$ jest niesprzeczne, gdyż jest podzbiorem niesprzecznej Δ (Lemat3, własność 2). Przez 2. mamy $\varphi \in \Gamma$, zatem $\Gamma = \Delta$ – sprzeczność.

Maksymalna niesprzeczność

Dowód Lematu 4:

Maksymalna niesprzeczność

Dowód Lematu 4:

$3 \Longrightarrow 4$ Z lematu 3, własność 7 wiemy, że dla dowolnej formuły φ, $\Gamma \cup \{\varphi\}$ jest niesprzeczny lub $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ jest niesprzeczny. Jeżeli $\Gamma \cup \{\varphi\}$ jest niesprzeczny, to, ponieważ $\Gamma \subseteq \Gamma \cup \{\varphi\}$, więc przez 3. mamy $\Gamma = \Gamma \cup \{\varphi\}$ zatem $\varphi \in \Gamma$. Analogicznie w drugim przypadku.

Maksymalna niesprzeczność

Dowód Lematu 4:

$3 \Longrightarrow 4$ Z lematu 3, własność 7 wiemy, że dla dowolnej formuły φ, $\Gamma \cup \{\varphi\}$ jest niesprzeczny lub $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ jest niesprzeczny. Jeżeli $\Gamma \cup \{\varphi\}$ jest niesprzeczny, to, ponieważ $\Gamma \subseteq \Gamma \cup \{\varphi\}$, więc przez 3. mamy $\Gamma = \Gamma \cup \{\varphi\}$ zatem $\varphi \in \Gamma$. Analogicznie w drugim przypadku.

$4 \Longrightarrow 1$ niech $\Gamma \subset \Delta$, zatem istnieje $\varphi \in \Delta$ takie, że $\varphi \notin \Gamma$. Zatem z 4. mamy, że $\neg\varphi \in \Gamma$, ale wtedy również $\neg\varphi \in \Delta$, zatem Δ jest sprzeczna.

Maksymalna niesprzeczność

Dowód Lematu 4:

$3 \Longrightarrow 4$ Z lematu 3, własność 7 wiemy, że dla dowolnej formuły φ, $\Gamma \cup \{\varphi\}$ jest niesprzeczny lub $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ jest niesprzeczny. Jeżeli $\Gamma \cup \{\varphi\}$ jest niesprzeczny, to, ponieważ $\Gamma \subseteq \Gamma \cup \{\varphi\}$, więc przez 3. mamy $\Gamma = \Gamma \cup \{\varphi\}$ zatem $\varphi \in \Gamma$. Analogicznie w drugim przypadku.
$4 \Longrightarrow 1$ niech $\Gamma \subset \Delta$, zatem istnieje $\varphi \in \Delta$ takie, że $\varphi \notin \Gamma$. Zatem z 4. mamy, że $\neg\varphi \in \Gamma$, ale wtedy również $\neg\varphi \in \Delta$, zatem Δ jest sprzeczna.

Maksymalna niesprzeczność

Lemat5: Dowolny zbiór maksymalnie niesprzeczny Γ ma następujące własności:

Maksymalna niesprzeczność

Lemat5: Dowolny zbiór maksymalnie niesprzeczny Γ ma następujące własności:

1. $\varphi \in \Gamma$ wtw $\Gamma \vdash \varphi$

Maksymalna niesprzeczność

Lemat5: Dowolny zbiór maksymalnie niesprzeczny Γ ma następujące własności:

1. $\varphi \in \Gamma$ wtw $\Gamma \vdash \varphi$
2. jeżeli $\vdash \varphi$, to $\varphi \in \Gamma$

Maksymalna niesprzeczność

Lemat5: Dowolny zbiór maksymalnie niesprzeczny Γ ma następujące własności:

1. $\varphi \in \Gamma$ wtw $\Gamma \vdash \varphi$
2. jeżeli $\vdash \varphi$, to $\varphi \in \Gamma$
3. $\perp \notin \Gamma$

Maksymalna niesprzeczność

Lemat5: Dowolny zbiór maksymalnie niesprzeczny Γ ma następujące własności:

1. $\varphi \in \Gamma$ wtw $\Gamma \vdash \varphi$
2. jeżeli $\vdash \varphi$, to $\varphi \in \Gamma$
3. $\bot \notin \Gamma$
4. jeżeli $\varphi \rightarrow \psi \in \Gamma$ i $\varphi \in \Gamma$, to $\psi \in \Gamma$

Maksymalna niesprzeczność

Lemat5: Dowolny zbiór maksymalnie niesprzeczny Γ ma następujące własności:

1. $\varphi \in \Gamma$ wtw $\Gamma \vdash \varphi$
2. jeżeli $\vdash \varphi$, to $\varphi \in \Gamma$
3. $\bot \notin \Gamma$
4. jeżeli $\varphi \to \psi \in \Gamma$ i $\varphi \in \Gamma$, to $\psi \in \Gamma$
5. $\neg\varphi \in \Gamma$ wtw $\varphi \notin \Gamma$

Maksymalna niesprzeczność

Lemat5: Dowolny zbiór maksymalnie niesprzeczny Γ ma następujące własności:

1. $\varphi \in \Gamma$ wtw $\Gamma \vdash \varphi$
2. jeżeli $\vdash \varphi$, to $\varphi \in \Gamma$
3. $\bot \notin \Gamma$
4. jeżeli $\varphi \to \psi \in \Gamma$ i $\varphi \in \Gamma$, to $\psi \in \Gamma$
5. $\neg\varphi \in \Gamma$ wtw $\varphi \notin \Gamma$
6. $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$ wtw $\varphi \in \Gamma$ i $\psi \in \Gamma$

Maksymalna niesprzeczność

Lemat5: Dowolny zbiór maksymalnie niesprzeczny Γ ma następujące własności:

1. $\varphi \in \Gamma$ wtw $\Gamma \vdash \varphi$
2. jeżeli $\vdash \varphi$, to $\varphi \in \Gamma$
3. $\bot \notin \Gamma$
4. jeżeli $\varphi \to \psi \in \Gamma$ i $\varphi \in \Gamma$, to $\psi \in \Gamma$
5. $\neg\varphi \in \Gamma$ wtw $\varphi \notin \Gamma$
6. $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$ wtw $\varphi \in \Gamma$ i $\psi \in \Gamma$
7. $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ wtw $\varphi \in \Gamma$ lub $\psi \in \Gamma$

Maksymalna niesprzeczność

Lemat5: Dowolny zbiór maksymalnie niesprzeczny Γ ma następujące własności:

1. $\varphi \in \Gamma$ wtw $\Gamma \vdash \varphi$
2. jeżeli $\vdash \varphi$, to $\varphi \in \Gamma$
3. $\bot \notin \Gamma$
4. jeżeli $\varphi \to \psi \in \Gamma$ i $\varphi \in \Gamma$, to $\psi \in \Gamma$
5. $\neg\varphi \in \Gamma$ wtw $\varphi \notin \Gamma$
6. $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$ wtw $\varphi \in \Gamma$ i $\psi \in \Gamma$
7. $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ wtw $\varphi \in \Gamma$ lub $\psi \in \Gamma$
8. $\varphi \to \psi \in \Gamma$ wtw $\varphi \notin \Gamma$ lub $\psi \in \Gamma$

Maksymalna niesprzeczność

Dowód lematu 5:

Maksymalna niesprzeczność

Dowód lematu 5:

ad 1. $\varphi \in \Gamma$ wtw $\Gamma \vdash \varphi$

Maksymalna niesprzeczność

Dowód lematu 5:

ad 1. $\varphi \in \Gamma$ wtw $\Gamma \vdash \varphi$

$\Longrightarrow$ ze zwrotności $\vdash$ (Lemat1, w. 2); $\Longleftarrow$ przez Lemat3, w.4 $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ jest sprzeczna, więc przez Lemat4, w.4 $\varphi \in \Gamma$.

Maksymalna niesprzeczność

Dowód lematu 5:

ad 1. $\varphi \in \Gamma$ wtw $\Gamma \vdash \varphi$

$\Longrightarrow$ ze zwrotności $\vdash$ (Lemat1, w. 2); $\Longleftarrow$ przez Lemat3, w.4 $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ jest sprzeczna, więc przez Lemat4, w.4 $\varphi \in \Gamma$.

ad 2. jeżeli $\vdash \varphi$, to $\varphi \in \Gamma$

Maksymalna niesprzeczność

Dowód lematu 5:

ad 1. $\varphi \in \Gamma$ wtw $\Gamma \vdash \varphi$

$\Longrightarrow$ ze zwrotności $\vdash$ (Lemat1, w. 2); $\Longleftarrow$ przez Lemat3, w.4 $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ jest sprzeczna, więc przez Lemat4, w.4 $\varphi \in \Gamma$.

ad 2. jeżeli $\vdash \varphi$, to $\varphi \in \Gamma$

Załóżmy, że $\vdash \varphi$, wtedy przez Lemat1, w.4 $\Gamma \vdash \varphi$ co przez poprzednią własność daje $\varphi \in \Gamma$.

Maksymalna niesprzeczność

Dowód lematu 5:

ad 1. $\varphi \in \Gamma$ wtw $\Gamma \vdash \varphi$

$\Longrightarrow$ ze zwrotności $\vdash$ (Lemat1, w. 2); $\Longleftarrow$ przez Lemat3, w.4 $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ jest sprzeczna, więc przez Lemat4, w.4 $\varphi \in \Gamma$.

ad 2. jeżeli $\vdash \varphi$, to $\varphi \in \Gamma$

Załóżmy, że $\vdash \varphi$, wtedy przez Lemat1, w.4 $\Gamma \vdash \varphi$ co przez poprzednią własność daje $\varphi \in \Gamma$.

ad 3. $\bot \notin \Gamma$

Maksymalna niesprzeczność

Dowód lematu 5:

ad 1. $\varphi \in \Gamma$ wtw $\Gamma \vdash \varphi$

$\Longrightarrow$ ze zwrotności $\vdash$ (Lemat1, w. 2); $\Longleftarrow$ przez Lemat3, w.4 $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ jest sprzeczna, więc przez Lemat4, w.4 $\varphi \in \Gamma$.

ad 2. jeżeli $\vdash \varphi$, to $\varphi \in \Gamma$

Załóżmy, że $\vdash \varphi$, wtedy przez Lemat1, w.4 $\Gamma \vdash \varphi$ co przez poprzednią własność daje $\varphi \in \Gamma$.

ad 3. $\bot \notin \Gamma$

oczywiste

Maksymalna niesprzeczność

Dowód lematu 5:

ad 1. $\varphi \in \Gamma$ wtw $\Gamma \vdash \varphi$

$\Longrightarrow$ ze zwrotności $\vdash$ (Lemat1, w. 2); $\Longleftarrow$ przez Lemat3, w.4 $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ jest sprzeczna, więc przez Lemat4, w.4 $\varphi \in \Gamma$.

ad 2. jeżeli $\vdash \varphi$, to $\varphi \in \Gamma$

Załóżmy, że $\vdash \varphi$, wtedy przez Lemat1, w.4 $\Gamma \vdash \varphi$ co przez poprzednią własność daje $\varphi \in \Gamma$.

ad 3. $\perp \notin \Gamma$

oczywiste

ad 4. jeżeli $\varphi \rightarrow \psi \in \Gamma$ i $\varphi \in \Gamma$, to $\psi \in \Gamma$

Maksymalna niesprzeczność

Dowód lematu 5:

ad 1. $\varphi \in \Gamma$ wtw $\Gamma \vdash \varphi$

$\Longrightarrow$ ze zwrotności $\vdash$ (Lemat1, w. 2); $\Longleftarrow$ przez Lemat3, w.4 $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ jest sprzeczna, więc przez Lemat4, w.4 $\varphi \in \Gamma$.

ad 2. jeżeli $\vdash \varphi$, to $\varphi \in \Gamma$

Załóżmy, że $\vdash \varphi$, wtedy przez Lemat1, w.4 $\Gamma \vdash \varphi$ co przez poprzednią własność daje $\varphi \in \Gamma$.

ad 3. $\bot \notin \Gamma$

oczywiste

ad 4. jeżeli $\varphi \rightarrow \psi \in \Gamma$ i $\varphi \in \Gamma$, to $\psi \in \Gamma$

Załóżmy, że $\varphi \rightarrow \psi \in \Gamma$ i $\varphi \in \Gamma$ ale $\psi \notin \Gamma$. Zatem (Lemat4, w.4) $\neg\psi \in \Gamma$, ale $\{\varphi \rightarrow \psi, \varphi, \neg\psi\}$ jest sprzeczny więc i Γ byłby sprzeczny.

Maksymalna niesprzeczność

Dowód lematu 5:

Maksymalna niesprzeczność

Dowód lematu 5:

ad 5. $\neg\varphi \in \Gamma$ wtw $\varphi \notin \Gamma$

Maksymalna niesprzeczność

Dowód lematu 5:

ad 5. $\neg\varphi \in \Gamma$ wtw $\varphi \notin \Gamma$
oczywiste, gdyż inaczej Γ byłby sprzeczny.

Maksymalna niesprzeczność

Dowód lematu 5:

ad 5. $\neg\varphi \in \Gamma$ wtw $\varphi \notin \Gamma$
oczywiste, gdyż inaczej Γ byłby sprzeczny.
ad 6. $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$ wtw $\varphi \in \Gamma$ i $\psi \in \Gamma$

Maksymalna niesprzeczność

Dowód lematu 5:

ad 5. $\neg\varphi \in \Gamma$ wtw $\varphi \notin \Gamma$
oczywiste, gdyż inaczej Γ byłby sprzeczny.
ad 6. $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$ wtw $\varphi \in \Gamma$ i $\psi \in \Gamma$
$\Longrightarrow$ Przez własność 2, aksjomat 3 należy do Γ, zatem przez własność 4 $\varphi \in \Gamma$ i $\psi \in \Gamma$. $\Longleftarrow$ analogicznie lecz z wykorzystaniem aksjomatu 4.

Maksymalna niesprzeczność

Dowód lematu 5:

ad 5. $\neg\varphi \in \Gamma$ wtw $\varphi \notin \Gamma$
oczywiste, gdyż inaczej Γ byłby sprzeczny.
ad 6. $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$ wtw $\varphi \in \Gamma$ i $\psi \in \Gamma$
$\Longrightarrow$ Przez własność 2, aksjomat 3 należy do Γ, zatem przez własność 4 $\varphi \in \Gamma$ i $\psi \in \Gamma$. $\Longleftarrow$ analogicznie lecz z wykorzystaniem aksjomatu 4.
ad 7. $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ wtw $\varphi \in \Gamma$ lub $\psi \in \Gamma$

Maksymalna niesprzeczność

Dowód lematu 5:

ad 5. $\neg\varphi \in \Gamma$ wtw $\varphi \notin \Gamma$
oczywiste, gdyż inaczej Γ byłby sprzeczny.
ad 6. $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$ wtw $\varphi \in \Gamma$ i $\psi \in \Gamma$
$\Longrightarrow$ Przez własność 2, aksjomat 3 należy do Γ, zatem przez własność 4 $\varphi \in \Gamma$ i $\psi \in \Gamma$. $\Longleftarrow$ analogicznie lecz z wykorzystaniem aksjomatu 4.
ad 7. $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ wtw $\varphi \in \Gamma$ lub $\psi \in \Gamma$
$\Longrightarrow$ Załóżmy, że $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ ale $\varphi \notin \Gamma$ i $\psi \notin \Gamma$. Zatem $\neg\varphi \in \Gamma$ i $\neg\psi \in \Gamma$ (Lemat4, w.4), ale $\{\varphi \vee \psi, \neg\varphi, \neg\psi\}$ jest sprzeczny więc i Γ byłby sprzeczny. $\Longleftarrow$ z aksjomatu 5 i własności 2 i 4.

Maksymalna niesprzeczność

Dowód lematu 5:

ad 5. $\neg\varphi \in \Gamma$ wtw $\varphi \notin \Gamma$
oczywiste, gdyż inaczej Γ byłby sprzeczny.
ad 6. $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$ wtw $\varphi \in \Gamma$ i $\psi \in \Gamma$
$\Longrightarrow$ Przez własność 2, aksjomat 3 należy do Γ, zatem przez własność 4 $\varphi \in \Gamma$ i $\psi \in \Gamma$. $\Longleftarrow$ analogicznie lecz z wykorzystaniem aksjomatu 4.
ad 7. $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ wtw $\varphi \in \Gamma$ lub $\psi \in \Gamma$
$\Longrightarrow$ Załóżmy, że $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ ale $\varphi \notin \Gamma$ i $\psi \notin \Gamma$. Zatem $\neg\varphi \in \Gamma$ i $\neg\psi \in \Gamma$ (Lemat4, w.4), ale $\{\varphi \vee \psi, \neg\varphi, \neg\psi\}$ jest sprzeczny więc i Γ byłby sprzeczny. $\Longleftarrow$ z aksjomatu 5 i własności 2 i 4.
ad 8. $\varphi \rightarrow \psi \in \Gamma$ wtw $\varphi \notin \Gamma$ lub $\psi \in \Gamma$

Maksymalna niesprzeczność

Dowód lematu 5:

ad 5. $\neg\varphi \in \Gamma$ wtw $\varphi \notin \Gamma$
oczywiste, gdyż inaczej Γ byłby sprzeczny.
ad 6. $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$ wtw $\varphi \in \Gamma$ i $\psi \in \Gamma$
$\Longrightarrow$ Przez własność 2, aksjomat 3 należy do Γ, zatem przez własność 4 $\varphi \in \Gamma$ i $\psi \in \Gamma$. $\Longleftarrow$ analogicznie lecz z wykorzystaniem aksjomatu 4.
ad 7. $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ wtw $\varphi \in \Gamma$ lub $\psi \in \Gamma$
$\Longrightarrow$ Załóżmy, że $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ ale $\varphi \notin \Gamma$ i $\psi \notin \Gamma$. Zatem $\neg\varphi \in \Gamma$ i $\neg\psi \in \Gamma$ (Lemat4, w.4), ale $\{\varphi \vee \psi, \neg\varphi, \neg\psi\}$ jest sprzeczny więc i Γ byłby sprzeczny. $\Longleftarrow$ z aksjomatu 5 i własności 2 i 4.
ad 8. $\varphi \rightarrow \psi \in \Gamma$ wtw $\varphi \notin \Gamma$ lub $\psi \in \Gamma$
zróbcie sami.

Maksymalna niesprzeczność

Lemat Lindenbauma:

Maksymalna niesprzeczność

Lemat Lindenbauma:

Wiemy, że istnieją zbiory niesprzeczne, ale czy istnieją zbiory maksymalnie niesprzeczne?

Maksymalna niesprzeczność

Lemat Lindenbauma:

Wiemy, że istnieją zbiory niesprzeczne, ale czy istnieją zbiory maksymalnie niesprzeczne?
Odpowiedź daje tzw.
Lemat Lindenbauma: Jeżeli Γ jest niesprzeczna, to istnieje jego maksymalnie niesprzeczne poszerzenie (tzn. istnieje takie Δ, że $\Gamma \subseteq \Delta$ i Δ jest MNSP)

Maksymalna niesprzeczność

Lemat Lindenbauma:

Wiemy, że istnieją zbiory niesprzeczne, ale czy istnieją zbiory maksymalnie niesprzeczne?
Odpowiedź daje tzw.
Lemat Lindenbauma: Jeżeli Γ jest niesprzeczna, to istnieje jego maksymalnie niesprzeczne poszerzenie (tzn. istnieje takie Δ, że $\Gamma \subseteq \Delta$ i Δ jest MNSP)
Uwaga: lemat Lindenbauma można wzmocnić do równoważności.

