METALOGIKA

Andrzej Indrzejczak

Katedra Logiki i Metodologii Nauk UŁ

Łódź, semestr letni 2009/2010

Rachunek LK Gentzena

Definicja sekwentu w sensie Gentzena:

Rachunek LK Gentzena

Definicja sekwentu w sensie Gentzena:

Para uporządkowana skończonych ciągów (list) formuł rozdzielonych symbolem $\Rightarrow$.

Rachunek LK Gentzena

Definicja sekwentu w sensie Gentzena:

Para uporządkowana skończonych ciągów (list) formuł rozdzielonych symbolem $\Rightarrow$.
zapisywany tak:
$\varphi_1, ..., \varphi_k \Rightarrow \psi_1, ..., \psi_n$, z $k \geq 0, n \geq 0$.
lub tak:

Rachunek LK Gentzena

Definicja sekwentu w sensie Gentzena:

Para uporządkowana skończonych ciągów (list) formuł rozdzielonych symbolem $\Rightarrow$.
zapisywany tak:
$\varphi_1, \ldots, \varphi_k \Rightarrow \psi_1, \ldots, \psi_n$, z $k \geq 0$, $n \geq 0$.
lub tak:
$\Gamma \Rightarrow \Delta$
Γ to *poprzednik*, a Δ to *następnik* sekwentu.

Rachunek LK Gentzena

Definicja sekwentu w sensie Gentzena:

Para uporządkowana skończonych ciągów (list) formuł rozdzielonych symbolem $\Rightarrow$.
zapisywany tak:
$\varphi_1, \dots, \varphi_k \Rightarrow \psi_1, \dots, \psi_n$, z $k \geq 0, n \geq 0$.
lub tak:
$\Gamma \Rightarrow \Delta$
Γ to *poprzednik*, a Δ to *następnik* sekwentu.
Sekwenty, które zawierają tylko zmienne zdaniowe będziemy nazywali *sekwentami atomowymi*.

Rachunek LK Gentzena

Definicja sekwentu w sensie Gentzena:

Para uporządkowana skończonych ciągów (list) formuł rozdzielonych symbolem $\Rightarrow$.
zapisywany tak:
$\varphi_1, \ldots, \varphi_k \Rightarrow \psi_1, \ldots, \psi_n$, z $k \geq 0, n \geq 0$.
lub tak:
$\Gamma \Rightarrow \Delta$
Γ to *poprzednik*, a Δ to *następnik* sekwentu.
Sekwenty, które zawierają tylko zmienne zdaniowe będziemy nazywali *sekwentami atomowymi*.

Uwaga1: Zarówno poprzednik, jak i następnik sekwentu mogą być ciągami pustymi.

Rachunek LK Gentzena

Definicja sekwentu w sensie Gentzena:

Para uporządkowana skończonych ciągów (list) formuł rozdzielonych symbolem $\Rightarrow$.
zapisywany tak:
$\varphi_1, ..., \varphi_k \Rightarrow \psi_1, ..., \psi_n$, z $k \geq 0, n \geq 0$.
lub tak:
$\Gamma \Rightarrow \Delta$
Γ to *poprzednik*, a Δ to *następnik* sekwentu.
Sekwenty, które zawierają tylko zmienne zdaniowe będziemy nazywali *sekwentami atomowymi*.

Uwaga1: Zarówno poprzednik, jak i następnik sekwentu mogą być ciągami pustymi.
Uwaga2: W wielu wariantach RS zamiast ciągów używa się multizbiorów lub zbiorów.

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

LK Gentzena (1934) – reguły strukturalne

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

LK Gentzena (1934) – reguły strukturalne

$(AX)\quad \varphi \Rightarrow \varphi$

$(Cut)\quad \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}$

$(W\Rightarrow)\quad \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ $\qquad (\Rightarrow W)\quad \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}$

$(C\Rightarrow)\quad \dfrac{\varphi, \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ $\qquad (\Rightarrow C)\quad \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \varphi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}$

$(P\Rightarrow)\quad \dfrac{\Pi, \varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Pi, \psi, \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ $\qquad (\Rightarrow P)\quad \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi, \varphi, \Pi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi, \Pi}$

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

LK Gentzena (1934) – reguły strukturalne

(AX) $\varphi \Rightarrow \varphi$

(Cut) $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}$

$(W\Rightarrow)$ $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ $\qquad$ $(\Rightarrow W)$ $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}$

$(C\Rightarrow)$ $\dfrac{\varphi, \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ $\qquad$ $(\Rightarrow C)$ $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \varphi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}$

$(P\Rightarrow)$ $\dfrac{\Pi, \varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Pi, \psi, \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ $\qquad$ $(\Rightarrow P)$ $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi, \varphi, \Pi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi, \Pi}$

Uwaga: nazwy reguł: W – weakening, C – contraction, P – permutation.