Maksymalna niesprzeczność

Lemat Lindenbauma – preliminaria:

Maksymalna niesprzeczność

Lemat Lindenbauma – preliminaria:

Fakt1 (z teorii mnogości). Każdy przeliczalny zbiór można uporządkować liniowo

Maksymalna niesprzeczność

Lemat Lindenbauma – preliminaria:

Fakt1 (z teorii mnogości). Każdy przeliczalny zbiór można uporządkować liniowo

Fakt2 Zbiór FOR jest przeliczalny

Maksymalna niesprzeczność

Lemat Lindenbauma – preliminaria:

Fakt1 (z teorii mnogości). Każdy przeliczalny zbiór można uporządkować liniowo
Fakt2 Zbiór FOR jest przeliczalny
Uwaga: dla danego zbioru niesprzecznego może istnieć nawet nieskończenie wiele maksymalnie niesprzecznych poszerzeń – zależy to m.in. od przyjętego uporządkowania FOR

Maksymalna niesprzeczność

Lemat Lindenbauma – preliminaria:

Fakt1 (z teorii mnogości). Każdy przeliczalny zbiór można uporządkować liniowo
Fakt2 Zbiór FOR jest przeliczalny
Uwaga: dla danego zbioru niesprzecznego może istnieć nawet nieskończenie wiele maksymalnie niesprzecznych poszerzeń – zależy to m.in. od przyjętego uporządkowania FOR
Lemat Lindenbauma można udowodnić konstruktywnie lub niekonstruktywnie (przez odwołanie się do mocnych twiedzeń teorii mnogości jak Lemat Kuratowskiego-Zorna, Lemat Tukeya itp.)
Dalej przedstawimy dowód konstruktywny.

Maksymalna niesprzeczność

Lemat Lindenbauma – dowód:

Maksymalna niesprzeczność

Lemat Lindenbauma – dowód:

Zakładamy, że mamy dane dowolne ale określone uporządkowanie zbioru FOR: $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$

Maksymalna niesprzeczność

Lemat Lindenbauma – dowód:

Zakładamy, że mamy dane dowolne ale określone uporządkowanie zbioru FOR: $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$

Definiujemy na jego podstawie indukcyjnie nieskończony ciąg zbiorów formuł: $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \ldots$

Maksymalna niesprzeczność

Lemat Lindenbauma – dowód:

Zakładamy, że mamy dane dowolne ale określone uporządkowanie zbioru FOR: $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$

Definiujemy na jego podstawie indukcyjnie nieskończony ciąg zbiorów formuł: $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \ldots$

$\Delta_0 = \Gamma$

Maksymalna niesprzeczność

Lemat Lindenbauma – dowód:

Zakładamy, że mamy dane dowolne ale określone uporządkowanie zbioru FOR: $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$

Definiujemy na jego podstawie indukcyjnie nieskończony ciąg zbiorów formuł: $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \ldots$

$\Delta_0 = \Gamma$

$$\Delta_{n+1} := \begin{cases} \Delta_n \cup \{\varphi_{n+1}\} & \text{jeżeli } \Delta_n \cup \{\varphi_{n+1}\} \\ & \text{jest niesprzeczna} \\ \Delta_n & \text{w przeciwnym wypadku} \\ & \text{(tzn. jeżeli } \Delta_n \cup \{\varphi_{n+1}\} \\ & \text{jest sprzeczna)} \end{cases}$$

Maksymalna niesprzeczność

Lemat Lindenbauma – dowód:

Zakładamy, że mamy dane dowolne ale określone uporządkowanie zbioru FOR: $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$

Definiujemy na jego podstawie indukcyjnie nieskończony ciąg zbiorów formuł: $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \ldots$

$\Delta_0 = \Gamma$

$$\Delta_{n+1} := \begin{cases} \Delta_n \cup \{\varphi_{n+1}\} & \text{jeżeli } \Delta_n \cup \{\varphi_{n+1}\} \\ & \text{jest niesprzeczna} \\ \Delta_n & \text{w przeciwnym wypadku} \\ & \text{(tzn. jeżeli } \Delta_n \cup \{\varphi_{n+1}\} \\ & \text{jest sprzeczna)} \end{cases}$$

Fakt3: Dla dowolnego $n \geq 0$, Δ_n jest niesprzeczna.

Maksymalna niesprzeczność

Lemat Lindenbauma – dowód:

Zakładamy, że mamy dane dowolne ale określone uporządkowanie zbioru FOR: $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$

Definiujemy na jego podstawie indukcyjnie nieskończony ciąg zbiorów formuł: $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \ldots$

$\Delta_0 = \Gamma$

$$\Delta_{n+1} := \begin{cases} \Delta_n \cup \{\varphi_{n+1}\} & \text{jeżeli } \Delta_n \cup \{\varphi_{n+1}\} \\ & \text{jest niesprzeczna} \\ \Delta_n & \text{w przeciwnym wypadku} \\ & \text{(tzn. jeżeli } \Delta_n \cup \{\varphi_{n+1}\} \\ & \text{jest sprzeczna)} \end{cases}$$

Fakt3: Dla dowolnego $n \geq 0$, Δ_n jest niesprzeczna.

Uwaga1: jest to definicja indukcyjna, w której warunek indukcyjny ma postać alternatywy – jest to częsta forma definicji indukcyjnej

Maksymalna niesprzeczność

Lemat Lindenbauma – dowód:

Maksymalna niesprzeczność

Lemat Lindenbauma – dowód:

Uwaga2: warunek indukcyjny bywa definiowany nieco inaczej:

Maksymalna niesprzeczność

Lemat Lindenbauma – dowód:

Uwaga2: warunek indukcyjny bywa definiowany nieco inaczej:

$$\Delta_{n+1} := \begin{cases} \Delta_n \cup \{\varphi_{n+1}\} & \text{jeżeli } \Delta_n \cup \{\varphi_{n+1}\} \\ & \text{jest niesprzeczna} \\ \Delta_n \cup \{\neg\varphi_{n+1}\} & \text{w przeciwnym wypadku} \\ & \text{(tzn. jeżeli } \Delta_n \cup \{\varphi_{n+1}\} \\ & \text{jest sprzeczna)} \end{cases}$$

lub

Maksymalna niesprzeczność

Lemat Lindenbauma – dowód:

Uwaga2: warunek indukcyjny bywa definiowany nieco inaczej:

$$\Delta_{n+1} := \begin{cases} \Delta_n \cup \{\varphi_{n+1}\} & \text{jeżeli } \Delta_n \cup \{\varphi_{n+1}\} \\ & \text{jest niesprzeczna} \\ \Delta_n \cup \{\neg\varphi_{n+1}\} & \text{w przeciwnym wypadku} \\ & \text{(tzn. jeżeli } \Delta_n \cup \{\varphi_{n+1}\} \\ & \text{jest sprzeczna)} \end{cases}$$

lub

$$\Delta_{n+1} := \begin{cases} \Delta_n \cup \{\varphi_{n+1}\} & \text{jeżeli } \Delta_n \vdash \varphi_{n+1} \\ \Delta_n \cup \{\neg\varphi_{n+1}\} & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases}$$

Maksymalna niesprzeczność

Lemat Lindenbauma – dowód:

Maksymalna niesprzeczność

Lemat Lindenbauma – dowód:

Rozważmy nieskończoną sumę po wszystkich zbiorach w ciągu, tzn. $\bigcup \Delta_n$.

Maksymalna niesprzeczność

Lemat Lindenbauma – dowód:

Rozważmy nieskończoną sumę po wszystkich zbiorach w ciągu, tzn. $\bigcup \Delta_n$.

Lemat6: Własności $\bigcup \Delta_n$

Maksymalna niesprzeczność

Lemat Lindenbauma – dowód:

Rozważmy nieskończoną sumę po wszystkich zbiorach w ciągu, tzn. $\bigcup \Delta_n$.

Lemat6: Własności $\bigcup \Delta_n$

1. $\Delta_n \subseteq \bigcup \Delta_n$, dla dowolnego $n \geq 0$

Maksymalna niesprzeczność

Lemat Lindenbauma – dowód:

Rozważmy nieskończoną sumę po wszystkich zbiorach w ciągu, tzn. $\bigcup \Delta_n$.

Lemat6: Własności $\bigcup \Delta_n$

1. $\Delta_n \subseteq \bigcup \Delta_n$, dla dowolnego $n \geq 0$
2. $\Gamma \subseteq \bigcup \Delta_n$

Maksymalna niesprzeczność

Lemat Lindenbauma – dowód:

Rozważmy nieskończoną sumę po wszystkich zbiorach w ciągu, tzn. $\bigcup \Delta_n$.

Lemat6: Własności $\bigcup \Delta_n$

1. $\Delta_n \subseteq \bigcup \Delta_n$, dla dowolnego $n \geq 0$
2. $\Gamma \subseteq \bigcup \Delta_n$
3. $\Delta_k \subseteq \Delta_n$, dla dowolnego $k \leq n \geq 0$

Maksymalna niesprzeczność

Lemat Lindenbauma – dowód:

Rozważmy nieskończoną sumę po wszystkich zbiorach w ciągu, tzn. $\bigcup \Delta_n$.

Lemat6: Własności $\bigcup \Delta_n$

1. $\Delta_n \subseteq \bigcup \Delta_n$, dla dowolnego $n \geq 0$
2. $\Gamma \subseteq \bigcup \Delta_n$
3. $\Delta_k \subseteq \Delta_n$, dla dowolnego $k \leq n \geq 0$
4. jeżeli $\varphi_k \in \bigcup \Delta_n$, to $\varphi_k \in \Delta_k$ dla dowolnego $k > 0$

Maksymalna niesprzeczność

Lemat Lindenbauma – dowód:

Rozważmy nieskończoną sumę po wszystkich zbiorach w ciągu, tzn. $\bigcup \Delta_n$.

Lemat6: Własności $\bigcup \Delta_n$

1. $\Delta_n \subseteq \bigcup \Delta_n$, dla dowolnego $n \geq 0$
2. $\Gamma \subseteq \bigcup \Delta_n$
3. $\Delta_k \subseteq \Delta_n$, dla dowolnego $k \leq n \geq 0$
4. jeżeli $\varphi_k \in \bigcup \Delta_n$, to $\varphi_k \in \Delta_k$ dla dowolnego $k > 0$
5. dla każdego skończonego $\Delta' \subseteq \bigcup \Delta_n$ istnieje takie $k \geq 0$, że $\Delta' \subseteq \Delta_k$

Maksymalna niesprzeczność

Lemat Lindenbauma – dowód:

Maksymalna niesprzeczność

Lemat Lindenbauma – dowód:

Dowód Lematu 6:

Maksymalna niesprzeczność

Lemat Lindenbauma – dowód:

Dowód Lematu 6:

Własności 1-4 to oczywiste konsekwencje definicji.

Ad 5. dla każdego skończonego $\Delta' \subseteq \bigcup \Delta_n$ istnieje takie $k \geq 0$, że $\Delta' \subseteq \Delta_k$

Maksymalna niesprzeczność

Lemat Lindenbauma – dowód:

Dowód Lematu 6:

Własności 1-4 to oczywiste konsekwencje definicji.

Ad 5. dla każdego skończonego $\Delta' \subseteq \bigcup \Delta_n$ istnieje takie $k \geq 0$, że $\Delta' \subseteq \Delta_k$

Niech Δ' będzie skończonym podzbiorem $\bigcup \Delta_n$ a φ_k niech będzie elementem Δ' z największym indeksem – z racji skończoności Δ' taka formuła musi istnieć. Musimy wykazać, że $\Delta' \subseteq \Delta_k$.

Rozważmy dowolną $\varphi \in \Delta'$, pokażemy, że $\varphi \in \Delta_k$. Z racji uporządkowania formuł $\varphi = \varphi_i$, $i \leq k$ i jest elementem $\bigcup \Delta_n$.

Przez własność 4, $\varphi_i \in \Delta_i$, a przez w. 3, $\Delta_i \subseteq \Delta_k$, zatem $\varphi \in \Delta_k$.

Maksymalna niesprzeczność

Lemat Lindenbauma – dowód:

Maksymalna niesprzeczność

Lemat Lindenbauma – dowód:

Definiujemy maksymalne niesprzeczne poszerzenie Γ jako nieskończoną sumę po wszystkich zbiorach w ciągu, tzn. $\Delta = \bigcup \Delta_n$.

Maksymalna niesprzeczność

Lemat Lindenbauma – dowód:

Definiujemy maksymalne niesprzeczne poszerzenie Γ jako nieskończoną sumę po wszystkich zbiorach w ciągu, tzn. $\Delta = \bigcup \Delta_n$.

Twierdzenie1: Δ jest maksymalnie niesprzecznym poszerzeniem Γ.

Maksymalna niesprzeczność

Lemat Lindenbauma – dowód:

Definiujemy maksymalne niesprzeczne poszerzenie Γ jako nieskończoną sumę po wszystkich zbiorach w ciągu, tzn. $\Delta = \bigcup \Delta_n$.

Twierdzenie1: Δ jest maksymalnie niesprzecznym poszerzeniem Γ.

Twierdzenie2: Jeżeli Γ jest niesprzeczny, to:

1. $\Gamma \vdash \varphi$ wtw $\varphi \in \Delta$, dla dowolnego $\Delta \supseteq \Gamma$, które jest MNSP

Maksymalna niesprzeczność

Lemat Lindenbauma – dowód:

Definiujemy maksymalne niesprzeczne poszerzenie Γ jako nieskończoną sumę po wszystkich zbiorach w ciągu, tzn. $\Delta = \bigcup \Delta_n$.

Twierdzenie1: Δ jest maksymalnie niesprzecznym poszerzeniem Γ.

Twierdzenie2: Jeżeli Γ jest niesprzeczny, to:

1. $\Gamma \vdash \varphi$ wtw $\varphi \in \Delta$, dla dowolnego $\Delta \supseteq \Gamma$, które jest MNSP
2. $\vdash \varphi$ wtw $\varphi \in \Delta$, dla dowolnego Δ, które jest MNSP

Maksymalna niesprzeczność

Lemat Lindenbauma – dowód:

Maksymalna niesprzeczność

Lemat Lindenbauma – dowód:

Dowód: Musimy dowieść, że Δ jest (a) niesprzeczna i (b) maksymalna.
(a) Przez Lemat3, w. 3 wystarczy dowieść, że każdy skończony podzbiór Δ jest niesprzeczny. Załóżmy, że jest skończony sprzeczny $\Delta' \subset \Delta$. Niech $\varphi_n \in \Delta'$ będzie formułą z największym indeksem. Zatem $\Delta' \subseteq \Delta_n$ a to znaczy, przez Lemat 3, w.1, że Δ_n jest sprzeczna, co jest sprzeczne z Faktem3.
(b) Udowodnijmy warunek 2 Lematu4: Załóżmy dla dowolnego φ, że $\Delta \cup \{\varphi\}$ jest niesprzeczna i dowiedziemy, że $\varphi \in \Delta$. Z racji uporządkowania formuł $\varphi = \varphi_n$. Z Lematu2, w.2, każdy podzbiór $\Delta \cup \{\varphi_n\}$ jest niesprzeczny. W szczególności $\Delta_{n-1} \cup \{\varphi_n\}$ jest niesprzeczny, gdyż $\Delta_{n-1} \subset \Delta$ (z Lematu 5, w.1). Zatem z definicji konstrukcji ciągu $\Delta_n = \Delta_{n-1} \cup \{\varphi_n\}$ a skoro $\varphi_n \in \Delta_n$, to $\varphi_n \in \Delta$.

Uwaga: dowiedź (b) dla pozostałych 3 równoważnych sformułowań

Maksymalna niesprzeczność

Dowód Twierdzenia2:

Maksymalna niesprzeczność

Dowód Twierdzenia2:

ad 1. $\Gamma \vdash \varphi$ wtw $\varphi \in \Delta$, dla dowolnego $\Delta \supseteq \Gamma$, które jest MNSP

Maksymalna niesprzeczność

Dowód Twierdzenia2:

ad 1. $\Gamma \vdash \varphi$ wtw $\varphi \in \Delta$, dla dowolnego $\Delta \supseteq \Gamma$, które jest MNSP
$\Longrightarrow$ Niech $\Gamma \vdash \varphi$ i $\Delta \supseteq \Gamma$ będzie MNSP. Przez monotoniczność $\vdash$ (Lemat1, w.2), $\Delta \vdash \varphi$, więc przez maksymalność Δ, $\varphi \in \Delta$ (Lemat5, w.1).
$\Longleftarrow$ Załóżmy, że $\Gamma \nvdash \varphi$, wykażemy, że istnieje $\Delta \supseteq \Gamma$, które jest MNSP ale nie zawiera φ. Z Lematu2, w.6 wynika, że $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ jest niesprzeczna. Z Lematu Lindenbauma wynika, że istnieje MNSP $\Delta \supseteq \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$. Δ jest nadzbiorem Γ i z Lematu 5., w.5 mamy, że $\varphi \notin \Delta$.
ad. 2 $\vdash \varphi$ wtw $\varphi \in \Delta$, dla dowolnego Δ, które jest MNSP do samodzielnego zrobienia.

Maksymalna niesprzeczność

Alternatywne podejścia:

Maksymalna niesprzeczność

Alternatywne podejścia:

- W latach 50-tych G. Asser udowodnił twierdzenie o zbliżonym charakterze, które bardziej bezpośrednio prowadzi do dowodu twierdzenia o pełności.

Maksymalna niesprzeczność

Alternatywne podejścia:

- W latach 50-tych G. Asser udowodnił twierdzenie o zbliżonym charakterze, które bardziej bezpośrednio prowadzi do dowodu twierdzenia o pełności.
- W latach 60-tych R. Smullyann zaproponował bardzo ogólne ujęcie, które pozwala na jednolite dowody wielu metalogicznych twierdzeń dla różnych systemów dedukcyjnych.

Maksymalna niesprzeczność

Alternatywne podejścia:

- W latach 50-tych G. Asser udowodnił twierdzenie o zbliżonym charakterze, które bardziej bezpośrednio prowadzi do dowodu twierdzenia o pełności.
- W latach 60-tych R. Smullyann zaproponował bardzo ogólne ujęcie, które pozwala na jednolite dowody wielu metalogicznych twierdzeń dla różnych systemów dedukcyjnych.
- J. Hintikka w latach 50-tych wprowadził pojęcie zbioru nasyconego w dół (downward-saturated set), które jest istotnie słabsze od pojęcia zbioru maksymalnie niesprzecznego ale wystarczające dla dowodu twierdzeń o pełności.

Konstrukcja Assera

Twierdzenie Assera o relatywnych systemach maksymalnych

Konstrukcja Assera

Twierdzenie Assera o relatywnych systemach maksymalnych

Jeżeli $\Gamma \nvdash \varphi$, to istnieje takie Δ, że:

Konstrukcja Assera

Twierdzenie Assera o relatywnych systemach maksymalnych

Jeżeli $\Gamma \nvdash \varphi$, to istnieje takie Δ, że:

1. $\Gamma \subseteq \Delta$

Konstrukcja Assera

Twierdzenie Assera o relatywnych systemach maksymalnych

Jeżeli $\Gamma \nvdash \varphi$, to istnieje takie Δ, że:

1. $\Gamma \subseteq \Delta$
2. $\varphi \notin \Delta$

Konstrukcja Assera

Twierdzenie Assera o relatywnych systemach maksymalnych

Jeżeli $\Gamma \nvdash \varphi$, to istnieje takie Δ, że:

1. $\Gamma \subseteq \Delta$
2. $\varphi \notin \Delta$
3. jeżeli $\Delta \vdash \psi$, to $\psi \in \Delta$

Konstrukcja Assera

Twierdzenie Assera o relatywnych systemach maksymalnych

Jeżeli $\Gamma \nvdash \varphi$, to istnieje takie Δ, że:

1. $\Gamma \subseteq \Delta$
2. $\varphi \notin \Delta$
3. jeżeli $\Delta \vdash \psi$, to $\psi \in \Delta$
4. jeżeli $\psi \notin \Delta$, to $\Delta, \psi \vdash \varphi$

Konstrukcja Assera

Twierdzenie Assera o relatywnych systemach maksymalnych – uwagi:

Konstrukcja Assera

Twierdzenie Assera o relatywnych systemach maksymalnych – uwagi:

Uwaga1: zbiór relatywnie maksymalny jest z definicji niesprzeczny – dlaczego?

Konstrukcja Assera

Twierdzenie Assera o relatywnych systemach maksymalnych – uwagi:

Uwaga1: zbiór relatywnie maksymalny jest z definicji niesprzeczny – dlaczego?
Uwaga2: w3 można oczywiście wzmocnić do równoważności (dlaczego?) tak, że pokrywa się z własnością 1. zbiorów MNSP z Lematu5.

Konstrukcja Assera

Twierdzenie Assera o relatywnych systemach maksymalnych – uwagi:

Uwaga1: zbiór relatywnie maksymalny jest z definicji niesprzeczny – dlaczego?
Uwaga2: w3 można oczywiście wzmocnić do równoważności (dlaczego?) tak, że pokrywa się z własnością 1. zbiorów MNSP z Lematu5.
Uwaga3: w4 jest odpowiednikiem drugiej charakterystyki zbioru MNSP.

Konstrukcja Assera

Twierdzenie Assera o relatywnych systemach maksymalnych – uwagi:

Uwaga1: zbiór relatywnie maksymalny jest z definicji niesprzeczny – dlaczego?

Uwaga2: w3 można oczywiście wzmocnić do równoważności (dlaczego?) tak, że pokrywa się z własnością 1. zbiorów MNSP z Lematu5.

Uwaga3: w4 jest odpowiednikiem drugiej charakterystyki zbioru MNSP.

Uwaga4: Podobieństwo zbioru relatywnie maksymalnego do zbioru MNSP jest widoczne, jeżeli w powyższej charakterystyce zastąpimy φ przez $\perp$. Zbiór MNSP staje się szczególnym przypadkiem zbioru relatywnie maksymalnego.

Konstrukcja Assera

Dowód Twierdzenia Assera

Konstrukcja Assera

Dowód Twierdzenia Assera

Analogicznie do dowodu Lematu Lindenbauma.

Konstrukcja Assera

Dowód Twierdzenia Assera

Analogicznie do dowodu Lematu Lindenbauma.
Konstruujemy indukcyjnie nieskończony ciąg zbiorów formuł:
$\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \ldots$
taki, że:

Konstrukcja Assera

Dowód Twierdzenia Assera

Analogicznie do dowodu Lematu Lindenbauma.
Konstruujemy indukcyjnie nieskończony ciąg zbiorów formuł:
$\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \ldots$
taki, że:
$\Delta_0 = \Gamma$

Konstrukcja Assera

Dowód Twierdzenia Assera

Analogicznie do dowodu Lematu Lindenbauma.

Konstruujemy indukcyjnie nieskończony ciąg zbiorów formuł:

$\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \ldots$

taki, że:

$\Delta_0 = \Gamma$

$\Delta_1 = Cn(\Gamma)$

Konstrukcja Assera

Dowód Twierdzenia Assera

Analogicznie do dowodu Lematu Lindenbauma.
Konstruujemy indukcyjnie nieskończony ciąg zbiorów formuł:
$\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \ldots$
taki, że:
$\Delta_0 = \Gamma$
$\Delta_1 = Cn(\Gamma)$

$$\Delta_{n+1} := \begin{cases} Cn(\Delta_n \cup \{\varphi_{n+1}\}) & \text{jeżeli } \Delta_n \cup \{\varphi_{n+1}\} \nvdash \varphi \\ \Delta_n & \text{w przeciwnym wypadku} \\ & (\text{tzn. jeżeli } \Delta_n \cup \{\varphi_{n+1}\} \vdash \varphi) \end{cases}$$

Konstrukcja Assera

Dowód Twierdzenia Assera

Konstrukcja Assera

Dowód Twierdzenia Assera

Dla dowolnego Δ_i, $i \geq 1$ można dowieść własności 1 – 3 z Tw. Assera oraz $\Delta_i \subseteq \Delta_{i+1}$ (proszę dowieść).

Konstrukcja Assera

Dowód Twierdzenia Assera

Dla dowolnego $\Delta_i, i \geq 1$ można dowieść własności 1 – 3 z Tw. Assera oraz $\Delta_i \subseteq \Delta_{i+1}$ (proszę dowieść).
Zbiorem relatywnie maksymalnym dla φ jest nieskończona suma po ciągu $\Delta_0, \Delta_1, ...$ – $\bigcup \Delta_n = \Delta$.

Konstrukcja Assera

Dowód Twierdzenia Assera

Dla dowolnego Δ_i, $i \geq 1$ można dowieść własności 1 – 3 z Tw. Assera oraz $\Delta_i \subseteq \Delta_{i+1}$ (proszę dowieść).

Zbiorem relatywnie maksymalnym dla φ jest nieskończona suma po ciągu $\Delta_0, \Delta_1, \ldots$ – $\bigcup \Delta_n = \Delta$.

Aby dowieść Tw. Assera trzeba udowodnić, że Δ ma własności 1 – 4 (zadanie domowe).

Konstrukcja Assera

Dowód Twierdzenia Assera

Konstrukcja Assera

Dowód Twierdzenia Assera

Dla dowolnego zbioru maksymalnie relatywnego można też dowieść inne własności posiadane przez zbiory MNSP. W szczególności na potrzeby dowodu twierdzenia o pełności odnotujmy, że dowolna Γ, która jest maksymalnie relatywna jest nasycona względem stałych logicznych, tj.:

Konstrukcja Assera

Dowód Twierdzenia Assera

Dla dowolnego zbioru maksymalnie relatywnego można też dowieść inne własności posiadane przez zbiory MNSP. W szczególności na potrzeby dowodu twierdzenia o pełności odnotujmy, że dowolna Γ, która jest maksymalnie relatywna jest nasycona względem stałych logicznych, tj.:

1. $\neg\varphi \in \Gamma$ wtw $\varphi \notin \Gamma$

Konstrukcja Assera

Dowód Twierdzenia Assera

Dla dowolnego zbioru maksymalnie relatywnego można też dowieść inne własności posiadane przez zbiory MNSP. W szczególności na potrzeby dowodu twierdzenia o pełności odnotujmy, że dowolna Γ, która jest maksymalnie relatywna jest nasycona względem stałych logicznych, tj.:

1. $\neg\varphi \in \Gamma$ wtw $\varphi \notin \Gamma$
2. $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$ wtw $\varphi \in \Gamma$ i $\psi \in \Gamma$

Konstrukcja Assera

Dowód Twierdzenia Assera

Dla dowolnego zbioru maksymalnie relatywnego można też dowieść inne własności posiadane przez zbiory MNSP. W szczególności na potrzeby dowodu twierdzenia o pełności odnotujmy, że dowolna Γ, która jest maksymalnie relatywna jest nasycona względem stałych logicznych, tj.:

1. $\neg\varphi \in \Gamma$ wtw $\varphi \notin \Gamma$
2. $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$ wtw $\varphi \in \Gamma$ i $\psi \in \Gamma$
3. $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ wtw $\varphi \in \Gamma$ lub $\psi \in \Gamma$

Konstrukcja Assera

Dowód Twierdzenia Assera

Dla dowolnego zbioru maksymalnie relatywnego można też dowieść inne własności posiadane przez zbiory MNSP. W szczególności na potrzeby dowodu twierdzenia o pełności odnotujmy, że dowolna Γ, która jest maksymalnie relatywna jest nasycona względem stałych logicznych, tj.:

1. $\neg\varphi \in \Gamma$ wtw $\varphi \notin \Gamma$
2. $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$ wtw $\varphi \in \Gamma$ i $\psi \in \Gamma$
3. $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ wtw $\varphi \in \Gamma$ lub $\psi \in \Gamma$
4. $\varphi \rightarrow \psi \in \Gamma$ wtw $\varphi \notin \Gamma$ lub $\psi \in \Gamma$

Konstrukcja Smullyana

Niech *CON* (Consistency Property) oznacza dowolną rodzinę zbiorów formuł, która spełnia następujące warunki dla każdego $\Gamma \in CON$:

Konstrukcja Smullyana

Niech *CON* (Consistency Property) oznacza dowolną rodzinę zbiorów formuł, która spełnia następujące warunki dla każdego $\Gamma \in CON$:

1. $\perp \notin \Gamma$

Konstrukcja Smullyana

Niech *CON* (Consistency Property) oznacza dowolną rodzinę zbiorów formuł, która spełnia następujące warunki dla każdego $\Gamma \in CON$:

1. $\perp \notin \Gamma$
2. jeżeli $\neg\neg\varphi \in \Gamma$, to $\Gamma \cup \{\varphi\} \in CON$

Konstrukcja Smullyana

Niech *CON* (Consistency Property) oznacza dowolną rodzinę zbiorów formuł, która spełnia następujące warunki dla każdego $\Gamma \in CON$:

1. $\bot \notin \Gamma$
2. jeżeli $\neg\neg\varphi \in \Gamma$, to $\Gamma \cup \{\varphi\} \in CON$
3. jeżeli $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$, to $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\} \in CON$

Konstrukcja Smullyana

Niech *CON* (Consistency Property) oznacza dowolną rodzinę zbiorów formuł, która spełnia następujące warunki dla każdego $\Gamma \in CON$:

1. $\bot \notin \Gamma$
2. jeżeli $\neg\neg\varphi \in \Gamma$, to $\Gamma \cup \{\varphi\} \in CON$
3. jeżeli $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$, to $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\} \in CON$
4. jeżeli $\neg(\varphi \wedge \psi) \in \Gamma$, to $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \in CON$ lub $\Gamma \cup \{\neg\psi\} \in CON$

Konstrukcja Smullyana

Niech *CON* (Consistency Property) oznacza dowolną rodzinę zbiorów formuł, która spełnia następujące warunki dla każdego $\Gamma \in CON$:

1. $\perp \notin \Gamma$
2. jeżeli $\neg\neg\varphi \in \Gamma$, to $\Gamma \cup \{\varphi\} \in CON$
3. jeżeli $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$, to $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\} \in CON$
4. jeżeli $\neg(\varphi \wedge \psi) \in \Gamma$, to $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \in CON$ lub $\Gamma \cup \{\neg\psi\} \in CON$
5. jeżeli $\varphi \vee \psi \in \Gamma$, to $\Gamma \cup \{\varphi\} \in CON$ lub $\Gamma \cup \{\psi\} \in CON$

Konstrukcja Smullyana

Niech *CON* (Consistency Property) oznacza dowolną rodzinę zbiorów formuł, która spełnia następujące warunki dla każdego $\Gamma \in CON$:

1. $\perp \notin \Gamma$
2. jeżeli $\neg\neg\varphi \in \Gamma$, to $\Gamma \cup \{\varphi\} \in CON$
3. jeżeli $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$, to $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\} \in CON$
4. jeżeli $\neg(\varphi \wedge \psi) \in \Gamma$, to $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \in CON$ lub $\Gamma \cup \{\neg\psi\} \in CON$
5. jeżeli $\varphi \vee \psi \in \Gamma$, to $\Gamma \cup \{\varphi\} \in CON$ lub $\Gamma \cup \{\psi\} \in CON$
6. jeżeli $\neg(\varphi \vee \psi) \in \Gamma$, to $\Gamma \cup \{\neg\varphi, \neg\psi\} \in CON$

Konstrukcja Smullyana

Niech *CON* (Consistency Property) oznacza dowolną rodzinę zbiorów formuł, która spełnia następujące warunki dla każdego $\Gamma \in CON$:

1. $\bot \notin \Gamma$
2. jeżeli $\neg\neg\varphi \in \Gamma$, to $\Gamma \cup \{\varphi\} \in CON$
3. jeżeli $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$, to $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\} \in CON$
4. jeżeli $\neg(\varphi \wedge \psi) \in \Gamma$, to $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \in CON$ lub $\Gamma \cup \{\neg\psi\} \in CON$
5. jeżeli $\varphi \vee \psi \in \Gamma$, to $\Gamma \cup \{\varphi\} \in CON$ lub $\Gamma \cup \{\psi\} \in CON$
6. jeżeli $\neg(\varphi \vee \psi) \in \Gamma$, to $\Gamma \cup \{\neg\varphi, \neg\psi\} \in CON$
7. jeżeli $\varphi \rightarrow \psi \in \Gamma$, to $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \in CON$ lub $\Gamma \cup \{\psi\} \in CON$

Konstrukcja Smullyana

Niech *CON* (Consistency Property) oznacza dowolną rodzinę zbiorów formuł, która spełnia następujące warunki dla każdego $\Gamma \in CON$:

1. $\perp \notin \Gamma$
2. jeżeli $\neg\neg\varphi \in \Gamma$, to $\Gamma \cup \{\varphi\} \in CON$
3. jeżeli $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$, to $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\} \in CON$
4. jeżeli $\neg(\varphi \wedge \psi) \in \Gamma$, to $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \in CON$ lub $\Gamma \cup \{\neg\psi\} \in CON$
5. jeżeli $\varphi \vee \psi \in \Gamma$, to $\Gamma \cup \{\varphi\} \in CON$ lub $\Gamma \cup \{\psi\} \in CON$
6. jeżeli $\neg(\varphi \vee \psi) \in \Gamma$, to $\Gamma \cup \{\neg\varphi, \neg\psi\} \in CON$
7. jeżeli $\varphi \rightarrow \psi \in \Gamma$, to $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \in CON$ lub $\Gamma \cup \{\psi\} \in CON$
8. jeżeli $\neg(\varphi \rightarrow \psi) \in \Gamma$, to $\Gamma \cup \{\varphi, \neg\psi\} \in CON$

Konstrukcja Smullyana

CON jest finitarne jeżeli dodatkowo spełnia następujący warunek dla każdego $\Gamma \in CON$:

Konstrukcja Smullyana

CON jest finitarne jeżeli dodatkowo spełnia następujący warunek dla każdego $\Gamma \in CON$:

$\Gamma \in CON$ wtw dla dowolnego skończonego $\Delta \subseteq \Gamma, \Delta \in CON$

Konstrukcja Smullyana

CON jest finitarne jeżeli dodatkowo spełnia następujący warunek dla każdego $\Gamma \in CON$:

$\Gamma \in CON$ wtw dla dowolnego skończonego $\Delta \subseteq \Gamma, \Delta \in CON$
Można udowodnić ogólnie, że dowolne CON może być poszerzone do finitarnego (Fitting) lub – bardziej konkretnie – wykazać dla odpowiednio zdefiniowanych zbiorów, że tworzą finitarną CON.

Konstrukcja Smullyana

CON jest finitarne jeżeli dodatkowo spełnia następujący warunek dla każdego $\Gamma \in CON$:

$\Gamma \in CON$ wtw dla dowolnego skończonego $\Delta \subseteq \Gamma, \Delta \in CON$
Można udowodnić ogólnie, że dowolne CON może być poszerzone do finitarnego (Fitting) lub – bardziej konkretnie – wykazać dla odpowiednio zdefiniowanych zbiorów, że tworzą finitarną CON.
Twierdzenie3: Jeżeli $\Gamma \in CON$, które jest finitarne, to istnieje maksymalne $\Delta \in CON$, takie, że $\Gamma \subseteq \Delta$.

Konstrukcja Smullyana

CON jest finitarne jeżeli dodatkowo spełnia następujący warunek dla każdego $\Gamma \in CON$:

$\Gamma \in CON$ wtw dla dowolnego skończonego $\Delta \subseteq \Gamma, \Delta \in CON$
Można udowodnić ogólnie, że dowolne CON może być poszerzone do finitarnego (Fitting) lub – bardziej konkretnie – wykazać dla odpowiednio zdefiniowanych zbiorów, że tworzą finitarną CON.
Twierdzenie3: Jeżeli $\Gamma \in CON$, które jest finitarne, to istnieje maksymalne $\Delta \in CON$, takie, że $\Gamma \subseteq \Delta$.
Dowód analogiczny do dowodu Lematu Lindenbauma. Musimy tylko wstępnie dowieść, że dla dowolnego ciągu $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \ldots$ elementów CON, takiego, że $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2 \subseteq \Gamma_3 \subseteq \ldots$, również $\bigcup \Gamma_n \in CON$.

Konstrukcja Smullyana

Przykłady finitarnych CON:

Konstrukcja Smullyana

Przykłady finitarnych CON:

Niech $HNSP = \{\Gamma : \Gamma \nvdash \bot\}$

Konstrukcja Smullyana

Przykłady finitarnych CON:

Niech $HNSP = \{\Gamma : \Gamma \nvdash \bot\}$

Twierdzenie4: $HNSP$ jest finitarną CON.

Konstrukcja Smullyana

Przykłady finitarnych CON:

Niech $HNSP = \{\Gamma : \Gamma \nvdash \perp\}$

Twierdzenie4: *HNSP* jest finitarną *CON*.

Dowód: Trzeba wykazać, że dowolny element *HNSP* spełnia warunki definiujące *CON*.

Konstrukcja Smullyana

Przykłady finitarnych CON:

Niech $HNSP = \{\Gamma : \Gamma \nvdash \bot\}$

Twierdzenie4: $HNSP$ jest finitarną CON.

Dowód: Trzeba wykazać, że dowolny element $HNSP$ spełnia warunki definiujące CON.

Finitarność $HNSP$ wynika z Lematu3, w.3.

Konstrukcja Smullyana

Przykłady finitarnych CON:

Niech $HNSP = \{\Gamma : \Gamma \nvdash \perp\}$

Twierdzenie4: $HNSP$ jest finitarną CON.

Dowód: Trzeba wykazać, że dowolny element $HNSP$ spełnia warunki definiujące CON.

Finitarność $HNSP$ wynika z Lematu3, w.3.

ad 1. $\perp \notin \Gamma$

Konstrukcja Smullyana

Przykłady finitarnych CON:

Niech $HNSP = \{\Gamma : \Gamma \nvdash \perp\}$

Twierdzenie4: $HNSP$ jest finitarną CON.

Dowód: Trzeba wykazać, że dowolny element $HNSP$ spełnia warunki definiujące CON.

Finitarność $HNSP$ wynika z Lematu3, w.3.

ad 1. $\perp \notin \Gamma$

Gdyby $\perp \in \Gamma$, to przez zwrotność $\vdash$, $\Gamma \vdash \perp$ – sprzeczność.

Konstrukcja Smullyana

Przykłady finitarnych CON:

Niech $HNSP = \{\Gamma : \Gamma \nvdash \bot\}$

Twierdzenie4: $HNSP$ jest finitarną CON.

Dowód: Trzeba wykazać, że dowolny element $HNSP$ spełnia warunki definiujące CON.

Finitarność $HNSP$ wynika z Lematu3, w.3.

ad 1. $\bot \notin \Gamma$

Gdyby $\bot \in \Gamma$, to przez zwrotność $\vdash$, $\Gamma \vdash \bot$ – sprzeczność.

ad 2. jeżeli $\neg\neg\varphi \in \Gamma$, to $\Gamma \cup \{\varphi\} \in CON$

Konstrukcja Smullyana

Przykłady finitarnych CON:

Niech $HNSP = \{\Gamma : \Gamma \nvdash \bot\}$

Twierdzenie4: $HNSP$ jest finitarną CON.