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

LK Gentzena (1934) – reguły logiczne

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

LK Gentzena (1934) – reguły logiczne

$(\neg\Rightarrow)\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}{\neg\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ $\qquad (\Rightarrow\neg)\ \dfrac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\varphi}$

$(\wedge\Rightarrow)\ \dfrac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ $\qquad (\wedge\Rightarrow)\ \dfrac{\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$

$(\Rightarrow\wedge)\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi}$ $\qquad (\vee\Rightarrow)\ \dfrac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \vee \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$

$(\Rightarrow\vee)\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}$ $\qquad (\Rightarrow\vee)\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}$

$(\rightarrow\Rightarrow)\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \psi, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\varphi \rightarrow \psi, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}$ $\qquad (\Rightarrow\rightarrow)\ \dfrac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi}$

Rachunek LK Gentzena – reguły:

Przykłady zastosowania reguł:

Rachunek LK Gentzena – reguły:

Przykłady zastosowania reguł:

$$\frac{p \wedge q, q \rightarrow r \Rightarrow \neg q, p \rightarrow r \qquad p \wedge q, q \rightarrow r \Rightarrow \neg q, \neg s}{p \wedge q, q \rightarrow r \Rightarrow \neg q, (p \rightarrow r) \wedge \neg s}$$

daje nam przykład zastosowania $(\Rightarrow \wedge)$,

Rachunek LK Gentzena – reguły:

Przykłady zastosowania reguł:

$$\frac{p \wedge q, q \rightarrow r \Rightarrow \neg q, p \rightarrow r \qquad p \wedge q, q \rightarrow r \Rightarrow \neg q, \neg s}{p \wedge q, q \rightarrow r \Rightarrow \neg q, (p \rightarrow r) \wedge \neg s}$$

daje nam przykład zastosowania $(\Rightarrow \wedge)$,

natomiast:

$$\frac{p \wedge q, q \rightarrow r \Rightarrow \neg q, p \rightarrow r, \neg r \qquad p \vee q, q \rightarrow r, q \wedge r \Rightarrow \neg(p \vee r), \neg s}{\neg r \rightarrow p \vee q, p \wedge q, q \rightarrow r, q \rightarrow r, q \wedge r \Rightarrow \neg q, p \rightarrow r, \neg(p \vee r), \neg s}$$

daje przykład zastosowania $(\rightarrow\Rightarrow)$.

Rachunek LK Gentzena – dowody:

Dowód sekwentu

Rachunek LK Gentzena – dowody:

Dowód sekwentu

1. Każde jednoelementowe drzewo, którego węzeł jest sekwentem aksjomatycznym S jest *dowodem sekwentu* S.

Rachunek LK Gentzena – dowody:

Dowód sekwentu

1. Każde jednoelementowe drzewo, którego węzeł jest sekwentem aksjomatycznym S jest *dowodem sekwentu* S.
2. Jeżeli $\mathcal{D}$ jest dowodem sekwentu S, to drzewo uzyskane przez dopisanie sekwentu S' poniżej sekwentu S jest dowodem sekwentu S', pod warunkiem, że S jest podstawieniem przesłanki a S' jest podstawieniem wniosku jednej z reguł jednoprzesłankowych.

Rachunek LK Gentzena – dowody:

Dowód sekwentu

1. Każde jednoelementowe drzewo, którego węzeł jest sekwentem aksjomatycznym S jest *dowodem sekwentu* S.
2. Jeżeli $\mathcal{D}$ jest dowodem sekwentu S, to drzewo uzyskane przez dopisanie sekwentu S' poniżej sekwentu S jest dowodem sekwentu S', pod warunkiem, że S jest podstawieniem przesłanki a S' jest podstawieniem wniosku jednej z reguł jednoprzesłankowych.
3. Jeżeli $\mathcal{D}$ jest dowodem sekwentu S a $\mathcal{D}'$ jest dowodem S', to drzewo uzyskane przez dopisanie sekwentu S" poniżej sekwentów S i S' jest dowodem sekwentu S", pod warunkiem, że S jest podstawieniem lewej przesłanki, S' jest podstawieniem prawej przesłanki, a S" jest podstawieniem wniosku jednej z reguł dwuprzesłankowych.

Rachunek LK Gentzena – dowody:

Dowód sekwentu

1. Każde jednoelementowe drzewo, którego węzeł jest sekwentem aksjomatycznym S jest *dowodem sekwentu* S.
2. Jeżeli $\mathcal{D}$ jest dowodem sekwentu S, to drzewo uzyskane przez dopisanie sekwentu S' poniżej sekwentu S jest dowodem sekwentu S', pod warunkiem, że S jest podstawieniem przesłanki a S' jest podstawieniem wniosku jednej z reguł jednoprzesłankowych.
3. Jeżeli $\mathcal{D}$ jest dowodem sekwentu S a $\mathcal{D}'$ jest dowodem S', to drzewo uzyskane przez dopisanie sekwentu S" poniżej sekwentów S i S' jest dowodem sekwentu S", pod warunkiem, że S jest podstawieniem lewej przesłanki, S' jest podstawieniem prawej przesłanki, a S" jest podstawieniem wniosku jednej z reguł dwuprzesłankowych.
4. Nic więcej nie jest dowodem sekwentu w RS.

Rachunek LK Gentzena – dowody:

Dowód sekwentu

Rachunek LK Gentzena – dowody:

Dowód sekwentu

To, że sekwent $\Gamma \Rightarrow \Delta$ ma dowód będziemy zaznaczać pisząc $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$.

Rachunek LK Gentzena – dowody:

Dowód sekwentu

To, że sekwent $\Gamma \Rightarrow \Delta$ ma dowód będziemy zaznaczać pisząc $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$.

W szczególności dowód sekwentu $\Rightarrow \varphi$, to dowód tezy φ.

Rachunek LK Gentzena – dowody:

Dowód sekwentu

To, że sekwent $\Gamma \Rightarrow \Delta$ ma dowód będziemy zaznaczać pisząc $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$.

W szczególności dowód sekwentu $\Rightarrow \varphi$, to dowód tezy φ.