Dowód: Trzeba wykazać, że dowolny element $HNSP$ spełnia warunki definiujące CON.

Finitarność $HNSP$ wynika z Lematu3, w.3.

ad 1. $\bot \notin \Gamma$

Gdyby $\bot \in \Gamma$, to przez zwrotność $\vdash$, $\Gamma \vdash \bot$ – sprzeczność.

ad 2. jeżeli $\neg\neg\varphi \in \Gamma$, to $\Gamma \cup \{\varphi\} \in CON$

Niech $\neg\neg\varphi \in \Gamma \in HNSP$ ale $\Gamma \cup \{\varphi\} \notin HNSP$, czyli $\Gamma \nvdash \bot$ ale $\Gamma, \varphi \vdash \bot$. Przez Lemat 3, w.3, $\Gamma \vdash \neg\varphi$, a ponieważ $\neg\neg\varphi \vdash \varphi$, to, przez Lemat2, w. 9, $\Gamma, \neg\neg\varphi \vdash \bot = \Gamma \vdash \bot$ – sprzeczność.

Konstrukcja Smullyana

Przykłady finitarnych CON:

Konstrukcja Smullyana

Przykłady finitarnych CON:

ad 8. jeżeli $\varphi \to \psi \in \Gamma$, to $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \in CON$ lub $\Gamma \cup \{\psi\} \in CON$

Konstrukcja Smullyana

Przykłady finitarnych CON:

ad 8. jeżeli $\varphi \to \psi \in \Gamma$, to $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \in CON$ lub $\Gamma \cup \{\psi\} \in CON$
Załóżmy, że $\varphi \to \psi \in \Gamma \in HNSP$ ale $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \notin HNSP$ i $\Gamma \cup \{\psi\} \notin HNSP$. Czyli $\Gamma \nvdash \bot$ ale $\Gamma, \neg\varphi \vdash \bot$ i $\Gamma, \psi \vdash \bot$. Zatem $\Gamma \vdash \varphi$ przez Lemat3, w.3, a ponieważ $\varphi, \varphi \to \psi \vdash \psi$, więc przez przechodniość $\vdash$ mamy $\Gamma, \varphi \to \varphi \vdash \psi$, co (znów przez przechodniość) daje $\Gamma, \varphi \to \psi \vdash \bot = \Gamma \vdash \bot$ – sprzeczność.

Konstrukcja Smullyana

Przykłady finitarnych CON:

ad 8. jeżeli $\varphi \to \psi \in \Gamma$, to $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \in CON$ lub $\Gamma \cup \{\psi\} \in CON$
Załóżmy, że $\varphi \to \psi \in \Gamma \in HNSP$ ale $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \notin HNSP$ i $\Gamma \cup \{\psi\} \notin HNSP$. Czyli $\Gamma \nvdash \bot$ ale $\Gamma, \neg\varphi \vdash \bot$ i $\Gamma, \psi \vdash \bot$. Zatem $\Gamma \vdash \varphi$ przez Lemat3, w.3, a ponieważ $\varphi, \varphi \to \psi \vdash \psi$, więc przez przechodniość $\vdash$ mamy $\Gamma, \varphi \to \varphi \vdash \psi$, co (znów przez przechodniość) daje $\Gamma, \varphi \to \psi \vdash \bot = \Gamma \vdash \bot$ – sprzeczność.
ad 9. jeżeli $\neg(\varphi \to \psi) \in \Gamma$, to $\Gamma \cup \{\varphi, \neg\psi\} \in CON$

Konstrukcja Smullyana

Przykłady finitarnych CON:

ad 8. jeżeli $\varphi \to \psi \in \Gamma$, to $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \in CON$ lub $\Gamma \cup \{\psi\} \in CON$
Załóżmy, że $\varphi \to \psi \in \Gamma \in HNSP$ ale $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \notin HNSP$ i $\Gamma \cup \{\psi\} \notin HNSP$. Czyli $\Gamma \nvdash \bot$ ale $\Gamma, \neg\varphi \vdash \bot$ i $\Gamma, \psi \vdash \bot$. Zatem $\Gamma \vdash \varphi$ przez Lemat3, w.3, a ponieważ $\varphi, \varphi \to \psi \vdash \psi$, więc przez przechodniość $\vdash$ mamy $\Gamma, \varphi \to \varphi \vdash \psi$, co (znów przez przechodniość) daje $\Gamma, \varphi \to \psi \vdash \bot = \Gamma \vdash \bot$ – sprzeczność.
ad 9. jeżeli $\neg(\varphi \to \psi) \in \Gamma$, to $\Gamma \cup \{\varphi, \neg\psi\} \in CON$
Załóżmy, że $\neg(\varphi \to \psi) \in \Gamma \in HNSP$ ale $\Gamma \cup \{\varphi, \neg\psi\} \notin HNSP$. Czyli $\Gamma \nvdash \bot$ ale $\Gamma, \varphi, \neg\psi \vdash \bot$. Zatem $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ przez Lemat3, w.3, a przez DT $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$, co (znów przez Lemat3, w.3) daje $\Gamma, \neg(\varphi \to \psi) \vdash \bot = \Gamma \vdash \bot$ – sprzeczność.

Konstrukcja Smullyana

Przykłady finitarnych CON:

ad 8. jeżeli $\varphi \to \psi \in \Gamma$, to $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \in CON$ lub $\Gamma \cup \{\psi\} \in CON$
Załóżmy, że $\varphi \to \psi \in \Gamma \in HNSP$ ale $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \notin HNSP$ i $\Gamma \cup \{\psi\} \notin HNSP$. Czyli $\Gamma \nvdash \bot$ ale $\Gamma, \neg\varphi \vdash \bot$ i $\Gamma, \psi \vdash \bot$. Zatem $\Gamma \vdash \varphi$ przez Lemat3, w.3, a ponieważ $\varphi, \varphi \to \psi \vdash \psi$, więc przez przechodniość $\vdash$ mamy $\Gamma, \varphi \to \varphi \vdash \psi$, co (znów przez przechodniość) daje $\Gamma, \varphi \to \psi \vdash \bot = \Gamma \vdash \bot$ – sprzeczność.
ad 9. jeżeli $\neg(\varphi \to \psi) \in \Gamma$, to $\Gamma \cup \{\varphi, \neg\psi\} \in CON$
Załóżmy, że $\neg(\varphi \to \psi) \in \Gamma \in HNSP$ ale $\Gamma \cup \{\varphi, \neg\psi\} \notin HNSP$. Czyli $\Gamma \nvdash \bot$ ale $\Gamma, \varphi, \neg\psi \vdash \bot$. Zatem $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ przez Lemat3, w.3, a przez DT $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$, co (znów przez Lemat3, w.3) daje $\Gamma, \neg(\varphi \to \psi) \vdash \bot = \Gamma \vdash \bot$ – sprzeczność.
Udowodnić warunki 3 – 7

Konstrukcja Smullyana

Przykłady finitarnych CON:

Wariant powyższego:

Konstrukcja Smullyana

Przykłady finitarnych CON:

Wariant powyższego:

Niech $\varphi - HNSP = \{\Gamma : \Gamma \nvdash \varphi\}$

Konstrukcja Smullyana

Przykłady finitarnych CON:

Wariant powyższego:

Niech $\varphi - HNSP = \{\Gamma : \Gamma \nvdash \varphi\}$

Fakt4: Jeżeli $\Gamma \in \varphi - HNSP$, to $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \in \varphi - HNSP$.

Konstrukcja Smullyana

Przykłady finitarnych CON:

Wariant powyższego:

Niech $\varphi - HNSP = \{\Gamma : \Gamma \nvdash \varphi\}$

Fakt4: Jeżeli $\Gamma \in \varphi - HNSP$, to $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \in \varphi - HNSP$.

Dowód: Niech $\Gamma \nvdash \varphi$, ale $\Gamma, \neg\varphi \vdash \varphi$. Wtedy przez TD $\Gamma \vdash \neg\varphi \to \varphi$, co przez $\vdash (\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi$ daje $\Gamma \vdash \varphi$ – sprzeczność.

Konstrukcja Smullyana

Przykłady finitarnych CON: $\varphi - HNSP = \{\Gamma : \Gamma \nvdash \varphi\}$

Konstrukcja Smullyana

Przykłady finitarnych CON: $\varphi - HNSP = \{\Gamma : \Gamma \nvdash \varphi\}$

Twierdzenie5: $\varphi - HNSP$ jest finitarną CON.

Konstrukcja Smullyana

Przykłady finitarnych CON: $\varphi - HNSP = \{\Gamma : \Gamma \nvdash \varphi\}$

Twierdzenie5: $\varphi - HNSP$ jest finitarną CON.

Dowód: analogicznie jak dla $HNSP$. Co do finitarności trzeba wykazać, że

Konstrukcja Smullyana

Przykłady finitarnych CON: $\varphi - HNSP = \{\Gamma : \Gamma \nvdash \varphi\}$

Twierdzenie5: $\varphi - HNSP$ jest finitarną CON.

Dowód: analogicznie jak dla $HNSP$. Co do finitarności trzeba wykazać, że

$\Gamma \nvdash \varphi$ wtw $\Delta \nvdash \varphi$, dla dowolnego skończonego $\Delta \subseteq \Gamma$

Konstrukcja Smullyana

Przykłady finitarnych CON: $\varphi - HNSP = \{\Gamma : \Gamma \nvdash \varphi\}$

Twierdzenie5: $\varphi - HNSP$ jest finitarną CON.

Dowód: analogicznie jak dla $HNSP$. Co do finitarności trzeba wykazać, że

$\Gamma \nvdash \varphi$ wtw $\Delta \nvdash \varphi$, dla dowolnego skończonego $\Delta \subseteq \Gamma$

$\Longrightarrow$ Załóżmy niewprost, że jakieś skończone $\Delta \subseteq \Gamma$, ale $\Delta \vdash \varphi$. Z definicji $\vdash$ również $\Gamma \vdash \varphi$.

Konstrukcja Smullyana

Przykłady finitarnych CON: $\varphi - HNSP = \{\Gamma : \Gamma \nvdash \varphi\}$

Twierdzenie5: $\varphi - HNSP$ jest finitarną CON.

Dowód: analogicznie jak dla $HNSP$. Co do finitarności trzeba wykazać, że

$\Gamma \nvdash \varphi$ wtw $\Delta \nvdash \varphi$, dla dowolnego skończonego $\Delta \subseteq \Gamma$

$\Longrightarrow$ Załóżmy niewprost, że jakieś skończone $\Delta \subseteq \Gamma$, ale $\Delta \vdash \varphi$. Z definicji $\vdash$ również $\Gamma \vdash \varphi$.

$\Longleftarrow$ Załóżmy niewprost, że $\Gamma \vdash \varphi$, zatem istnieje skończony zbiór $\Delta \subseteq \Gamma$, taki, że $\Delta \vdash \varphi$ co jest sprzeczne z założeniem.

Konstrukcja Smullyana

Przykłady finitarnych CON: $\varphi - HNSP = \{\Gamma : \Gamma \nvdash \varphi\}$

Twierdzenie5: $\varphi - HNSP$ jest finitarną CON.

Dowód: analogicznie jak dla $HNSP$. Co do finitarności trzeba wykazać, że

$\Gamma \nvdash \varphi$ wtw $\Delta \nvdash \varphi$, dla dowolnego skończonego $\Delta \subseteq \Gamma$

$\Longrightarrow$ Załóżmy niewprost, że jakieś skończone $\Delta \subseteq \Gamma$, ale $\Delta \vdash \varphi$. Z definicji $\vdash$ również $\Gamma \vdash \varphi$.

$\Longleftarrow$ Załóżmy niewprost, że $\Gamma \vdash \varphi$, zatem istnieje skończony zbiór $\Delta \subseteq \Gamma$, taki, że $\Delta \vdash \varphi$ co jest sprzeczne z założeniem.

ad 1. $\bot \notin \Gamma$

Konstrukcja Smullyana

Przykłady finitarnych CON: $\varphi - HNSP = \{\Gamma : \Gamma \nvdash \varphi\}$

Twierdzenie5: $\varphi - HNSP$ jest finitarną CON.

Dowód: analogicznie jak dla $HNSP$. Co do finitarności trzeba wykazać, że

$\Gamma \nvdash \varphi$ wtw $\Delta \nvdash \varphi$, dla dowolnego skończonego $\Delta \subseteq \Gamma$

$\Longrightarrow$ Załóżmy niewprost, że jakieś skończone $\Delta \subseteq \Gamma$, ale $\Delta \vdash \varphi$. Z definicji $\vdash$ również $\Gamma \vdash \varphi$.

$\Longleftarrow$ Załóżmy niewprost, że $\Gamma \vdash \varphi$, zatem istnieje skończony zbiór $\Delta \subseteq \Gamma$, taki, że $\Delta \vdash \varphi$ co jest sprzeczne z założeniem.

ad 1. $\bot \notin \Gamma$

Gdyby $\bot$ należało do $\Gamma \in \varphi - HNSP$, to przez zwrotność $\vdash$ mamy $\Gamma \vdash \bot$ a ponieważ $\vdash \bot \rightarrow \varphi$, to $\Gamma \vdash \varphi$ wbrew założeniu.

Konstrukcja Smullyana

Przykłady finitarnych CON: $\varphi - HNSP = \{\Gamma : \Gamma \nvdash \varphi\}$

Twierdzenie5: $\varphi - HNSP$ jest finitarną CON.

Dowód: analogicznie jak dla $HNSP$. Co do finitarności trzeba wykazać, że

$\Gamma \nvdash \varphi$ wtw $\Delta \nvdash \varphi$, dla dowolnego skończonego $\Delta \subseteq \Gamma$

$\Longrightarrow$ Załóżmy niewprost, że jakieś skończone $\Delta \subseteq \Gamma$, ale $\Delta \vdash \varphi$. Z definicji $\vdash$ również $\Gamma \vdash \varphi$.

$\Longleftarrow$ Załóżmy niewprost, że $\Gamma \vdash \varphi$, zatem istnieje skończony zbiór $\Delta \subseteq \Gamma$, taki, że $\Delta \vdash \varphi$ co jest sprzeczne z założeniem.

ad 1. $\bot \notin \Gamma$

Gdyby $\bot$ należało do $\Gamma \in \varphi - HNSP$, to przez zwrotność $\vdash$ mamy $\Gamma \vdash \bot$ a ponieważ $\vdash \bot \to \varphi$, to $\Gamma \vdash \varphi$ wbrew założeniu.

Zadanie: Udowodnić pozostałe warunki.

Konstrukcja Hintikki

Zbiory Hintikki

Konstrukcja Hintikki

Zbiory Hintikki

Uwaga – Przypomnienie: Zbiory MNSP czy zbiory relatywnie maksymalne są nasycone ze względu na stałe logiczne, tj spełniają następujące warunki:

Konstrukcja Hintikki

Zbiory Hintikki

Uwaga – Przypomnienie: Zbiory MNSP czy zbiory relatywnie maksymalne są nasycone ze względu na stałe logiczne, tj spełniają następujące warunki:

1. $\neg\varphi \in \Gamma$ wtw $\varphi \notin \Gamma$
2. $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$ wtw $\varphi \in \Gamma$ i $\psi \in \Gamma$
3. $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ wtw $\varphi \in \Gamma$ lub $\psi \in \Gamma$
4. $\varphi \rightarrow \psi \in \Gamma$ wtw $\varphi \notin \Gamma$ lub $\psi \in \Gamma$

Konstrukcja Hintikki

Zbiory Hintikki

Uwaga – Przypomnienie: Zbiory MNSP czy zbiory relatywnie maksymalne są nasycone ze względu na stałe logiczne, tj spełniają następujące warunki:

1. $\neg\varphi \in \Gamma$ wtw $\varphi \notin \Gamma$
2. $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$ wtw $\varphi \in \Gamma$ i $\psi \in \Gamma$
3. $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ wtw $\varphi \in \Gamma$ lub $\psi \in \Gamma$
4. $\varphi \rightarrow \psi \in \Gamma$ wtw $\varphi \notin \Gamma$ lub $\psi \in \Gamma$

Ze względu na dowód twierdzenia o pełności są to konstrukcje bardzo silne. Hintikka pokazał, że wystarczy konstrukcja słabsza – zbiór nasycony w dół (downward saturated).

Konstrukcja Hintikki

Zbiory Hintikki spełniają następujące warunki:

Konstrukcja Hintikki

Zbiory Hintikki spełniają następujące warunki:

1. jeżeli $\varphi \in \Gamma$, to $\neg\varphi \notin \Gamma$

Konstrukcja Hintikki

Zbiory Hintikki spełniają następujące warunki:

1. jeżeli $\varphi \in \Gamma$, to $\neg\varphi \notin \Gamma$
2. jeżeli $\neg\neg\varphi \in \Gamma$, to $\varphi \in \Gamma$

Konstrukcja Hintikki

Zbiory Hintikki spełniają następujące warunki:

1. jeżeli $\varphi \in \Gamma$, to $\neg\varphi \notin \Gamma$
2. jeżeli $\neg\neg\varphi \in \Gamma$, to $\varphi \in \Gamma$
3. jeżeli $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$, to $\varphi \in \Gamma$ i $\psi \in \Gamma$

Konstrukcja Hintikki

Zbiory Hintikki spełniają następujące warunki:

1. jeżeli $\varphi \in \Gamma$, to $\neg\varphi \notin \Gamma$
2. jeżeli $\neg\neg\varphi \in \Gamma$, to $\varphi \in \Gamma$
3. jeżeli $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$, to $\varphi \in \Gamma$ i $\psi \in \Gamma$
4. jeżeli $\neg(\varphi \wedge \psi) \in \Gamma$, to $\neg\varphi \in \Gamma$ lub $\neg\psi \in \Gamma$

Konstrukcja Hintikki

Zbiory Hintikki spełniają następujące warunki:

1. jeżeli $\varphi \in \Gamma$, to $\neg\varphi \notin \Gamma$
2. jeżeli $\neg\neg\varphi \in \Gamma$, to $\varphi \in \Gamma$
3. jeżeli $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$, to $\varphi \in \Gamma$ i $\psi \in \Gamma$
4. jeżeli $\neg(\varphi \wedge \psi) \in \Gamma$, to $\neg\varphi \in \Gamma$ lub $\neg\psi \in \Gamma$
5. jeżeli $\varphi \vee \psi \in \Gamma$, to $\varphi \in \Gamma$ lub $\psi \in \Gamma$

Konstrukcja Hintikki

Zbiory Hintikki spełniają następujące warunki:

1. jeżeli $\varphi \in \Gamma$, to $\neg\varphi \notin \Gamma$
2. jeżeli $\neg\neg\varphi \in \Gamma$, to $\varphi \in \Gamma$
3. jeżeli $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$, to $\varphi \in \Gamma$ i $\psi \in \Gamma$
4. jeżeli $\neg(\varphi \wedge \psi) \in \Gamma$, to $\neg\varphi \in \Gamma$ lub $\neg\psi \in \Gamma$
5. jeżeli $\varphi \vee \psi \in \Gamma$, to $\varphi \in \Gamma$ lub $\psi \in \Gamma$
6. jeżeli $\neg(\varphi \vee \psi) \in \Gamma$, to $\neg\varphi \in \Gamma$ i $\neg\psi \in \Gamma$

Konstrukcja Hintikki

Zbiory Hintikki spełniają następujące warunki:

1. jeżeli $\varphi \in \Gamma$, to $\neg\varphi \notin \Gamma$
2. jeżeli $\neg\neg\varphi \in \Gamma$, to $\varphi \in \Gamma$
3. jeżeli $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$, to $\varphi \in \Gamma$ i $\psi \in \Gamma$
4. jeżeli $\neg(\varphi \wedge \psi) \in \Gamma$, to $\neg\varphi \in \Gamma$ lub $\neg\psi \in \Gamma$
5. jeżeli $\varphi \vee \psi \in \Gamma$, to $\varphi \in \Gamma$ lub $\psi \in \Gamma$
6. jeżeli $\neg(\varphi \vee \psi) \in \Gamma$, to $\neg\varphi \in \Gamma$ i $\neg\psi \in \Gamma$
7. jeżeli $\varphi \rightarrow \psi \in \Gamma$, to $\neg\varphi \in \Gamma$ lub $\psi \in \Gamma$

Konstrukcja Hintikki

Zbiory Hintikki spełniają następujące warunki:

1. jeżeli $\varphi \in \Gamma$, to $\neg\varphi \notin \Gamma$
2. jeżeli $\neg\neg\varphi \in \Gamma$, to $\varphi \in \Gamma$
3. jeżeli $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$, to $\varphi \in \Gamma$ i $\psi \in \Gamma$
4. jeżeli $\neg(\varphi \wedge \psi) \in \Gamma$, to $\neg\varphi \in \Gamma$ lub $\neg\psi \in \Gamma$
5. jeżeli $\varphi \vee \psi \in \Gamma$, to $\varphi \in \Gamma$ lub $\psi \in \Gamma$
6. jeżeli $\neg(\varphi \vee \psi) \in \Gamma$, to $\neg\varphi \in \Gamma$ i $\neg\psi \in \Gamma$
7. jeżeli $\varphi \rightarrow \psi \in \Gamma$, to $\neg\varphi \in \Gamma$ lub $\psi \in \Gamma$
8. jeżeli $\neg(\varphi \rightarrow \psi) \in \Gamma$, to $\varphi \in \Gamma$ i $\neg\psi \in \Gamma$

Konstrukcja Hintikki

Zbiory Hintikki – uwagi:

Konstrukcja Hintikki

Zbiory Hintikki – uwagi:

Uwaga1: W przeciwieństwie do zbiorów nasyconych, zbiory Hintikki mogą być skończone, dzięki czemu można je wykorzystać do konstruktywnych dowodów pełności (i zarazem rozstrzygalności) np. dla systemów tablicowych.