Uwaga: Podana definicja dowodu jest indukcyjna, co umożliwia dowody przez indukcję po długości dowodu.

Rachunek LK Gentzena – dowody:

Dowód sekwentu – przykład:

Rachunek LK Gentzena – dowody:

Dowód sekwentu – przykład:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$p \Rightarrow p$}
\AxiomC{$p \Rightarrow p$}
\AxiomC{$q \Rightarrow q$}
\LeftLabel{$(\rightarrow\Rightarrow)$}
\BinaryInfC{$p \rightarrow q, p \Rightarrow q$}
\AxiomC{$r \Rightarrow r$}
\RightLabel{$(\rightarrow\Rightarrow)$}
\BinaryInfC{$q \rightarrow r, p \rightarrow q, p \Rightarrow r$}
\RightLabel{$(\rightarrow\Rightarrow)$}
\BinaryInfC{$p \rightarrow (q \rightarrow r), p, p \rightarrow q, p \Rightarrow r$}
\RightLabel{$(P \Rightarrow)$}
\UnaryInfC{$p, p \rightarrow (q \rightarrow r), p \rightarrow q, p \Rightarrow r$}
\RightLabel{$(P \Rightarrow)$}
\UnaryInfC{$p, p \rightarrow (q \rightarrow r), p, p \rightarrow q \Rightarrow r$}
\RightLabel{$(P \Rightarrow)$}
\UnaryInfC{$p, p, p \rightarrow (q \rightarrow r), p \rightarrow q \Rightarrow r$}
\RightLabel{$(C \Rightarrow)$}
\UnaryInfC{$p, p \rightarrow (q \rightarrow r), p \rightarrow q \Rightarrow r$}
\RightLabel{$(\Rightarrow\rightarrow)$}
\UnaryInfC{$p \rightarrow (q \rightarrow r), p \rightarrow q \Rightarrow p \rightarrow r$}
\RightLabel{$(P \Rightarrow)$}
\UnaryInfC{$p \rightarrow q, p \rightarrow (q \rightarrow r) \Rightarrow p \rightarrow r$}
\RightLabel{$(\Rightarrow\rightarrow)$}
\UnaryInfC{$p \rightarrow (q \rightarrow r) \Rightarrow (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$}
\RightLabel{$(\Rightarrow\rightarrow)$}
\UnaryInfC{$\Rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$}
\end{prooftree}
$$

Rachunek LK Gentzena – dowody:

Dowód sekwentu – przykład z uproszczeniami:

Rachunek LK Gentzena – dowody:

Dowód sekwentu – przykład z uproszczeniami:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$p \Rightarrow p$}
\AxiomC{$p \Rightarrow p$}
\AxiomC{$q \Rightarrow q$}
\LeftLabel{$(\rightarrow\Rightarrow)$}
\BinaryInfC{$p \rightarrow q, p \Rightarrow q$}
\AxiomC{$r \Rightarrow r$}
\RightLabel{$(\rightarrow\Rightarrow)$}
\BinaryInfC{$q \rightarrow r, p \rightarrow q, p \Rightarrow r$}
\RightLabel{$(\rightarrow\Rightarrow)$}
\BinaryInfC{$p \rightarrow (q \rightarrow r), p, p \rightarrow q, p \Rightarrow r$}
\doubleLine
\RightLabel{$(\Rightarrow\rightarrow)$}
\UnaryInfC{$p \rightarrow (q \rightarrow r), p \rightarrow q \Rightarrow p \rightarrow r$}
\doubleLine
\RightLabel{$(\Rightarrow\rightarrow)$}
\UnaryInfC{$p \rightarrow (q \rightarrow r) \Rightarrow (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$}
\RightLabel{$(\Rightarrow\rightarrow)$}
\UnaryInfC{$\Rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$}
\end{prooftree}
$$

Rachunek LK Gentzena

Adekwatność LK-KRZ

Gentzen udowodnił adekwatność LK syntaktycznie wykazując jego równoważność z H-**KRZ**

Rachunek LK Gentzena

Adekwatność LK-KRZ

Gentzen udowodnił adekwatność LK syntaktycznie wykazując jego równoważność z H-**KRZ**

Twierdzenie1: $\vdash_H \varphi$ wtw $\vdash \Rightarrow \varphi$

Rachunek LK Gentzena

Adekwatność LK-KRZ

Gentzen udowodnił adekwatność LK syntaktycznie wykazując jego równoważność z H-**KRZ**

Twierdzenie1: $\vdash_H \varphi$ wtw $\vdash \Rightarrow \varphi$

Udowodnimy jedną z implikacji składających się na powyższe twierdzenie:

Rachunek LK Gentzena

Adekwatność LK-KRZ

Gentzen udowodnił adekwatność LK syntaktycznie wykazując jego równoważność z H-**KRZ**

Twierdzenie1: $\vdash_H \varphi$ wtw $\vdash \Rightarrow \varphi$

Udowodnimy jedną z implikacji składających się na powyższe twierdzenie:

Lemat2: Jeżeli $\vdash_H \varphi$, to $\vdash \Rightarrow \varphi$

Rachunek LK Gentzena

Adekwatność LK-KRZ

Gentzen udowodnił adekwatność LK syntaktycznie wykazując jego równoważność z H-**KRZ**

Twierdzenie1: $\vdash_H \varphi$ wtw $\vdash \Rightarrow \varphi$

Udowodnimy jedną z implikacji składających się na powyższe twierdzenie:

Lemat2: Jeżeli $\vdash_H \varphi$, to $\vdash \Rightarrow \varphi$

Dowód lematu2 wymaga skonstruowania w LK schematów dowodów wszystkich aksjomatów oraz wykazania, że każde zastosowanie MP w dowodzie w H daje się odtworzyć w LK.

Adekwatność LK-KRZ

Adekwatność LK-KRZ

Przypomnijmy inwariantną aksjomatykę **KRZ** z regułą MP jako jedyną regułą inferencji:

Adekwatność LK-KRZ

Adekwatność LK-KRZ

Przypomnijmy inwariantną aksjomatykę **KRZ** z regułą MP jako jedyną regułą inferencji:

1. $\varphi \to (\psi \to \varphi)$
2. $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$
3. $\varphi \wedge \psi \to \varphi$
4. $\varphi \wedge \psi \to \psi$
5. $\varphi \to (\psi \to \varphi \wedge \psi)$
6. $\varphi \to \varphi \vee \psi$
7. $\psi \to \varphi \vee \psi$
8. $(\varphi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \vee \psi \to \chi))$
9. $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$

Adekwatność LK-KRZ

Schemat dowodu dla aksjomatu 8.

Adekwatność LK-KRZ

Schemat dowodu dla aksjomatu 8.

$$
(\Rightarrow\to)\,\dfrac{(\Rightarrow\to)\,\dfrac{(\Rightarrow\to)\,\dfrac{(\vee\Rightarrow)\,\dfrac{(W\Rightarrow)\,\dfrac{(\to\Rightarrow)\,\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi \qquad \chi \Rightarrow \chi}{\varphi \to \chi, \varphi \Rightarrow \chi}}{\varphi, \psi \to \chi, \varphi \to \chi \Rightarrow \chi} \qquad \dfrac{\dfrac{\psi \Rightarrow \psi \qquad \chi \Rightarrow \chi}{\psi \to \chi, \psi \Rightarrow \chi}\,(\to\Rightarrow)}{\psi, \psi \to \chi, \varphi \to \chi \Rightarrow \chi}\,(\Rightarrow W)}{\varphi \vee \psi, \psi \to \chi, \varphi \to \chi \Rightarrow \chi}}{\psi \to \chi, \varphi \to \chi \Rightarrow \varphi \vee \psi \to \chi}}{\varphi \to \chi \Rightarrow (\psi \to \chi) \to (\varphi \vee \psi \to \chi)}}{\Rightarrow (\varphi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \vee \psi \to \chi))}
$$

Adekwatność LK-KRZ

Schemat zastosowania MP w LK.

Adekwatność LK-KRZ

Schemat zastosowania MP w LK.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_2 \\ \Rightarrow \varphi\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1 \\ \Rightarrow \varphi \to \psi\end{array} \qquad \dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi \qquad \psi \Rightarrow \psi}{\varphi \to \psi, \varphi \Rightarrow \psi}\,(\to\Rightarrow)}{\varphi \Rightarrow \psi}\,(Cut)}{\Rightarrow \psi}\,(Cut)$$

gdzie $\mathcal{D}_1$ i $\mathcal{D}_2$ to symulacje (w LK) dowodów w H obu tez stanowiących przesłanki zastosowania MP.

Adekwatność LK-KRZ

Przekładalność sekwentów

Adekwatność LK-KRZ

Przekładalność sekwentów

Aby udowodnić implikację w drugą stronę musiał jednak Gentzen dokonać jakiejś formy przekładu sekwentów na uboższy język aksjomatycznej formalizacji.

Adekwatność LK-KRZ

Przekładalność sekwentów

Aby udowodnić implikację w drugą stronę musiał jednak Gentzen dokonać jakiejś formy przekładu sekwentów na uboższy język aksjomatycznej formalizacji.

- Dowolny sekwent o postaci $\varphi_1, ..., \varphi_i \Rightarrow \psi_1, ..., \psi_k$ z $i > 0, k > 0$ należy zinterpretować jako formułę postaci $\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_i \rightarrow \psi_1 \vee ... \vee \psi_k$.

Adekwatność LK-KRZ

Przekładalność sekwentów

Aby udowodnić implikację w drugą stronę musiał jednak Gentzen dokonać jakiejś formy przekładu sekwentów na uboższy język aksjomatycznej formalizacji.

- Dowolny sekwent o postaci $\varphi_1, \ldots, \varphi_i \Rightarrow \psi_1, \ldots, \psi_k$ z $i > 0, k > 0$ należy zinterpretować jako formułę postaci $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_i \rightarrow \psi_1 \vee \ldots \vee \psi_k$.
- W przypadku $i = 1$ lub $k = 1$ mamy do czynienia ze zredukowaną (jednoelementową) koniunkcją lub alternatywą.

Adekwatność LK-KRZ

Przekładalność sekwentów

Aby udowodnić implikację w drugą stronę musiał jednak Gentzen dokonać jakiejś formy przekładu sekwentów na uboższy język aksjomatycznej formalizacji.

- Dowolny sekwent o postaci $\varphi_1, \ldots, \varphi_i \Rightarrow \psi_1, \ldots, \psi_k$ z $i > 0, k > 0$ należy zinterpretować jako formułę postaci $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_i \rightarrow \psi_1 \vee \ldots \vee \psi_k$.
- W przypadku $i = 1$ lub $k = 1$ mamy do czynienia ze zredukowaną (jednoelementową) koniunkcją lub alternatywą.
- Pusty poprzednik sekwentu interpretujemy jako $\top$ natomiast pusty następnik jako $\perp$.