Konstrukcja Hintikki

Zbiory Hintikki – uwagi:

Uwaga1: W przeciwieństwie do zbiorów nasyconych, zbiory Hintikki mogą być skończone, dzięki czemu można je wykorzystać do konstruktywnych dowodów pełności (i zarazem rozstrzygalności) np. dla systemów tablicowych.

Uwaga2: Dowolny zbiór niesprzeczny można poszerzyć do zbioru Hintikki na co najmniej 3 sposoby:

Konstrukcja Hintikki

Zbiory Hintikki – uwagi:

Uwaga1: W przeciwieństwie do zbiorów nasyconych, zbiory Hintikki mogą być skończone, dzięki czemu można je wykorzystać do konstruktywnych dowodów pełności (i zarazem rozstrzygalności) np. dla systemów tablicowych.

Uwaga2: Dowolny zbiór niesprzeczny można poszerzyć do zbioru Hintikki na co najmniej 3 sposoby:

1. za pomocą konstrukcji Lindenbauma (przez maksymalizację)

Konstrukcja Hintikki

Zbiory Hintikki – uwagi:

Uwaga1: W przeciwieństwie do zbiorów nasyconych, zbiory Hintikki mogą być skończone, dzięki czemu można je wykorzystać do konstruktywnych dowodów pełności (i zarazem rozstrzygalności) np. dla systemów tablicowych.
Uwaga2: Dowolny zbiór niesprzeczny można poszerzyć do zbioru Hintikki na co najmniej 3 sposoby:

1. za pomocą konstrukcji Lindenbauma (przez maksymalizację)
2. za pomocą bezpośredniej konstrukcji zbioru Hintikki

Konstrukcja Hintikki

Zbiory Hintikki – uwagi:

Uwaga1: W przeciwieństwie do zbiorów nasyconych, zbiory Hintikki mogą być skończone, dzięki czemu można je wykorzystać do konstruktywnych dowodów pełności (i zarazem rozstrzygalności) np. dla systemów tablicowych.

Uwaga2: Dowolny zbiór niesprzeczny można poszerzyć do zbioru Hintikki na co najmniej 3 sposoby:

1. za pomocą konstrukcji Lindenbauma (przez maksymalizację)
2. za pomocą bezpośredniej konstrukcji zbioru Hintikki
3. za pomocą rozgałęzionej konstrukcji zbioru Hintikki

Konstrukcja Hintikki

Zbiory Hintikki – uwagi:

Uwaga1: W przeciwieństwie do zbiorów nasyconych, zbiory Hintikki mogą być skończone, dzięki czemu można je wykorzystać do konstruktywnych dowodów pełności (i zarazem rozstrzygalności) np. dla systemów tablicowych.

Uwaga2: Dowolny zbiór niesprzeczny można poszerzyć do zbioru Hintikki na co najmniej 3 sposoby:

1. za pomocą konstrukcji Lindenbauma (przez maksymalizację)
2. za pomocą bezpośredniej konstrukcji zbioru Hintikki
3. za pomocą rozgałęzionej konstrukcji zbioru Hintikki

Zadanie: Dowiedź, że zbiór formuł na otwartej gałęzi diagramu Betha, na której zastosowano wszystkie możliwe reguły jest zbiorem Hintikki.

Semantyka KRZ

Pojęcie modelu dla **KRZ**:

Semantyka KRZ

Pojęcie modelu dla KRZ:

Niech V będzie funkcją waluacji (wartościowania) dla zmiennych, tj. $V : ZZ \longrightarrow \{1, 0\}$. Wyznacza ona jednoznacznie strukturę interpretacyjną (model) dla FOR w następujący sposób:

Semantyka KRZ

Pojęcie modelu dla **KRZ**:

Niech V będzie funkcją waluacji (wartościowania) dla zmiennych, tj. $V : ZZ \longrightarrow \{1, 0\}$. Wyznacza ona jednoznacznie strukturę interpretacyjną (model) dla FOR w następujący sposób:

$\mathfrak{M} \models \varphi$	wtw	$V(\varphi) = 1$
		dla dowolnej $\varphi \in ZZ$
$\mathfrak{M} \models \neg\varphi$	wtw	$\mathfrak{M} \not\models \varphi$
$\mathfrak{M} \models \varphi \wedge \psi$	wtw	$\mathfrak{M} \models \varphi$ i $\mathfrak{M} \models \psi$
$\mathfrak{M} \models \varphi \vee \psi$	wtw	$\mathfrak{M} \models \varphi$ lub $\mathfrak{M} \models \psi$
$\mathfrak{M} \models \varphi \rightarrow \psi$	wtw	$\mathfrak{M} \not\models \varphi$ lub $\mathfrak{M} \models \psi$

Semantyka KRZ

Ważne pojęcia semantyczne:

Semantyka KRZ

Ważne pojęcia semantyczne:

- Dla zbiorów formuł zapis $\mathfrak{M} \models \Gamma$ oznacza, że $\mathfrak{M} \models \psi$ dla $\forall_{\psi \in \Gamma}$.

Semantyka KRZ

Ważne pojęcia semantyczne:

- Dla zbiorów formuł zapis $\mathfrak{M} \models \Gamma$ oznacza, że $\mathfrak{M} \models \psi$ dla $\forall_{\psi \in \Gamma}$.
- $\mathfrak{M} \not\models \varphi$ oznacza fałszywość formuły φ w danym modelu; $\mathfrak{M} \not\models \Gamma$ oznacza fałszywość co najmniej jednego elementu Γ w tym modelu.

Semantyka KRZ

Ważne pojęcia semantyczne:

- Dla zbiorów formuł zapis $\mathfrak{M} \models \Gamma$ oznacza, że $\mathfrak{M} \models \psi$ dla $\forall_{\psi \in \Gamma}$.
- $\mathfrak{M} \not\models \varphi$ oznacza fałszywość formuły φ w danym modelu; $\mathfrak{M} \not\models \Gamma$ oznacza fałszywość co najmniej jednego elementu Γ w tym modelu.
- φ (Γ) jest spełnialna w modelu $\mathfrak{M}$ wtw, $\mathfrak{M} \models \varphi (\mathfrak{M} \models \Gamma)$.

Semantyka KRZ

Ważne pojęcia semantyczne:

- Dla zbiorów formuł zapis $\mathfrak{M} \models \Gamma$ oznacza, że $\mathfrak{M} \models \psi$ dla $\forall_{\psi \in \Gamma}$.
- $\mathfrak{M} \not\models \varphi$ oznacza fałszywość formuły φ w danym modelu; $\mathfrak{M} \not\models \Gamma$ oznacza fałszywość co najmniej jednego elementu Γ w tym modelu.
- φ (Γ) jest <u>spełnialna w modelu $\mathfrak{M}$</u> wtw, $\mathfrak{M} \models \varphi (\mathfrak{M} \models \Gamma)$.
- φ (Γ) jest <u>spełnialna</u> (spójna, semantycznie niesprzeczna) wtw, istnieje model, w którym jest spełnialna.

Semantyka KRZ

Ważne pojęcia semantyczne:

- Dla zbiorów formuł zapis $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$ oznacza, że $\mathfrak{M} \vDash \psi$ dla $\forall_{\psi \in \Gamma}$.
- $\mathfrak{M} \nvDash \varphi$ oznacza fałszywość formuły φ w danym modelu; $\mathfrak{M} \nvDash \Gamma$ oznacza fałszywość co najmniej jednego elementu Γ w tym modelu.
- φ (Γ) jest <u>spełnialna w modelu $\mathfrak{M}$</u> wtw, $\mathfrak{M} \vDash \varphi (\mathfrak{M} \vDash \Gamma)$.
- φ (Γ) jest <u>spełnialna</u> (spójna, semantycznie niesprzeczna) wtw, istnieje model, w którym jest spełnialna.
- φ (Γ) jest <u>sfalsyfikowana w modelu $\mathfrak{M}$</u> wtw, $\mathfrak{M} \nvDash \varphi (\mathfrak{M} \nvDash \Gamma)$ inaczej: $\mathfrak{M}$ falsyfikuje φ (Γ)).

Semantyka KRZ

Ważne pojęcia semantyczne:

- Dla zbiorów formuł zapis $\mathfrak{M} \models \Gamma$ oznacza, że $\mathfrak{M} \models \psi$ dla $\forall_{\psi \in \Gamma}$.
- $\mathfrak{M} \not\models \varphi$ oznacza fałszywość formuły φ w danym modelu; $\mathfrak{M} \not\models \Gamma$ oznacza fałszywość co najmniej jednego elementu Γ w tym modelu.
- φ (Γ) jest <u>spełnialna w modelu $\mathfrak{M}$</u> wtw, $\mathfrak{M} \models \varphi (\mathfrak{M} \models \Gamma)$.
- φ (Γ) jest <u>spełnialna</u> (spójna, semantycznie niesprzeczna) wtw, istnieje model, w którym jest spełnialna.
- φ (Γ) jest <u>sfalsyfikowana w modelu $\mathfrak{M}$</u> wtw, $\mathfrak{M} \not\models \varphi (\mathfrak{M} \not\models \Gamma)$ inaczej: $\mathfrak{M}$ falsyfikuje φ (Γ)).
- φ (Γ) jest <u>sfalsyfikowana</u> wtw, istnieje model, w którym jest sfalsyfikowana.

Semantyka KRZ

Ważne pojęcia semantyczne:

- Dla zbiorów formuł zapis $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$ oznacza, że $\mathfrak{M} \vDash \psi$ dla $\forall_{\psi \in \Gamma}$.
- $\mathfrak{M} \nvDash \varphi$ oznacza fałszywość formuły φ w danym modelu; $\mathfrak{M} \nvDash \Gamma$ oznacza fałszywość co najmniej jednego elementu Γ w tym modelu.
- φ (Γ) jest spełnialna w modelu $\mathfrak{M}$ wtw, $\mathfrak{M} \vDash \varphi(\mathfrak{M} \vDash \Gamma)$.
- φ (Γ) jest spełnialna (spójna, semantycznie niesprzeczna) wtw, istnieje model, w którym jest spełnialna.
- φ (Γ) jest sfalsyfikowana w modelu $\mathfrak{M}$ wtw, $\mathfrak{M} \nvDash \varphi(\mathfrak{M} \nvDash \Gamma)$ inaczej: $\mathfrak{M}$ falsyfikuje φ (Γ)).
- φ (Γ) jest sfalsyfikowana wtw, istnieje model, w którym jest sfalsyfikowana.
- φ (Γ) jest niespełnialna (niespójna, semantycznie sprzeczna) wtw, nie istnieje model, w którym jest spełnialna.

Semantyka KRZ

Ważne pojęcia semantyczne:

- Dla zbiorów formuł zapis $\mathfrak{M} \models \Gamma$ oznacza, że $\mathfrak{M} \models \psi$ dla $\forall_{\psi \in \Gamma}$.
- $\mathfrak{M} \not\models \varphi$ oznacza fałszywość formuły φ w danym modelu; $\mathfrak{M} \not\models \Gamma$ oznacza fałszywość co najmniej jednego elementu Γ w tym modelu.
- φ (Γ) jest spełnialna w modelu $\mathfrak{M}$ wtw, $\mathfrak{M} \models \varphi (\mathfrak{M} \models \Gamma)$.
- φ (Γ) jest spełnialna (spójna, semantycznie niesprzeczna) wtw, istnieje model, w którym jest spełnialna.
- φ (Γ) jest sfalsyfikowana w modelu $\mathfrak{M}$ wtw, $\mathfrak{M} \not\models \varphi (\mathfrak{M} \not\models \Gamma)$ inaczej: $\mathfrak{M}$ falsyfikuje φ (Γ)).
- φ (Γ) jest sfalsyfikowana wtw, istnieje model, w którym jest sfalsyfikowana.
- φ (Γ) jest niespełnialna (niespójna, semantycznie sprzeczna) wtw, nie istnieje model, w którym jest spełnialna.

Semantyka KRZ

Tautologiczność i wynikanie

Semantyka KRZ

Tautologiczność i wynikanie

$$\models \varphi \ \textit{wtw}, \ \forall_{\mathfrak{M}}, \mathfrak{M} \models \varphi$$

Semantyka KRZ

Tautologiczność i wynikanie

$$\models \varphi \ \textit{wtw}, \ \forall_{\mathfrak{M}}, \mathfrak{M} \vDash \varphi$$

$$\Gamma \models \varphi \ \textit{wtw}, \ \forall_{\mathfrak{M}}, \mathfrak{M} \vDash \Gamma \ \textit{implikuje} \ \mathfrak{M} \vDash \varphi$$

Semantyka KRZ

Tautologiczność i wynikanie

$$\models \varphi \ wtw, \ \forall_{\mathfrak{M}}, \mathfrak{M} \vDash \varphi$$

$$\Gamma \models \varphi \ wtw, \ \forall_{\mathfrak{M}}, \mathfrak{M} \vDash \Gamma \ implikuje \ \mathfrak{M} \vDash \varphi$$

Uwaga: $\not\models \varphi$ oznacza formułę nietautologiczną

Semantyka KRZ

Tautologiczność i wynikanie

$$\models \varphi \ \mathit{wtw}, \ \forall_{\mathfrak{M}}, \mathfrak{M} \models \varphi$$

$$\Gamma \models \varphi \ \mathit{wtw}, \ \forall_{\mathfrak{M}}, \mathfrak{M} \models \Gamma \ \mathit{implikuje} \ \mathfrak{M} \models \varphi$$

Uwaga: $\not\models \varphi$ oznacza formułę nietautologiczną
Fakt5. $\not\models \varphi$ wtw φ jest falsyfikowalna, wtw $\neg\varphi$ jest spełnialna.

Semantyka KRZ

Tautologiczność i wynikanie

$$\models \varphi \; \mathit{wtw}, \;\; \forall_{\mathfrak{M}}, \mathfrak{M} \vDash \varphi$$

$$\Gamma \models \varphi \; \mathit{wtw}, \;\; \forall_{\mathfrak{M}}, \mathfrak{M} \vDash \Gamma \; \mathit{implikuje} \; \mathfrak{M} \vDash \varphi$$

Uwaga: $\not\models \varphi$ oznacza formułę nietautologiczną
Fakt5. $\not\models \varphi$ wtw φ jest falsyfikowalna, wtw $\neg\varphi$ jest spełnialna.
Fakt6. $\Gamma \models \varphi$ wtw $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ jest niespełnialna.

Semantyka KRZ

Tautologiczność i wynikanie

$$\models \varphi \textit{ wtw}, \ \forall_{\mathfrak{M}}, \mathfrak{M} \vDash \varphi$$

$$\Gamma \models \varphi \textit{ wtw}, \ \forall_{\mathfrak{M}}, \mathfrak{M} \vDash \Gamma \textit{ implikuje } \mathfrak{M} \vDash \varphi$$

Uwaga: $\not\models \varphi$ oznacza formułę nietautologiczną
Fakt5. $\not\models \varphi$ wtw φ jest falsyfikowalna, wtw $\neg\varphi$ jest spełnialna.
Fakt6. $\Gamma \models \varphi$ wtw $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ jest niespełnialna.

Zadanie: udowodnij dla $\models$ odpowiedniki własności $\vdash$, a dla (nie)spełnialności odpowiedniki własności dla (nie)sprzeczności.

Semantyka KRZ

Tautologiczność i wynikanie

Semantyka KRZ

Tautologiczność i wynikanie

Reguły inferencji można kwalifikować również semantycznie

Semantyka KRZ

Tautologiczność i wynikanie

Reguły inferencji można kwalifikować również semantycznie

Analogicznie jak w przypadku reguł wtórnych wyróżniamy dwa typy:

Semantyka KRZ

Tautologiczność i wynikanie

Reguły inferencji można kwalifikować również semantycznie
Analogicznie jak w przypadku reguł wtórnych wyróżniamy dwa typy:

- reguły normalne: $\psi_1, ..., \psi_n/\varphi$ wtw $\psi_1, ..., \psi_n \models \varphi$

Semantyka KRZ

Tautologiczność i wynikanie

Reguły inferencji można kwalifikować również semantycznie
Analogicznie jak w przypadku reguł wtórnych wyróżniamy dwa typy:

- reguły normalne: $\psi_1, ..., \psi_n / \varphi$ wtw $\psi_1, ..., \psi_n \models \varphi$
- reguły niezawodne: $\psi_1, ..., \psi_n / \varphi$ wtw jeżeli $\models \psi_1, ..., \models \psi_n$, to $\models \varphi$

Semantyka KRZ

Tautologiczność i wynikanie

Reguły inferencji można kwalifikować również semantycznie
Analogicznie jak w przypadku reguł wtórnych wyróżniamy dwa typy:

- reguły normalne: $\psi_1, ..., \psi_n/\varphi$ wtw $\psi_1, ..., \psi_n \models \varphi$
- reguły niezawodne: $\psi_1, ..., \psi_n/\varphi$ wtw jeżeli $\models \psi_1, ..., \models \psi_n$, to $\models \varphi$

Zachodzi następujące twierdzenie:
Każda reguła normalna jest niezawodna

Semantyka KRZ

Tautologiczność i wynikanie

Reguły inferencji można kwalifikować również semantycznie

Analogicznie jak w przypadku reguł wtórnych wyróżniamy dwa typy:

- reguły normalne: $\psi_1, \ldots, \psi_n / \varphi$ wtw $\psi_1, \ldots, \psi_n \models \varphi$
- reguły niezawodne: $\psi_1, \ldots, \psi_n / \varphi$ wtw jeżeli $\models \psi_1, \ldots, \models \psi_n$, to $\models \varphi$

Zachodzi następujące twierdzenie:

Każda reguła normalna jest niezawodna

Przykładem reguły niezawodnej, która nie jest wtórna może być reguła podstawiania.

Pełność H-KRZ

Adekwatność H-**KRZ**

Pełność H-KRZ

Adekwatność H-**KRZ**

Ustalamy adekwatność danego systemu dedukcyjnego (w tym wypadku systemu aksjomatycznego) względem danej semantyki.

Pełność H-KRZ

Adekwatność H-**KRZ**

Ustalamy adekwatność danego systemu dedukcyjnego (w tym wypadku systemu aksjomatycznego) względem danej semantyki.

Adekwatność słaba: $\vdash \varphi$ wtw $\models \varphi$

Pełność H-KRZ

Adekwatność H-**KRZ**

Ustalamy adekwatność danego systemu dedukcyjnego (w tym wypadku systemu aksjomatycznego) względem danej semantyki.

Adekwatność słaba: $\vdash \varphi$ wtw $\models \varphi$

Adekwatność mocna: $\Gamma \vdash \varphi$ wtw $\Gamma \models \varphi$

Pełność H-KRZ

Adekwatność H-**KRZ**

Ustalamy adekwatność danego systemu dedukcyjnego (w tym wypadku systemu aksjomatycznego) względem danej semantyki.

Adekwatność słaba: $\vdash \varphi$ wtw $\models \varphi$

Adekwatność mocna: $\Gamma \vdash \varphi$ wtw $\Gamma \models \varphi$

Uwaga1: oczywiście dopuszczamy nieskończone Γ; inaczej byłyby to twierdzenia równoważne (dlaczego?)

Pełność H-KRZ

Adekwatność H-**KRZ**

Ustalamy adekwatność danego systemu dedukcyjnego (w tym wypadku systemu aksjomatycznego) względem danej semantyki.

Adekwatność słaba: $\vdash \varphi$ wtw $\models \varphi$

Adekwatność mocna: $\Gamma \vdash \varphi$ wtw $\Gamma \models \varphi$

Uwaga1: oczywiście dopuszczamy nieskończone Γ; inaczej byłyby to twierdzenia równoważne (dlaczego?)

Uwaga2: niektóre metody dowodu tego twierdzenia (np. metoda Posta) pozwalają tylko na dowód słabej postaci – dalej skupimy się na dowodzie postaci mocnej.

Pełność H-KRZ

Adekwatność H-**KRZ**

Twierdzenie o adekwatności rozpada się na dwie składowe:

Pełność H-KRZ

Adekwatność H-**KRZ**

Twierdzenie o adekwatności rozpada się na dwie składowe:
Tw. o przystosowaniu (zgodności, soundness):
Jeżeli $\Gamma \vdash \varphi$, to $\Gamma \models \varphi$.

Pełność H-KRZ

Adekwatność H-**KRZ**

Twierdzenie o adekwatności rozpada się na dwie składowe:
Tw. o przystosowaniu (zgodności, soundness):
Jeżeli $\Gamma \vdash \varphi$, to $\Gamma \models \varphi$.
Tw. o pełności (completeness): Jeżeli $\Gamma \models \varphi$, to $\Gamma \vdash \varphi$.

Pełność H-KRZ

Adekwatność H-**KRZ**

Twierdzenie o adekwatności rozpada się na dwie składowe:
Tw. o przystosowaniu (zgodności, soundness):
Jeżeli $\Gamma \vdash \varphi$, to $\Gamma \models \varphi$.
Tw. o pełności (completeness): Jeżeli $\Gamma \models \varphi$, to $\Gamma \vdash \varphi$.
Dowód Tw. o przystosowaniu jest prosty dla systemów aksjomatycznych, natomiast w przypadku Tw. o pełności istnieją różne, czasem dość złożone strategie.

Pełność H-KRZ

Adekwatność H-**KRZ**

Twierdzenie o adekwatności rozpada się na dwie składowe:
Tw. o przystosowaniu (zgodności, soundness):
Jeżeli $\Gamma \vdash \varphi$, to $\Gamma \models \varphi$.
Tw. o pełności (completeness): Jeżeli $\Gamma \models \varphi$, to $\Gamma \vdash \varphi$.
Dowód Tw. o przystosowaniu jest prosty dla systemów aksjomatycznych, natomiast w przypadku Tw. o pełności istnieją różne, czasem dość złożone strategie.
Uwaga: Dlaczego łatwiej dowieść Tw. o przystosowaniu? Bo zbiór tez jest zdefiniowany induktywnie, a zbiór tautologii nie (i analogicznie dla $\vdash$ i $\models$).

Pełność H-KRZ

Twierdzenie o przystosowaniu – dowód:

Pełność H-KRZ

Twierdzenie o przystosowaniu – dowód:

Wstępnie należy wykazać:

Pełność H-KRZ

Twierdzenie o przystosowaniu – dowód:

Wstępnie należy wykazać:

Lemat1: Każdy aksjomat jest tautologią

Pełność H-KRZ

Twierdzenie o przystosowaniu – dowód:

Wstępnie należy wykazać:

Lemat1: Każdy aksjomat jest tautologią

Lemat2: Każda reguła pierwotna jest regułą niezawodną

Pełność H-KRZ

Twierdzenie o przystosowaniu – dowód:

Wstępnie należy wykazać:
Lemat1: Każdy aksjomat jest tautologią
Lemat2: Każda reguła pierwotna jest regułą niezawodną
Dowody jako zadania domowe.

Pełność H-KRZ

Twierdzenie o przystosowaniu – dowód:

Wstępnie należy wykazać:
Lemat1: Każdy aksjomat jest tautologią
Lemat2: Każda reguła pierwotna jest regułą niezawodną
Dowody jako zadania domowe.
Dowód Tw. o przystosowaniu przez indukcję po długości dowodu $\Gamma \vdash \varphi$.

Pełność H-KRZ

Twierdzenie o pełności

Pełność H-KRZ

Twierdzenie o pełności

Mocna postać:

(a) Jeżeli $\Gamma \models \varphi$, to $\Gamma \vdash \varphi$.

Pełność H-KRZ

Twierdzenie o pełności

Mocna postać:

(a) Jeżeli $\Gamma \models \varphi$, to $\Gamma \vdash \varphi$.

jest zazwyczaj formułowana następująco:

(b) Każdy zbiór niesprzeczny jest spełnialny (ma model).

Pełność H-KRZ

Twierdzenie o pełności

Mocna postać:
(a) Jeżeli $\Gamma \models \varphi$, to $\Gamma \vdash \varphi$.
jest zazwyczaj formułowana następująco:
(b) Każdy zbiór niesprzeczny jest spełnialny (ma model).
Dowód równoważności:

Pełność H-KRZ

Twierdzenie o pełności

Mocna postać:
(a) Jeżeli $\Gamma \models \varphi$, to $\Gamma \vdash \varphi$.
jest zazwyczaj formułowana następująco:
(b) Każdy zbiór niesprzeczny jest spełnialny (ma model).
Dowód równoważności:
(a) $\Longrightarrow$ (b): Załóżmy, że Γ jest niesprzeczna, czyli $\Gamma \nvdash \bot$. Wtedy dla pewnego $\varphi \in \Gamma$, $\Gamma - \{\varphi\} \nvdash \neg\varphi$, co przez (a) daje $\Gamma - \{\varphi\} \not\models \neg\varphi$. Wtedy, przez Fakt5 mamy, że Γ jest spełnialna.

Pełność H-KRZ

Twierdzenie o pełności

Mocna postać:
(a) Jeżeli $\Gamma \models \varphi$, to $\Gamma \vdash \varphi$.
jest zazwyczaj formułowana następująco:
(b) Każdy zbiór niesprzeczny jest spełnialny (ma model).
Dowód równoważności:
(a) $\Longrightarrow$ (b): Załóżmy, że Γ jest niesprzeczna, czyli $\Gamma \nvdash \bot$. Wtedy dla pewnego $\varphi \in \Gamma$, $\Gamma - \{\varphi\} \nvdash \neg\varphi$, co przez (a) daje $\Gamma - \{\varphi\} \not\models \neg\varphi$. Wtedy, przez Fakt5 mamy, że Γ jest spełnialna.
(b) $\Longrightarrow$ (a): Załóżmy, że $\Gamma \models \varphi$, przez Fakt5 mamy, że $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ jest niespełniana, a zatem, przez (b) i sprzeczna. Ale wtedy $\Gamma \vdash \varphi$ przez Lemat3.

Pełność H-KRZ

Dowody twierdzenia o pełności – uwagi ogólne:

Pełność H-KRZ

Dowody twierdzenia o pełności – uwagi ogólne:

Znane dowody można podzielić na konstruktywne i niekonstruktywne, oraz analityczne i nieanalityczne:

Pełność H-KRZ

Dowody twierdzenia o pełności – uwagi ogólne:

Znane dowody można podzielić na konstruktywne i niekonstruktywne, oraz analityczne i nieanalityczne:

- konstruktywne pokazują jak skonstruować dowód dla konkretnego przypadku wynikania (tautologii) – np. Post, Kalmar

Pełność H-KRZ

Dowody twierdzenia o pełności – uwagi ogólne:

Znane dowody można podzielić na konstruktywne i niekonstruktywne, oraz analityczne i nieanalityczne:

- konstruktywne pokazują jak skonstruować dowód dla konkretnego przypadku wynikania (tautologii) – np. Post, Kalmar
- niekonstruktywne wykazują ogólnie, że taki dowód w każdym wypadku istnieje, ale nie pokazują jak go skonstruować – np. Gödel, Henkin, Asser

Pełność H-KRZ

Dowody twierdzenia o pełności – uwagi ogólne:

Znane dowody można podzielić na konstruktywne i niekonstruktywne, oraz analityczne i nieanalityczne:

- konstruktywne pokazują jak skonstruować dowód dla konkretnego przypadku wynikania (tautologii) – np. Post, Kalmar
- niekonstruktywne wykazują ogólnie, że taki dowód w każdym wypadku istnieje, ale nie pokazują jak go skonstruować – np. Gödel, Henkin, Asser
- analityczne pozwalają w przypadku logik rozstrzygalnych na skonstruowanie skończonego modelu dla zbioru niesprzecznego – np. Hintikka

Pełność H-KRZ

Dowody twierdzenia o pełności – uwagi ogólne:

Znane dowody można podzielić na konstruktywne i niekonstruktywne, oraz analityczne i nieanalityczne:

- konstruktywne pokazują jak skonstruować dowód dla konkretnego przypadku wynikania (tautologii) – np. Post, Kalmar
- niekonstruktywne wykazują ogólnie, że taki dowód w każdym wypadku istnieje, ale nie pokazują jak go skonstruować – np. Gödel, Henkin, Asser
- analityczne pozwalają w przypadku logik rozstrzygalnych na skonstruowanie skończonego modelu dla zbioru niesprzecznego – np. Hintikka
- nieanalityczne prowadzą do konstrukcji modeli nieskończonych – np. Gödel, Asser

Pełność H-KRZ

Historia dowodów twierdzeń o pełności

Pełność H-KRZ

Historia dowodów twierdzeń o pełności

- Pierwszy dowód dla **KRZ** – E. Post lata 20-te

Pełność H-KRZ

Historia dowodów twierdzeń o pełności

- Pierwszy dowód dla **KRZ** – E. Post lata 20-te
- Inne dowody dla **KRZ**: Kalmar, Łukasiewicz, Wajsberg

Pełność H-KRZ

Historia dowodów twierdzeń o pełności

- Pierwszy dowód dla **KRZ** – E. Post lata 20-te
- Inne dowody dla **KRZ**: Kalmar, Łukasiewicz, Wajsberg
- Pierwszy dowód dla **KRK** – K. Gödel lata 30-te

Pełność H-KRZ

Historia dowodów twierdzeń o pełności

- Pierwszy dowód dla **KRZ** – E. Post lata 20-te
- Inne dowody dla **KRZ**: Kalmar, Łukasiewicz, Wajsberg
- Pierwszy dowód dla **KRK** – K. Gödel lata 30-te
- Najpopularniejsza metoda oparta na Lemacie Lindenbauma – L. Henkin lata 40-te

Pełność H-KRZ

Historia dowodów twierdzeń o pełności

- Pierwszy dowód dla **KRZ** – E. Post lata 20-te
- Inne dowody dla **KRZ**: Kalmar, Łukasiewicz, Wajsberg
- Pierwszy dowód dla **KRK** – K. Gödel lata 30-te
- Najpopularniejsza metoda oparta na Lemacie Lindenbauma – L. Henkin lata 40-te
- Inne dowody dla **KRK**: Malcew, Asser, Beth, Reichbach

Pełność H-KRZ

Historia dowodów twierdzeń o pełności

- Pierwszy dowód dla **KRZ** – E. Post lata 20-te
- Inne dowody dla **KRZ**: Kalmar, Łukasiewicz, Wajsberg
- Pierwszy dowód dla **KRK** – K. Gödel lata 30-te
- Najpopularniejsza metoda oparta na Lemacie Lindenbauma – L. Henkin lata 40-te
- Inne dowody dla **KRK**: Malcew, Asser, Beth, Reichbach
- Konstruktywny i analityczny dowód dla **KRK** – J. Hintikka lata 50-te

Pełność H-KRZ

Dowód twierdzenia o pełności:

Pełność H-KRZ

Dowód twierdzenia o pełności:

Udowodnimy wersję (b):
Każdy zbiór niesprzeczny jest spełnialny (ma model).

Pełność H-KRZ

Dowód twierdzenia o pełności:

Udowodnimy wersję (b):
Każdy zbiór niesprzeczny jest spełnialny (ma model).
Ponieważ z Lematu Lindenbauma wynika, że każdy zbiór niesprzeczny zawiera się w jakimś zbiorze MNSP, więc wystarczy wykazać, że każdy zbiór MNSP ma model.

Pełność H-KRZ

Dowód twierdzenia o pełności:

Udowodnimy wersję (b):
Każdy zbiór niesprzeczny jest spełnialny (ma model).
Ponieważ z Lematu Lindenbauma wynika, że każdy zbiór niesprzeczny zawiera się w jakimś zbiorze MNSP, więc wystarczy wykazać, że każdy zbiór MNSP ma model.
Lemat Prawdziwościowy L: Dla dowolnego zbioru MNSP Γ istnieje model $\mathfrak{M}_\Gamma$ taki, że:

$$\varphi \in \Gamma \text{ wtw } \mathfrak{M}_\Gamma \models \varphi$$

Pełność H-KRZ

Dowód twierdzenia o pełności:

Pełność H-KRZ

Dowód twierdzenia o pełności:

Zdefiniujmy wartościowanie V_Γ dla zmiennych zdaniowych.

Pełność H-KRZ

Dowód twierdzenia o pełności:

Zdefiniujmy wartościowanie V_Γ dla zmiennych zdaniowych.

$$V_\Gamma(\varphi) := \begin{cases} 1 & \text{jeżeli} \varphi \in \Gamma \\ 0 & \text{jeżeli} \varphi \notin \Gamma \end{cases}$$

Dowodzimy przez indukcję strukturalną po kształcie formuł, że model wyznaczony przez V_Γ spełnia podaną wyżej równoważność tj.

Pełność H-KRZ

Dowód twierdzenia o pełności:

Zdefiniujmy wartościowanie V_Γ dla zmiennych zdaniowych.

$$V_\Gamma(\varphi) := \begin{cases} 1 & \text{jeżeli} \varphi \in \Gamma \\ 0 & \text{jeżeli} \varphi \notin \Gamma \end{cases}$$

Dowodzimy przez indukcję strukturalną po kształcie formuł, że model wyznaczony przez V_Γ spełnia podaną wyżej równoważność tj.

$$\varphi \in \Gamma \text{ wtw } \mathfrak{M}_\Gamma \models \varphi$$

Pełność H-KRZ

Dowód twierdzenia o pełności:

Pełność H-KRZ

Dowód twierdzenia o pełności:

1. baza oczywista z definicji V_Γ:
$\varphi \in \Gamma$ wtw $V_\Gamma(\varphi) = 1$ wtw $\mathfrak{M}_\Gamma \vDash \varphi$

Pełność H-KRZ

Dowód twierdzenia o pełności:

1. baza oczywista z definicji V_Γ:

$\varphi \in \Gamma$ wtw $V_\Gamma(\varphi) = 1$ wtw $\mathfrak{M}_\Gamma \vDash \varphi$

Dla dowodu kroku indukcyjnego zakładamy, że każda formuła krótsza od φ spełnia dowodzoną równoważność i wykazujemy ją dla φ:

Pełność H-KRZ

Dowód twierdzenia o pełności:

1. baza oczywista z definicji V_Γ:
$\varphi \in \Gamma$ wtw $V_\Gamma(\varphi) = 1$ wtw $\mathfrak{M}_\Gamma \vDash \varphi$
Dla dowodu kroku indukcyjnego zakładamy, że każda formuła krótsza od φ spełnia dowodzoną równoważność i wykazujemy ją dla φ:
2. $\varphi := \neg\psi$:

Pełność H-KRZ

Dowód twierdzenia o pełności:

1. baza oczywista z definicji V_Γ:

$\varphi \in \Gamma$ wtw $V_\Gamma(\varphi) = 1$ wtw $\mathfrak{M}_\Gamma \vDash \varphi$

Dla dowodu kroku indukcyjnego zakładamy, że każda formuła krótsza od φ spełnia dowodzoną równoważność i wykazujemy ją dla φ:

2. $\varphi := \neg\psi$:

$\neg\psi \in \Gamma$	wtw	$\psi \notin \Gamma$	Lemat5, w.4
	wtw	$\mathfrak{M}_\Gamma \nvDash \psi$	z zał. ind.
	wtw	$\mathfrak{M}_\Gamma \vDash \neg\psi$	z def. $\vDash$.

Pełność H-KRZ

Dowód twierdzenia o pełności:

Pełność H-KRZ

Dowód twierdzenia o pełności:

3. $\varphi := \psi \wedge \chi$:

Pełność H-KRZ

Dowód twierdzenia o pełności:

3. $\varphi := \psi \wedge \chi$:

$\psi \wedge \chi \in \Gamma$	wtw	$\psi \in \Gamma$ i $\chi \in \Gamma$	Lemat5, w.6
	wtw	$\mathfrak{M}_\Gamma \models \psi$ i $\mathfrak{M}_\Gamma \models \chi$	z zał. ind.
	wtw	$\mathfrak{M}_\Gamma \models \psi \wedge \chi$	z def. $\models$.

Pełność H-KRZ

Dowód twierdzenia o pełności:

3. $\varphi := \psi \wedge \chi$:

$\psi \wedge \chi \in \Gamma$	wtw	$\psi \in \Gamma$ i $\chi \in \Gamma$	Lemat5, w.6
	wtw	$\mathfrak{M}_\Gamma \models \psi$ i $\mathfrak{M}_\Gamma \models \chi$	z zał. ind.
	wtw	$\mathfrak{M}_\Gamma \models \psi \wedge \chi$	z def. $\models$.

Zadanie: Udowodnij przypadki 4. i 5. korzystając z Lematu5.

Pełność H-KRZ

Dowód twierdzenia o pełności metodą Assera:

Pełność H-KRZ

Dowód twierdzenia o pełności metodą Assera:

Dowód Metodą Assera przebiega analogicznie. Należy wykazać: Lemat Prawdziwościowy A: Każdy zbiór relatywnie maksymalny ma model

Pełność H-KRZ

Dowód twierdzenia o pełności metodą Assera:

Dowód Metodą Assera przebiega analogicznie. Należy wykazać: Lemat Prawdziwościowy A: Każdy zbiór relatywnie maksymalny ma model

Dowód analogicznie jak wyżej, przy wykorzystaniu faktu, że zbiory relatywnie maksymalne są nasycone.