Adekwatność LK-KRZ

Przykłady interpretacji sekwentów:

Adekwatność LK-KRZ

Przykłady interpretacji sekwentów:

- $\Rightarrow \psi_1, ..., \psi_k$ interpretujemy jako $\top \rightarrow \psi_1 \vee ... \vee \psi_k$ (lub – prościej – jako $\psi_1 \vee ... \vee \psi_k$)

Adekwatność LK-KRZ

Przykłady interpretacji sekwentów:

- $\Rightarrow \psi_1, \dots, \psi_k$ interpretujemy jako $\top \rightarrow \psi_1 \vee \dots \vee \psi_k$ (lub – prościej – jako $\psi_1 \vee \dots \vee \psi_k$)
- $\varphi_1, \dots, \varphi_i \Rightarrow$ jako $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_i \rightarrow \perp$ (lub – w myśl definicji negacji – jako $\neg(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_i)$).

Adekwatność LK-KRZ

Przykłady interpretacji sekwentów:

- $\Rightarrow \psi_1, ..., \psi_k$ interpretujemy jako $\top \to \psi_1 \vee ... \vee \psi_k$ (lub – prościej – jako $\psi_1 \vee ... \vee \psi_k$)
- $\varphi_1, ..., \varphi_i \Rightarrow$ jako $\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_i \to \bot$ (lub – w myśl definicji negacji – jako $\neg(\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_i)$).
- Sekwent z pustym poprzednikiem i następnikiem oznacza po prostu $\bot$, gdyż $\top \to \bot \leftrightarrow \neg\top \vee \bot \leftrightarrow \bot \vee \bot \leftrightarrow \bot$.

Adekwatność LK-KRZ

Przykłady interpretacji sekwentów:

- $\Rightarrow \psi_1, \dots, \psi_k$ interpretujemy jako $\top \rightarrow \psi_1 \vee \dots \vee \psi_k$ (lub – prościej – jako $\psi_1 \vee \dots \vee \psi_k$)
- $\varphi_1, \dots, \varphi_i \Rightarrow$ jako $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_i \rightarrow \bot$ (lub – w myśl definicji negacji – jako $\neg(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_i)$).
- Sekwent z pustym poprzednikiem i następnikiem oznacza po prostu $\bot$, gdyż $\top \rightarrow \bot \leftrightarrow \neg\top \vee \bot \leftrightarrow \bot \vee \bot \leftrightarrow \bot$.

Dla wykazania, że $\vdash \Rightarrow \varphi$ implikuje $\vdash_H \varphi$ Gentzen udowodnił, że przekład każdej reguły LK daje nam regułę dowiedlną w systemie aksjomatycznym. – dla chętnych.

Adekwatność LK-KRZ

Semantyczne przystosowanie:

Poszerzenie semantyki na sekwenty:

Adekwatność LK-KRZ

Semantyczne przystosowanie:

Poszerzenie semantyki na sekwenty:
Spełnianie:
$\mathfrak{M} \models \Gamma \Rightarrow \Delta$ wtw przynajmniej jedna formuła w poprzedniku jest fałszywa lub przynajmniej jedna w następniku jest prawdziwa.

Adekwatność LK-KRZ

Semantyczne przystosowanie:

Poszerzenie semantyki na sekwenty:
Spełnianie:
$\mathfrak{M} \models \Gamma \Rightarrow \Delta$ wtw przynajmniej jedna formuła w poprzedniku jest fałszywa lub przynajmniej jedna w następniku jest prawdziwa.
Falsyfikacja:
$\mathfrak{M} \not\models \Gamma \Rightarrow \Delta$ wtw każda formuła w poprzedniku jest prawdziwa a każda w następniku jest fałszywa.

Adekwatność LK-KRZ

Semantyczne przystosowanie:

Poszerzenie semantyki na sekwenty:
Spełnianie:
$\mathfrak{M} \vDash \Gamma \Rightarrow \Delta$ wtw przynajmniej jedna formuła w poprzedniku jest fałszywa lub przynajmniej jedna w następniku jest prawdziwa.
Falsyfikacja:
$\mathfrak{M} \nvDash \Gamma \Rightarrow \Delta$ wtw każda formuła w poprzedniku jest prawdziwa a każda w następniku jest fałszywa.
Tautologiczność:
$\models \Gamma \Rightarrow \Delta$ wtw $\forall_{\mathfrak{M}}, \mathfrak{M} \vDash \Gamma \Rightarrow \Delta$

Adekwatność LK-KRZ

Semantyczne przystosowanie:

Przy zadanej wyżej interpretacji możemy wykazać:
Lemat3: Każda reguła LK jest niezawodna

Adekwatność LK-KRZ

Semantyczne przystosowanie:

Przy zadanej wyżej interpretacji możemy wykazać:
Lemat3: Każda reguła LK jest niezawodna
Należy pokazać, że jeżeli przesłanki reguły są tautologiczne, to wniosek też.

Adekwatność LK-KRZ

Semantyczne przystosowanie – przykład:

Przypadek $(\to\Rightarrow)$:

Adekwatność LK-KRZ

Semantyczne przystosowanie – przykład:

Przypadek ($\rightarrow\Rightarrow$):
Załóżmy, że $\models \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ i $\models \psi, \Pi \Rightarrow \Sigma$ ale $\not\models \varphi \rightarrow \psi, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$.