Pełność H-KRZ

Dowód twierdzenia o pełności metodą Assera:

Dowód Metodą Assera przebiega analogicznie. Należy wykazać:
Lemat Prawdziwościowy A: Każdy zbiór relatywnie maksymalny ma model

Dowód analogicznie jak wyżej, przy wykorzystaniu faktu, że zbiory relatywnie maksymalne są nasycone.

Dowód Twierdzenia o Pełności:

$\Gamma \nvdash \varphi$ założenie

Pełność H-KRZ

Dowód twierdzenia o pełności metodą Assera:

Dowód Metodą Assera przebiega analogicznie. Należy wykazać: Lemat Prawdziwościowy A: Każdy zbiór relatywnie maksymalny ma model

Dowód analogicznie jak wyżej, przy wykorzystaniu faktu, że zbiory relatywnie maksymalne są nasycone.

Dowód Twierdzenia o Pełności:

	$\Gamma \nvdash \varphi$	założenie
$\Longrightarrow$	istnieje relatywnie maksymalna $\Delta \supseteq \Gamma$	Tw. Assera

Pełność H-KRZ

Dowód twierdzenia o pełności metodą Assera:

Dowód Metodą Assera przebiega analogicznie. Należy wykazać:
Lemat Prawdziwościowy A: Każdy zbiór relatywnie maksymalny ma model
Dowód analogicznie jak wyżej, przy wykorzystaniu faktu, że zbiory relatywnie maksymalne są nasycone.
Dowód Twierdzenia o Pełności:

	$\Gamma \nvdash \varphi$	założenie
$\Longrightarrow$	istnieje relatywnie maksymalna $\Delta \supseteq \Gamma$	Tw. Assera
$\Longrightarrow$	istnieje $\mathfrak{M}_\Delta$	Lemat Praw. A

Pełność H-KRZ

Dowód twierdzenia o pełności metodą Assera:

Dowód Metodą Assera przebiega analogicznie. Należy wykazać:
Lemat Prawdziwościowy A: Każdy zbiór relatywnie maksymalny ma model
Dowód analogicznie jak wyżej, przy wykorzystaniu faktu, że zbiory relatywnie maksymalne są nasycone.
Dowód Twierdzenia o Pełności:

	$\Gamma \nvdash \varphi$	założenie
$\Longrightarrow$	istnieje relatywnie maksymalna $\Delta \supseteq \Gamma$	Tw. Assera
$\Longrightarrow$	istnieje $\mathfrak{M}_\Delta$	Lemat Praw. A
$\Longrightarrow$	$\mathfrak{M}_\Delta \vDash \Gamma$	bo $\Gamma \subseteq \Delta$

Pełność H-KRZ

Dowód twierdzenia o pełności metodą Assera:

Dowód Metodą Assera przebiega analogicznie. Należy wykazać:
Lemat Prawdziwościowy A: Każdy zbiór relatywnie maksymalny ma model
Dowód analogicznie jak wyżej, przy wykorzystaniu faktu, że zbiory relatywnie maksymalne są nasycone.
Dowód Twierdzenia o Pełności:

	$\Gamma \nvdash \varphi$	założenie
$\Longrightarrow$	istnieje relatywnie maksymalna $\Delta \supseteq \Gamma$	Tw. Assera
$\Longrightarrow$	istnieje $\mathfrak{M}_\Delta$	Lemat Praw. A
$\Longrightarrow$	$\mathfrak{M}_\Delta \vDash \Gamma$	bo $\Gamma \subseteq \Delta$
$\Longrightarrow$	$\mathfrak{M}_\Delta \nvDash \varphi$	bo $\varphi \notin \Delta$

Pełność H-KRZ

Dowód twierdzenia o pełności metodą Assera:

Dowód Metodą Assera przebiega analogicznie. Należy wykazać:
Lemat Prawdziwościowy A: Każdy zbiór relatywnie maksymalny ma model
Dowód analogicznie jak wyżej, przy wykorzystaniu faktu, że zbiory relatywnie maksymalne są nasycone.
Dowód Twierdzenia o Pełności:

	$\Gamma \nvdash \varphi$	założenie
$\Longrightarrow$	istnieje relatywnie maksymalna $\Delta \supseteq \Gamma$	Tw. Assera
$\Longrightarrow$	istnieje $\mathfrak{M}_\Delta$	Lemat Praw. A
$\Longrightarrow$	$\mathfrak{M}_\Delta \models \Gamma$	bo $\Gamma \subseteq \Delta$
$\Longrightarrow$	$\mathfrak{M}_\Delta \nvDash \varphi$	bo $\varphi \notin \Delta$
$\Longleftrightarrow$	$\Gamma \nvDash \varphi$	

Pełność H-KRZ

Dowód przez Własności Niesprzeczności

Pełność H-KRZ

Dowód przez Własności Niesprzeczności

Dowód tą metodą też przebiega analogicznie do poprzednich. Należy wykazać:

Lemat Prawdziwościowy C: Jeżeli Γ należy do finitarnego CON, to jest spełnialna.

Pełność H-KRZ

Dowód przez Własności Niesprzeczności

Dowód tą metodą też przebiega analogicznie do poprzednich. Należy wykazać:

Lemat Prawdziwościowy C: Jeżeli Γ należy do finitarnego CON, to jest spełnialna.

Dowód analogicznie jak wyżej, przy wykorzystaniu twierdzenia 3 głoszącego, że dla dowolnego elementu Γ z finitarnego CON istnieje $\Delta \in CON$, która jest maksymalna ($=$ ma model).

Pełność H-KRZ

Dowód przez Własności Niesprzeczności

Dowód Twierdzenia o Pełności:

Pełność H-KRZ

Dowód przez Własności Niesprzeczności

Dowód Twierdzenia o Pełności:

$\Gamma \nvdash \varphi$ założenie

Pełność H-KRZ

Dowód przez Własności Niesprzeczności

Dowód Twierdzenia o Pełności:

	$\Gamma \nvdash \varphi$	założenie
$\Longleftrightarrow$	$\Gamma \in \varphi - HNSP$	z def. $\varphi - HNSP$

Pełność H-KRZ

Dowód przez Własności Niesprzeczności

Dowód Twierdzenia o Pełności:

	$\Gamma \nvdash \varphi$	założenie
$\Longleftrightarrow$	$\Gamma \in \varphi - HNSP$	z def. $\varphi - HNSP$
$\Longrightarrow$	$\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \in \varphi - HNSP$	Fakt4

Pełność H-KRZ

Dowód przez Własności Niesprzeczności

Dowód Twierdzenia o Pełności:

	$\Gamma \nvdash \varphi$	założenie
$\Longleftrightarrow$	$\Gamma \in \varphi - HNSP$	z def. $\varphi - HNSP$
$\Longrightarrow$	$\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \in \varphi - HNSP$	Fakt4
$\Longrightarrow$	$\varphi - HNSP$ jest finitarnym CON	Tw.5

Pełność H-KRZ

Dowód przez Własności Niesprzeczności

Dowód Twierdzenia o Pełności:

	$\Gamma \nvdash \varphi$	założenie
$\Longleftrightarrow$	$\Gamma \in \varphi - HNSP$	z def. $\varphi - HNSP$
$\Longrightarrow$	$\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \in \varphi - HNSP$	Fakt4
$\Longrightarrow$	$\varphi - HNSP$ jest finitarnym CON	Tw.5
$\Longrightarrow$	istnieje $\mathfrak{M}$ spełniający $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$	Lemat Praw. C

Pełność H-KRZ

Dowód przez Własności Niesprzeczności

Dowód Twierdzenia o Pełności:

	$\Gamma \nvdash \varphi$	założenie
$\Longleftrightarrow$	$\Gamma \in \varphi - \mathit{HNSP}$	z def. $\varphi - \mathit{HNSP}$
$\Longrightarrow$	$\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \in \varphi - \mathit{HNSP}$	Fakt4
$\Longrightarrow$	$\varphi - \mathit{HNSP}$ jest finitarnym CON	Tw.5
$\Longrightarrow$	istnieje $\mathfrak{M}$ spełniający $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$	Lemat Praw. C
$\Longrightarrow$	$\mathfrak{M} \models \Gamma$	
$\Longrightarrow$	$\mathfrak{M} \nvDash \varphi$	

Pełność H-KRZ

Dowód przez Własności Niesprzeczności

Dowód Twierdzenia o Pełności:

$$
\begin{array}{lll}
 & \Gamma \nvdash \varphi & \text{założenie} \\
\Longleftrightarrow & \Gamma \in \varphi - \mathit{HNSP} & \text{z def. } \varphi - \mathit{HNSP} \\
\Longrightarrow & \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \in \varphi - \mathit{HNSP} & \text{Fakt4} \\
\Longrightarrow & \varphi - \mathit{HNSP} \text{ jest finitarnym } \mathit{CON} & \text{Tw.5} \\
\Longrightarrow & \text{istnieje } \mathfrak{M} \text{ spełniający } \Gamma \cup \{\neg\varphi\} & \text{Lemat Praw. C} \\
\Longrightarrow & \mathfrak{M} \models \Gamma & \\
\Longrightarrow & \mathfrak{M} \not\models \varphi & \\
\Longleftrightarrow & \Gamma \not\models \varphi &
\end{array}
$$

Pełność H-KRZ

Dowód przez zbiory Hintikki

Lemat Prawdziwościowy H: Dla dowolnego zbioru Hintikki Γ istnieje model $\mathfrak{M}_\Gamma$ taki, że:

Pełność H-KRZ

Dowód przez zbiory Hintikki

Lemat Prawdziwościowy H: Dla dowolnego zbioru Hintikki Γ istnieje model $\mathfrak{M}_\Gamma$ taki, że:

- jeżeli $\varphi \in \Gamma$, to $\mathfrak{M}_\Gamma \vDash \varphi$

Pełność H-KRZ

Dowód przez zbiory Hintikki

Lemat Prawdziwościowy H: Dla dowolnego zbioru Hintikki Γ istnieje model $\mathfrak{M}_\Gamma$ taki, że:

- jeżeli $\varphi \in \Gamma$, to $\mathfrak{M}_\Gamma \models \varphi$
- jeżeli $\neg\varphi \in \Gamma$, to $\mathfrak{M}_\Gamma \not\models \varphi$

Pełność H-KRZ

Dowód przez zbiory Hintikki

Lemat Prawdziwościowy H: Dla dowolnego zbioru Hintikki Γ istnieje model $\mathfrak{M}_\Gamma$ taki, że:

- jeżeli $\varphi \in \Gamma$, to $\mathfrak{M}_\Gamma \models \varphi$
- jeżeli $\neg\varphi \in \Gamma$, to $\mathfrak{M}_\Gamma \not\models \varphi$

Dowód: Wartościowanie V_Γ dla zmiennych zdaniowych definiujemy tak jak w dowodzie Lematu Praw. L, tj.

Pełność H-KRZ

Dowód przez zbiory Hintikki

Lemat Prawdziwościowy H: Dla dowolnego zbioru Hintikki Γ istnieje model $\mathfrak{M}_\Gamma$ taki, że:

- jeżeli $\varphi \in \Gamma$, to $\mathfrak{M}_\Gamma \models \varphi$
- jeżeli $\neg\varphi \in \Gamma$, to $\mathfrak{M}_\Gamma \not\models \varphi$

Dowód: Wartościowanie V_Γ dla zmiennych zdaniowych definiujemy tak jak w dowodzie Lematu Praw. L, tj.

$$V_\Gamma(\varphi) := \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } \varphi \in \Gamma \\ 0 & \text{jeżeli } \varphi \notin \Gamma \end{cases}$$

Pełność H-KRZ

Dowód przez zbiory Hintikki

Lematu dowodzimy przez indukcję po długości formuł; osobno dla formuł niezanegowanych i zanegowanych.

Pełność H-KRZ

Dowód przez zbiory Hintikki

Lematu dowodzimy przez indukcję po długości formuł; osobno dla formuł niezanegowanych i zanegowanych.

1. baza – φ jest zmienną:

Pełność H-KRZ

Dowód przez zbiory Hintikki

Lematu dowodzimy przez indukcję po długości formuł; osobno dla formuł niezanegowanych i zanegowanych.

1. baza – φ jest zmienną:

$$\varphi \in \Gamma \Longrightarrow \quad V_\Gamma(\varphi) = 1 \quad \text{z def. } V_\Gamma$$

Pełność H-KRZ

Dowód przez zbiory Hintikki

Lematu dowodzimy przez indukcję po długości formuł; osobno dla formuł niezanegowanych i zanegowanych.

1. baza – φ jest zmienną:

$$\begin{array}{rll} \varphi \in \Gamma \Longrightarrow & V_\Gamma(\varphi) = 1 & \text{z def. } V_\Gamma \\ \Longleftrightarrow & \mathfrak{M}_\Gamma \vDash \varphi & \text{z def. } \vDash. \end{array}$$

Pełność H-KRZ

Dowód przez zbiory Hintikki

Lematu dowodzimy przez indukcję po długości formuł; osobno dla formuł niezanegowanych i zanegowanych.

1. baza – φ jest zmienną:

$$
\begin{array}{llll}
\varphi \in \Gamma & \Longrightarrow & V_\Gamma(\varphi) = 1 & \text{z def. } V_\Gamma \\
& \Longleftrightarrow & \mathfrak{M}_\Gamma \models \varphi & \text{z def. } \models.
\end{array}
$$

$$
\neg\varphi \in \Gamma \Longrightarrow \varphi \notin \Gamma \qquad \text{z def. zb. Hintikki w1.}
$$

Pełność H-KRZ

Dowód przez zbiory Hintikki

Lematu dowodzimy przez indukcję po długości formuł; osobno dla formuł niezanegowanych i zanegowanych.

1. baza – φ jest zmienną:

$$\begin{array}{rlll} \varphi \in \Gamma & \Longrightarrow & V_\Gamma(\varphi) = 1 & \text{z def. } V_\Gamma \\ & \Longleftrightarrow & \mathfrak{M}_\Gamma \vDash \varphi & \text{z def. } \vDash. \end{array}$$

$$\begin{array}{rlll} \neg\varphi \in \Gamma & \Longrightarrow & \varphi \notin \Gamma & \text{z def. zb. Hintikki w1.} \\ & \Longrightarrow & V_\Gamma(\varphi) = 0 & \text{z def. } V_\Gamma \end{array}$$

Pełność H-KRZ

Dowód przez zbiory Hintikki

Lematu dowodzimy przez indukcję po długości formuł; osobno dla formuł niezanegowanych i zanegowanych.

1. baza – φ jest zmienną:

$$\begin{array}{rll} \varphi \in \Gamma \Longrightarrow & V_\Gamma(\varphi) = 1 & \text{z def. } V_\Gamma \\ \Longleftrightarrow & \mathfrak{M}_\Gamma \models \varphi & \text{z def. } \models. \end{array}$$

$$\begin{array}{rll} \neg\varphi \in \Gamma \Longrightarrow & \varphi \notin \Gamma & \text{z def. zb. Hintikki w1.} \\ \Longrightarrow & V_\Gamma(\varphi) = 0 & \text{z def. } V_\Gamma \\ \Longleftrightarrow & \mathfrak{M}_\Gamma \not\models \varphi & \text{z def. } \models. \end{array}$$

Pełność H-KRZ

Dowód przez zbiory Hintikki

Dla dowodu kroku indukcyjnego zakładamy, że każda formuła krótsza od φ spełnia dowodzoną implikację (1 lub 2) i wykazujemy ją dla φ:

Pełność H-KRZ

Dowód przez zbiory Hintikki

Dla dowodu kroku indukcyjnego zakładamy, że każda formuła krótsza od φ spełnia dowodzoną implikację (1 lub 2) i wykazujemy ją dla φ:

1. $\varphi := \neg\neg\psi$:

Pełność H-KRZ

Dowód przez zbiory Hintikki

Dla dowodu kroku indukcyjnego zakładamy, że każda formuła krótsza od φ spełnia dowodzoną implikację (1 lub 2) i wykazujemy ją dla φ:

1. $\varphi := \neg\neg\psi$:

$$\neg\neg\psi \in \Gamma \Longrightarrow \quad \psi \in \Gamma \qquad \text{z def. zb. Hintikki w2.}$$

Pełność H-KRZ

Dowód przez zbiory Hintikki

Dla dowodu kroku indukcyjnego zakładamy, że każda formuła krótsza od φ spełnia dowodzoną implikację (1 lub 2) i wykazujemy ją dla φ:

1. $\varphi := \neg\neg\psi$:

$$\begin{array}{rcll} \neg\neg\psi \in \Gamma & \Longrightarrow & \psi \in \Gamma & \text{z def. zb. Hintikki w2.} \\ & \Longrightarrow & \mathfrak{M}_\Gamma \models \psi & \text{z zał. ind.} \end{array}$$

Pełność H-KRZ

Dowód przez zbiory Hintikki

Dla dowodu kroku indukcyjnego zakładamy, że każda formuła krótsza od φ spełnia dowodzoną implikację (1 lub 2) i wykazujemy ją dla φ:

1. $\varphi := \neg\neg\psi$:

$$
\begin{array}{rlll}
\neg\neg\psi \in \Gamma & \Longrightarrow & \psi \in \Gamma & \text{z def. zb. Hintikki w2.} \\
 & \Longrightarrow & \mathfrak{M}_\Gamma \models \psi & \text{z zał. ind.} \\
 & \Longleftrightarrow & \mathfrak{M}_\Gamma \not\models \neg\psi & \text{z def. } \models.
\end{array}
$$

Pełność H-KRZ

Dowód przez zbiory Hintikki

Dla dowodu kroku indukcyjnego zakładamy, że każda formuła krótsza od φ spełnia dowodzoną implikację (1 lub 2) i wykazujemy ją dla φ:

1. $\varphi := \neg\neg\psi$:

$$\begin{array}{rlll} \neg\neg\psi \in \Gamma & \Longrightarrow & \psi \in \Gamma & \text{z def. zb. Hintikki w2.} \\ & \Longrightarrow & \mathfrak{M}_\Gamma \vDash \psi & \text{z zał. ind.} \\ & \Longleftrightarrow & \mathfrak{M}_\Gamma \nvDash \neg\psi & \text{z def. } \vDash. \end{array}$$

2. $\varphi := \psi \wedge \chi$:

Pełność H-KRZ

Dowód przez zbiory Hintikki

Dla dowodu kroku indukcyjnego zakładamy, że każda formuła krótsza od φ spełnia dowodzoną implikację (1 lub 2) i wykazujemy ją dla φ:

1. $\varphi := \neg\neg\psi$:

$$\begin{array}{rcll} \neg\neg\psi \in \Gamma & \Longrightarrow & \psi \in \Gamma & \text{z def. zb. Hintikki w2.} \\ & \Longrightarrow & \mathfrak{M}_\Gamma \models \psi & \text{z zał. ind.} \\ & \Longleftrightarrow & \mathfrak{M}_\Gamma \not\models \neg\psi & \text{z def. } \models. \end{array}$$

2. $\varphi := \psi \wedge \chi$:

$$\psi \wedge \chi \in \Gamma \Longrightarrow \psi \in \Gamma \text{ i } \chi \in \Gamma \qquad \text{z def. zb. Hintikki w3.}$$

Pełność H-KRZ

Dowód przez zbiory Hintikki

Dla dowodu kroku indukcyjnego zakładamy, że każda formuła krótsza od φ spełnia dowodzoną implikację (1 lub 2) i wykazujemy ją dla φ:

1. $\varphi := \neg\neg\psi$:

$$\begin{array}{rlll} \neg\neg\psi \in \Gamma & \Longrightarrow & \psi \in \Gamma & \text{z def. zb. Hintikki w2.} \\ & \Longrightarrow & \mathfrak{M}_\Gamma \models \psi & \text{z zał. ind.} \\ & \Longleftrightarrow & \mathfrak{M}_\Gamma \not\models \neg\psi & \text{z def. } \models. \end{array}$$

2. $\varphi := \psi \wedge \chi$:

$$\begin{array}{rlll} \psi \wedge \chi \in \Gamma & \Longrightarrow & \psi \in \Gamma \text{ i } \chi \in \Gamma & \text{z def. zb. Hintikki w3.} \\ & \Longrightarrow & \mathfrak{M}_\Gamma \models \psi \text{ i } \mathfrak{M}_\Gamma \models \chi & \text{z zał. ind.} \end{array}$$

Pełność H-KRZ

Dowód przez zbiory Hintikki

Dla dowodu kroku indukcyjnego zakładamy, że każda formuła krótsza od φ spełnia dowodzoną implikację (1 lub 2) i wykazujemy ją dla φ:

1. $\varphi := \neg\neg\psi$:

$$\begin{array}{rlll} \neg\neg\psi \in \Gamma & \Longrightarrow & \psi \in \Gamma & \text{z def. zb. Hintikki w2.} \\ & \Longrightarrow & \mathfrak{M}_\Gamma \vDash \psi & \text{z zał. ind.} \\ & \Longleftrightarrow & \mathfrak{M}_\Gamma \nvDash \neg\psi & \text{z def. } \vDash. \end{array}$$

2. $\varphi := \psi \wedge \chi$:

$$\begin{array}{rlll} \psi \wedge \chi \in \Gamma & \Longrightarrow & \psi \in \Gamma \text{ i } \chi \in \Gamma & \text{z def. zb. Hintikki w3.} \\ & \Longrightarrow & \mathfrak{M}_\Gamma \vDash \psi \text{ i } \mathfrak{M}_\Gamma \vDash \chi & \text{z zał. ind.} \\ & \Longleftrightarrow & \mathfrak{M}_\Gamma \vDash \psi \wedge \chi & \text{z def. } \vDash\ . \end{array}$$

Pełność H-KRZ

Dowód przez zbiory Hintikki

3. $\varphi := \neg(\psi \wedge \chi)$:

Pełność H-KRZ

Dowód przez zbiory Hintikki

3. $\varphi := \neg(\psi \wedge \chi)$:

$\neg(\psi \wedge \chi) \in \Gamma \Longrightarrow \quad \neg\psi \in \Gamma$ lub $\neg\chi \in \Gamma$ z def. zb. Hintikki w4.

Pełność H-KRZ

Dowód przez zbiory Hintikki

3. $\varphi := \neg(\psi \wedge \chi)$:

$$\neg(\psi \wedge \chi) \in \Gamma \Longrightarrow \neg\psi \in \Gamma \text{ lub } \neg\chi \in \Gamma \qquad \text{z def. zb. Hintikki w4.}$$

$$\Longrightarrow \mathfrak{M}_\Gamma \not\models \psi \text{ lub } \mathfrak{M}_\Gamma \not\models \chi \qquad \text{z zał. ind.}$$

Pełność H-KRZ

Dowód przez zbiory Hintikki

3. $\varphi := \neg(\psi \wedge \chi)$:

$\neg(\psi \wedge \chi) \in \Gamma$	$\Longrightarrow$	$\neg\psi \in \Gamma$ lub $\neg\chi \in \Gamma$	z def. zb. Hintikki w4.
	$\Longrightarrow$	$\mathfrak{M}_\Gamma \not\models \psi$ lub $\mathfrak{M}_\Gamma \not\models \chi$	z zał. ind.
	$\Longleftrightarrow$	nieprawda, że ($\mathfrak{M}_\Gamma \models \psi$ i $\mathfrak{M}_\Gamma \models \chi$	DeM

Pełność H-KRZ

Dowód przez zbiory Hintikki

3. $\varphi := \neg(\psi \wedge \chi)$:

$$\begin{array}{rll} \neg(\psi \wedge \chi) \in \Gamma \Longrightarrow & \neg\psi \in \Gamma \text{ lub } \neg\chi \in \Gamma & \text{z def. zb. Hintikki w4.} \\ \Longrightarrow & \mathfrak{M}_\Gamma \nvDash \psi \text{ lub } \mathfrak{M}_\Gamma \nvDash \chi & \text{z zał. ind.} \\ \Longleftrightarrow & \text{nieprawda, że } (\mathfrak{M}_\Gamma \vDash \psi \text{ i } \mathfrak{M}_\Gamma \vDash \chi & \text{DeM} \\ \Longleftrightarrow & \mathfrak{M}_\Gamma \nvDash \psi \wedge \chi & \text{z def. } \vDash . \end{array}$$

Pełność H-KRZ

Dowód przez zbiory Hintikki

3. $\varphi := \neg(\psi \wedge \chi)$:

$\neg(\psi \wedge \chi) \in \Gamma$	$\Longrightarrow$	$\neg\psi \in \Gamma$ lub $\neg\chi \in \Gamma$	z def. zb. Hintikki w4.
	$\Longrightarrow$	$\mathfrak{M}_\Gamma \not\models \psi$ lub $\mathfrak{M}_\Gamma \not\models \chi$	z zał. ind.
	$\Longleftrightarrow$	nieprawda, że ($\mathfrak{M}_\Gamma \models \psi$ i $\mathfrak{M}_\Gamma \models \chi$	DeM
	$\Longleftrightarrow$	$\mathfrak{M}_\Gamma \not\models \psi \wedge \chi$	z def. $\models$.

Zadanie: Udowodnij pozostałe przypadki.

Pełność H-KRZ

Dowód przez zbiory Hintikki

Dowód Twierdzenia o Pełności:

Pełność H-KRZ

Dowód przez zbiory Hintikki

Dowód Twierdzenia o Pełności:

$\Gamma \nvdash \varphi$ założenie

Pełność H-KRZ

Dowód przez zbiory Hintikki

Dowód Twierdzenia o Pełności:

	$\Gamma \nvdash \varphi$	założenie
$\Longleftrightarrow$	$\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ jest niesprzeczna	Lemat3

Pełność H-KRZ

Dowód przez zbiory Hintikki

Dowód Twierdzenia o Pełności:

	$\Gamma \nvdash \varphi$	założenie
$\Longleftrightarrow$	$\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ jest niesprzeczna	Lemat3
$\Longrightarrow$	istnieje zb. Hintikki $\Delta \supseteq \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$	Tw. Hintikki

Pełność H-KRZ

Dowód przez zbiory Hintikki

Dowód Twierdzenia o Pełności:

	$\Gamma \nvdash \varphi$	założenie
$\Longleftrightarrow$	$\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ jest niesprzeczna	Lemat3
$\Longrightarrow$	istnieje zb. Hintikki $\Delta \supseteq \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$	Tw. Hintikki
$\Longrightarrow$	istnieje $\mathfrak{M}_\Delta$	Lemat Praw. H

Pełność H-KRZ

Dowód przez zbiory Hintikki

Dowód Twierdzenia o Pełności:

	$\Gamma \nvdash \varphi$	założenie
$\Longleftrightarrow$	$\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ jest niesprzeczna	Lemat3
$\Longrightarrow$	istnieje zb. Hintikki $\Delta \supseteq \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$	Tw. Hintikki
$\Longrightarrow$	istnieje $\mathfrak{M}_\Delta$	Lemat Praw. H
$\Longrightarrow$	$\mathfrak{M}_\Delta \models \Gamma$	bo $\Gamma \subseteq \Delta$
$\Longrightarrow$	$\mathfrak{M}_\Delta \nvDash \varphi$	bo $\neg\varphi \notin \Delta$

Pełność H-KRZ

Dowód przez zbiory Hintikki

Dowód Twierdzenia o Pełności:

	$\Gamma \nvdash \varphi$	założenie
$\Longleftrightarrow$	$\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ jest niesprzeczna	Lemat3
$\Longrightarrow$	istnieje zb. Hintikki $\Delta \supseteq \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$	Tw. Hintikki
$\Longrightarrow$	istnieje $\mathfrak{M}_\Delta$	Lemat Praw. H
$\Longrightarrow$	$\mathfrak{M}_\Delta \vDash \Gamma$	bo $\Gamma \subseteq \Delta$
$\Longrightarrow$	$\mathfrak{M}_\Delta \nvDash \varphi$	bo $\neg\varphi \notin \Delta$
$\Longleftrightarrow$	$\Gamma \nvDash \varphi$	

Zupełność H-KRZ

Pojęcie zupełności

Rozważmy dowolny system aksjomatyczny $H = (Aks, R)$, niech:

Zupełność H-KRZ

Pojęcie zupełności

Rozważmy dowolny system aksjomatyczny $H = (Aks, R)$, niech:

- $ADM(H)$ oznacza zbiór jego reguł dopuszczalnych;

Zupełność H-KRZ

Pojęcie zupełności

Rozważmy dowolny system aksjomatyczny $H = (Aks, R)$, niech:

- $ADM(H)$ oznacza zbiór jego reguł dopuszczalnych;
- $DER(H)$ oznacza zbiór jego reguł wyprowadzalnych;

Zupełność H-KRZ

Pojęcie zupełności

Rozważmy dowolny system aksjomatyczny $H = (Aks, R)$, niech:

- $ADM(H)$ oznacza zbiór jego reguł dopuszczalnych;
- $DER(H)$ oznacza zbiór jego reguł wyprowadzalnych;
- STR oznacza zbiór reguł strukturalnych (domkniętych na podstawianie).

Zupełność H-KRZ

Pojęcie zupełności

Rozważmy dowolny system aksjomatyczny $H = (Aks, R)$, niech:

- $ADM(H)$ oznacza zbiór jego reguł dopuszczalnych;
- $DER(H)$ oznacza zbiór jego reguł wyprowadzalnych;
- STR oznacza zbiór reguł strukturalnych (domkniętych na podstawianie).

Przypomnijmy, że H może występować w wersji podstawieniowej (skończona ilość aksjomatów + reguła podstawiania) lub inwariantnej (schematy aksjomatów).

Zupełność H-KRZ

Pojęcie zupełności

H jest:

Zupełność H-KRZ

Pojęcie zupełności

H jest:

1. dedukcyjnie zupełny wtw $\forall_\varphi, \vdash_H \varphi$ lub $\vdash_H \neg\varphi$

Zupełność H-KRZ

Pojęcie zupełności

H jest:

1. dedukcyjnie zupełny wtw $\forall_{\varphi}, \vdash_H \varphi$ lub $\vdash_H \neg\varphi$
2. Post-zupełny wtw $\forall_{\varphi}$ jeżeli $\nvdash_H \varphi$, to $\varphi \vdash_H \bot$

Zupełność H-KRZ

Pojęcie zupełności

H jest:

1. dedukcyjnie zupełny wtw $\forall_\varphi, \vdash_H \varphi$ lub $\vdash_H \neg\varphi$
2. Post-zupełny wtw $\forall_\varphi$ jeżeli $\nvdash_H \varphi$, to $\varphi \vdash_H \bot$
3. strukturalnie zupełny wtw $ADM(H) \cap STR \subseteq DER(H)$

Zupełność H-KRZ

Pojęcie zupełności

H jest:

1. dedukcyjnie zupełny wtw $\forall_\varphi, \vdash_H \varphi$ lub $\vdash_H \neg\varphi$
2. Post-zupełny wtw $\forall_\varphi$ jeżeli $\nvdash_H \varphi$, to $\varphi \vdash_H \bot$
3. strukturalnie zupełny wtw $ADM(H) \cap STR \subseteq DER(H)$

Post-zupełność można alternatywnie wyrazić następująco:

Zupełność H-KRZ

Pojęcie zupełności

H jest:

1. dedukcyjnie zupełny wtw $\forall_\varphi, \vdash_H \varphi$ lub $\vdash_H \neg\varphi$
2. Post-zupełny wtw $\forall_\varphi$ jeżeli $\nvdash_H \varphi$, to $\varphi \vdash_H \bot$
3. strukturalnie zupełny wtw $ADM(H) \cap STR \subseteq DER(H)$

Post-zupełność można alternatywnie wyrazić następująco:

H jest Post-zupełny wtw $ADM(H) \subseteq DER(H)$

Zupełność H-KRZ

Pojęcie zupełności

H jest:

1. dedukcyjnie zupełny wtw $\forall_\varphi, \vdash_H \varphi$ lub $\vdash_H \neg\varphi$
2. Post-zupełny wtw $\forall_\varphi$ jeżeli $\nvdash_H \varphi$, to $\varphi \vdash_H \perp$
3. strukturalnie zupełny wtw $ADM(H) \cap STR \subseteq DER(H)$

Post-zupełność można alternatywnie wyrazić następująco:

H jest Post-zupełny wtw $ADM(H) \subseteq DER(H)$

Fakt: Jeżeli H jest Post-zupełny, to jest strukturalnie zupełny.

Zupełność H-KRZ

Pojęcie zupełności

Twierdzenie o zupełności dla aksjomatycznych formalizacji **KRZ**

Zupełność H-KRZ

Pojęcie zupełności

Twierdzenie o zupełności dla aksjomatycznych formalizacji **KRZ**

1. żadna formalizacja **KRZ** nie jest dedukcyjnie zupełna

Zupełność H-KRZ

Pojęcie zupełności

Twierdzenie o zupełności dla aksjomatycznych formalizacji **KRZ**

1. żadna formalizacja **KRZ** nie jest dedukcyjnie zupełna
2. H-**KRZ** w wersji podstawieniowej jest Post-zupełny (i strukturalnie zupełny)

Zupełność H-KRZ

Pojęcie zupełności

Twierdzenie o zupełności dla aksjomatycznych formalizacji **KRZ**

1. żadna formalizacja **KRZ** nie jest dedukcyjnie zupełna
2. H-**KRZ** w wersji podstawieniowej jest Post-zupełny (i strukturalnie zupełny)
3. H-**KRZ** w wersji inwariantnej nie jest Post-zupełny ale jest strukturalnie zupełny

Interpolacja

Twierdzenie Craiga o interpolacji

Jeżeli $\models \varphi \to \psi$ i $ZZ(\varphi) \cap ZZ(\psi) \neq \varnothing$, to istnieje χ takie, że:

Interpolacja

Twierdzenie Craiga o interpolacji

Jeżeli $\models \varphi \to \psi$ i $ZZ(\varphi) \cap ZZ(\psi) \neq \varnothing$, to istnieje χ takie, że:

- $ZZ(\chi) \subseteq ZZ(\varphi) \cap ZZ(\psi)$

Interpolacja

Twierdzenie Craiga o interpolacji

Jeżeli $\models \varphi \rightarrow \psi$ i $ZZ(\varphi) \cap ZZ(\psi) \neq \varnothing$, to istnieje χ takie, że:

- $ZZ(\chi) \subseteq ZZ(\varphi) \cap ZZ(\psi)$
- $\models \varphi \rightarrow \chi$

Interpolacja

Twierdzenie Craiga o interpolacji

Jeżeli $\models \varphi \to \psi$ i $ZZ(\varphi) \cap ZZ(\psi) \neq \varnothing$, to istnieje χ takie, że:

- $ZZ(\chi) \subseteq ZZ(\varphi) \cap ZZ(\psi)$
- $\models \varphi \to \chi$
- $\models \chi \to \psi$

Interpolacja

Twierdzenie Craiga o interpolacji

Uwaga1: jeżeli w języku dopuścimy stałą $\perp$ to założenie $ZZ(\varphi) \cap ZZ(\psi) \neq \varnothing$ można pominąć.

Interpolacja

Twierdzenie Craiga o interpolacji

Uwaga1: jeżeli w języku dopuścimy stałą $\perp$ to założenie $ZZ(\varphi) \cap ZZ(\psi) \neq \varnothing$ można pominąć.
Uwaga2: χ jest często określane jako formuła interpolacyjna (lub krótko interpolant). Wtedy Tw. Craiga można krótko wysłowić: Jeżeli implikacja jest tautologią, to ma interpolant.

Interpolacja

Twierdzenie Craiga o interpolacji

Uwaga1: jeżeli w języku dopuścimy stałą $\perp$ to założenie $ZZ(\varphi) \cap ZZ(\psi) \neq \varnothing$ można pominąć.
Uwaga2: χ jest często określane jako formuła interpolacyjna (lub krótko interpolant). Wtedy Tw. Craiga można krótko wysłowić: Jeżeli implikacja jest tautologią, to ma interpolant.

Skończony zbiór Γ jest C-niesprzeczny wtw istnieje podział Γ na Γ_1, Γ_2 (tj. $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$ i $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \varnothing$) taki, że $\wedge\Gamma_1 \rightarrow \neg(\wedge\Gamma_2)$ nie ma interpolanta.

Interpolacja

Twierdzenie Craiga o interpolacji

Uwaga1: jeżeli w języku dopuścimy stałą $\perp$ to założenie $ZZ(\varphi) \cap ZZ(\psi) \neq \varnothing$ można pominąć.
Uwaga2: χ jest często określane jako formuła interpolacyjna (lub krótko interpolant). Wtedy Tw. Craiga można krótko wysłowić: Jeżeli implikacja jest tautologią, to ma interpolant.

Skończony zbiór Γ jest C-niesprzeczny wtw istnieje podział Γ na Γ_1, Γ_2 (tj. $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$ i $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \varnothing$) taki, że $\wedge\Gamma_1 \rightarrow \neg(\wedge\Gamma_2)$ nie ma interpolanta.

Twierdzenie o C-niesprzeczności: Rodzina wszystkich C-niesprzecznych zbiorów jest finitarną *CON*

Interpolacja

Twierdzenie Craiga o interpolacji

Uwaga1: jeżeli w języku dopuścimy stałą $\perp$ to założenie $ZZ(\varphi) \cap ZZ(\psi) \neq \varnothing$ można pominąć.
Uwaga2: χ jest często określane jako formuła interpolacyjna (lub krótko interpolant). Wtedy Tw. Craiga można krótko wysłowić: Jeżeli implikacja jest tautologią, to ma interpolant.

Skończony zbiór Γ jest C-niesprzeczny wtw istnieje podział Γ na Γ_1, Γ_2 (tj. $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$ i $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \varnothing$) taki, że $\wedge\Gamma_1 \rightarrow \neg(\wedge\Gamma_2)$ nie ma interpolanta.

Twierdzenie o C-niesprzeczności: Rodzina wszystkich C-niesprzecznych zbiorów jest finitarną *CON*
Dowód we własnym zakresie.

Interpolacja

Twierdzenie Craiga o interpolacji

Dowód Tw. Craiga (przez kontrapozycję):

Interpolacja

Twierdzenie Craiga o interpolacji

Dowód Tw. Craiga (przez kontrapozycję):
Załóżmy, że $\varphi \rightarrow \psi$ nie ma interpolanta, wykażemy, że nie jest tautologią.

Interpolacja

Twierdzenie Craiga o interpolacji

Dowód Tw. Craiga (przez kontrapozycję):
Załóżmy, że $\varphi \to \psi$ nie ma interpolanta, wykażemy, że nie jest tautologią.
Niech $\Gamma = \{\varphi, \neg\psi\}$, $\Gamma_1 = \{\varphi\}$ a $\Gamma_2 = \{\neg\psi\}$. Skoro $\varphi \to \psi$ nie ma interpolanta, to i $\varphi \to \neg\neg\psi$ nie ma interpolanta. Zatem Γ jest C-niesprzeczna, więc ma model (jako element finitarnego *CON*), co oznacza, że $\not\models \varphi \to \psi$.