Adekwatność LK-KRZ

Semantyczne przystosowanie – przykład:

Przypadek $(\rightarrow\Rightarrow)$:
Załóżmy, że $\models \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ i $\models \psi, \Pi \Rightarrow \Sigma$ ale $\not\models \varphi \rightarrow \psi, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$.
Zatem w pewnym modelu $\mathfrak{M}$ zarówno $\varphi \rightarrow \psi$ jak i wszystkie elementy Γ i Π są spełnione natomiast wszystkie elementy Δ i Σ są tam fałszywe.

Adekwatność LK-KRZ

Semantyczne przystosowanie – przykład:

Przypadek ($\rightarrow\Rightarrow$):
Załóżmy, że $\models \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ i $\models \psi, \Pi \Rightarrow \Sigma$ ale $\not\models \varphi \rightarrow \psi, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$.
Zatem w pewnym modelu $\mathfrak{M}$ zarówno $\varphi \rightarrow \psi$ jak i wszystkie elementy Γ i Π są spełnione natomiast wszystkie elementy Δ i Σ są tam fałszywe.
Skoro $\mathfrak{M} \models \varphi \rightarrow \psi$, to $\mathfrak{M} \not\models \varphi$ lub $\mathfrak{M} \models \psi$. Oba przypadki prowadzą do sprzeczności; przy pierwszym lewa, a przy drugim prawa przesłanka byłaby sfalsyfikowana w $\mathfrak{M}$.

Adekwatność LK-KRZ

Semantyczne przystosowanie:

Twierdzenie4: Jeżeli $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$, to $\models \Gamma \Rightarrow \Delta$

Adekwatność LK-KRZ

Semantyczne przystosowanie:

Twierdzenie4: Jeżeli $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$, to $\models \Gamma \Rightarrow \Delta$
Dowód przez indukcję po długości dowodu $\Gamma \Rightarrow \Delta$. Dowód bazy jest oczywisty, gdyż każdy jednoelementowy dowód to sekwent aksjomatyczny, który jest tautologią. Pokazujemy, że dowód sekwentu $\Gamma \Rightarrow \Delta$ o długości n jest dowodem tautologii przy założeniu, że każdy dowód krótszy spełnia ten warunek. Ponieważ dowód każdej z przesłanek sekwentu $\Gamma \Rightarrow \Delta$ ma długość mniejszą od n, więc przesłanki podpadają pod założenie indukcyjne i są sekwentami tautologicznymi. Zgodnie z poprzednim lematem każda reguła LK jest niezawodna, więc wydedukowany sekwent też jest tautologiczny.

Rachunek LK Gentzena

Dwa Lematy pomocnicze:

Lemat5: Dla dowolnego sekwentu $\Gamma \Rightarrow \Delta$, z $\Gamma = \varphi_1, ..., \varphi_i, \Delta = \psi_1, ..., \psi_k, i, k > 0$ podane niżej 4 formy są równoważne:

Rachunek LK Gentzena

Dwa Lematy pomocnicze:

Lemat5: Dla dowolnego sekwentu $\Gamma \Rightarrow \Delta$, z $\Gamma = \varphi_1, ..., \varphi_i, \Delta = \psi_1, ..., \psi_k, i, k > 0$ podane niżej 4 formy są równoważne:

1. $\vdash \varphi_1, ..., \varphi_i \Rightarrow \psi_1, ..., \psi_k$
2. $\vdash \varphi_1, ..., \varphi_i, \neg\psi_1, ..., \neg\psi_k \Rightarrow$
3. $\vdash \Rightarrow \neg\varphi_1, ..., \neg\varphi_i, \psi_1, ..., \psi_k$
4. $\vdash \varphi_1 \wedge .... \wedge \varphi_i \Rightarrow \psi_1 \vee ... \vee \psi_k$

Rachunek LK Gentzena

Dwa Lematy pomocnicze:

Lemat5: Dla dowolnego sekwentu $\Gamma \Rightarrow \Delta$, z $\Gamma = \varphi_1, ..., \varphi_i, \Delta = \psi_1, ..., \psi_k, i, k > 0$ podane niżej 4 formy są równoważne:

1. $\vdash \varphi_1, ..., \varphi_i \Rightarrow \psi_1, ..., \psi_k$
2. $\vdash \varphi_1, ..., \varphi_i, \neg\psi_1, ..., \neg\psi_k \Rightarrow$
3. $\vdash \Rightarrow \neg\varphi_1, ..., \neg\varphi_i, \psi_1, ..., \psi_k$
4. $\vdash \varphi_1 \wedge .... \wedge \varphi_i \Rightarrow \psi_1 \vee ... \vee \psi_k$

Lemat6: Dla dowolnego sekwentu $\varphi_1, ..., \varphi_i \Rightarrow \psi, i > 0$ podane niżej 3 formy są równoważne:

Rachunek LK Gentzena

Dwa Lematy pomocnicze:

Lemat5: Dla dowolnego sekwentu $\Gamma \Rightarrow \Delta$, z $\Gamma = \varphi_1, ..., \varphi_i, \Delta = \psi_1, ..., \psi_k, i, k > 0$ podane niżej 4 formy są równoważne:

1. $\vdash \varphi_1, ..., \varphi_i \Rightarrow \psi_1, ..., \psi_k$
2. $\vdash \varphi_1, ..., \varphi_i, \neg\psi_1, ..., \neg\psi_k \Rightarrow$
3. $\vdash \Rightarrow \neg\varphi_1, ..., \neg\varphi_i, \psi_1, ..., \psi_k$
4. $\vdash \varphi_1 \wedge .... \wedge \varphi_i \Rightarrow \psi_1 \vee ... \vee \psi_k$

Lemat6: Dla dowolnego sekwentu $\varphi_1, ..., \varphi_i \Rightarrow \psi, i > 0$ podane niżej 3 formy są równoważne:

1. $\vdash \varphi_1, ..., \varphi_i \Rightarrow \psi$
2. $\vdash \Rightarrow \varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \rightarrow ..., (\varphi_i \rightarrow \psi)...)$
3. $\vdash \Rightarrow \varphi_1 \wedge .... \wedge \varphi_i \rightarrow \psi$

Warianty reguł:

Dowód Lematu 5:

Warianty reguł:

Dowód Lematu 5:

1. $\Longrightarrow$ 2. Z 1. przez k zastosowań $(\neg \Rightarrow)$ otrzymujemy $\vdash \neg\psi_1, \ldots, \neg\psi_k, \varphi_1, \ldots, \varphi_i, \Rightarrow$, skąd przez wielokrotną permutację mamy 2.

Warianty reguł:

Dowód Lematu 5:

1. $\Longrightarrow$ 2. Z 1. przez k zastosowań $(\neg \Rightarrow)$ otrzymujemy $\vdash \neg\psi_1, ..., \neg\psi_k, \varphi_1, ..., \varphi_i, \Rightarrow$, skąd przez wielokrotną permutację mamy 2.
2. $\Longrightarrow$ 1. Po pierwsze zauważ, że dla każdego $i \leq k$ przez obie reguły dla $\neg$ otrzymujemy $\vdash \neg\neg\psi_i \Rightarrow \psi_i$. Z 2. przez wielokrotną permutację mamy $\vdash \neg\psi_1, ..., \neg\psi_k, \varphi_1, ..., \varphi_i, \Rightarrow$, skąd przez $(\Rightarrow \neg)$ otrzymujemy $\vdash \neg\psi_2, ..., \neg\psi_k, \varphi_1, ..., \varphi_i, \Rightarrow \neg\neg\psi_1$. Stosując (Cut) na $\vdash \neg\neg\psi_1 \Rightarrow \psi_1$ otrzymujemy $\vdash \neg\psi_2, ..., \neg\psi_k, \varphi_1, ..., \varphi_i, \Rightarrow \psi_1$. Powtarzamy tę dedukcję $k-1$ razy aż do otrzymania 1.

Warianty reguł:

Dowód Lematu 5:

1. $\implies$ 2. Z 1. przez k zastosowań $(\neg \Rightarrow)$ otrzymujemy $\vdash \neg\psi_1, ..., \neg\psi_k, \varphi_1, ..., \varphi_i, \Rightarrow$, skąd przez wielokrotną permutację mamy 2.
2. $\implies$ 1. Po pierwsze zauważ, że dla każdego $i \leq k$ przez obie reguły dla $\neg$ otrzymujemy $\vdash \neg\neg\psi_i \Rightarrow \psi_i$. Z 2. przez wielokrotną permutację mamy $\vdash \neg\psi_1, ..., \neg\psi_k, \varphi_1, ..., \varphi_i, \Rightarrow$, skąd przez $(\Rightarrow \neg)$ otrzymujemy $\vdash \neg\psi_2, ..., \neg\psi_k, \varphi_1, ..., \varphi_i, \Rightarrow \neg\neg\psi_1$. Stosując (Cut) na $\vdash \neg\neg\psi_1 \Rightarrow \psi_1$ otrzymujemy $\vdash \neg\psi_2, ..., \neg\psi_k, \varphi_1, ..., \varphi_i, \Rightarrow \psi_1$. Powtarzamy tę dedukcję $k-1$ razy aż do otrzymania 1.
1. $\iff$ 3. analogicznie

Warianty reguł:

Dowód Lematu 5:

Warianty reguł:

Dowód Lematu 5:

1. $\Longrightarrow$ 4. Wykonujemy następującą dedukcję:

Warianty reguł:

Dowód Lematu 5:

1. $\Longrightarrow$ 4. Wykonujemy następującą dedukcję:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi_1, \ldots, \varphi_i \Rightarrow \psi_1, \ldots, \psi_k}{\varphi_1 \wedge \varphi_2, \varphi_2, \ldots, \varphi_i \Rightarrow \psi_1, \ldots, \psi_k}\,(\wedge \Rightarrow)}{\varphi_2, \varphi_1 \wedge \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_i \Rightarrow \psi_1, \ldots, \psi_k}\,(P \Rightarrow)}{\varphi_1 \wedge \varphi_2, \varphi_1 \wedge \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_i \Rightarrow \psi_1, \ldots, \psi_k}\,(\wedge \Rightarrow)}{\varphi_1 \wedge \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_i \Rightarrow \psi_1, \ldots, \psi_k}\,(C \Rightarrow\rightarrow)$$

Warianty reguł:

Dowód Lematu 5:

1. $\Longrightarrow$ 4. Wykonujemy następującą dedukcję:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\varphi_1, \dots, \varphi_i \Rightarrow \psi_1, \dots, \psi_k}{\varphi_1 \wedge \varphi_2, \varphi_2, \dots, \varphi_i \Rightarrow \psi_1, \dots, \psi_k}\,(\wedge \Rightarrow)}{\varphi_2, \varphi_1 \wedge \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_i \Rightarrow \psi_1, \dots, \psi_k}\,(P \Rightarrow)}{\varphi_1 \wedge \varphi_2, \varphi_1 \wedge \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_i \Rightarrow \psi_1, \dots, \psi_k}\,(\wedge \Rightarrow)}{\varphi_1 \wedge \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_i \Rightarrow \psi_1, \dots, \psi_k}\,(C \Rightarrow \rightarrow)$$

Powtarzamy tę dedukcję tak długo aż otrzymamy $\varphi_1 \wedge, \dots, \wedge \varphi_i \Rightarrow \psi_1, \dots, \psi_k$, następnie przeprowadzamy analogiczną dedukcję z wykorzystaniem $(\Rightarrow \vee), (\Rightarrow P)$ i $(\Rightarrow C)$ na następniku aż otrzymamy 4.

Warianty reguł:

Dowód Lematu 5:

Warianty reguł:

Dowód Lematu 5:

4. $\Longrightarrow$ 1. Odnotujmy wpierw, że dla $k \geq 2$ zachodzi $\vdash \psi_1 \vee ... \vee \psi_k \Rightarrow \psi_1, ..., \psi_k$, oto początek dowodu:

Warianty reguł:

Dowód Lematu 5:

4. $\Longrightarrow$ 1. Odnotujmy wpierw, że dla $k \geq 2$ zachodzi $\vdash \psi_1 \vee \ldots \vee \psi_k \Rightarrow \psi_1, \ldots, \psi_k$, oto początek dowodu:

$$
(\vee\Rightarrow)\;\dfrac{(\Rightarrow W)\;\dfrac{(\vee\Rightarrow)\;\dfrac{(\Rightarrow W)\;\dfrac{\psi_1 \Rightarrow \psi_1}{\psi_1 \Rightarrow \psi_1, \psi_2} \qquad \genfrac{}{}{1.5pt}{0}{\psi_2 \Rightarrow \psi_2}{\psi_2 \Rightarrow \psi_1, \psi_2}}{\psi_1 \vee \psi_2 \Rightarrow \psi_1, \psi_2}}{\psi_1 \vee \psi_2 \Rightarrow \psi_1, \psi_2, \psi_3} \qquad \genfrac{}{}{1.5pt}{0}{\psi_3 \Rightarrow \psi_3}{\psi_3 \Rightarrow \psi_1, \psi_2, \psi_3}\;(\Rightarrow W), (\Rightarrow}{\psi_1 \vee \psi_2 \vee \psi_3 \Rightarrow \psi_1, \psi_2, \psi_3}
$$

Warianty reguł:

Dowód Lematu 5:

4. $\Longrightarrow$ 1. Odnotujmy wpierw, że dla $k \geq 2$ zachodzi $\vdash \psi_1 \vee ... \vee \psi_k \Rightarrow \psi_1, ..., \psi_k$, oto początek dowodu:

$$
(\vee\Rightarrow)\,\dfrac{(\Rightarrow W)\,\dfrac{(\vee\Rightarrow)\,\dfrac{(\Rightarrow W)\,\dfrac{\psi_1 \Rightarrow \psi_1}{\psi_1 \Rightarrow \psi_1, \psi_2} \qquad \dfrac{\psi_2 \Rightarrow \psi_2}{\psi_2 \Rightarrow \psi_1, \psi_2}}{\psi_1 \vee \psi_2 \Rightarrow \psi_1, \psi_2}}{\psi_1 \vee \psi_2 \Rightarrow \psi_1, \psi_2, \psi_3} \qquad \dfrac{\psi_3 \Rightarrow \psi_3}{\psi_3 \Rightarrow \psi_1, \psi_2, \psi_3}\,(\Rightarrow W), (\Rightarrow}{\psi_1 \vee \psi_2 \vee \psi_3 \Rightarrow \psi_1, \psi_2, \psi_3}
$$

Analogicznie, dla $i \geq 2$ udowadniamy, że zachodzi $\vdash \varphi_1, ..., \varphi_i \Rightarrow \varphi_1 \wedge .... \wedge \varphi_i$. stosując dwa razy (Cut) do 4. i do otrzymanych sekwentów otrzymujemy 1.

Warianty reguł:

Dowód Lematu 6:

Warianty reguł:

Dowód Lematu 6:

1. $\Longrightarrow$ 2. Z 1. za pomocą $(P \Rightarrow)$ otrzymujemy $\vdash \varphi_i, ..., \varphi_1 \Rightarrow \psi$, skąd przez i-krotne zastosowanie $(\Rightarrow\to)$ otrzymujemy 2.

Warianty reguł:

Dowód Lematu 6:

1. $\Longrightarrow$ 2. Z 1. za pomocą $(P \Rightarrow)$ otrzymujemy $\vdash \varphi_i, \ldots, \varphi_1 \Rightarrow \psi$, skąd przez i-krotne zastosowanie $(\Rightarrow\rightarrow)$ otrzymujemy 2.
2. $\Longrightarrow$ Zauważ, że dla dowolnych φ, ψ zachodzi $\vdash \varphi \rightarrow \psi, \varphi \Rightarrow \psi$, w szczególności $\vdash \varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \rightarrow \ldots, (\varphi_i \rightarrow \psi)\ldots), \varphi_1 \Rightarrow \psi$. Stąd przez 2. i (Cut) otrzymujemy $\vdash \varphi_1 \Rightarrow \varphi_2 \rightarrow (\varphi_3 \rightarrow \ldots, (\varphi_i \rightarrow \psi)\ldots)$. Powtarzamy tę dedukcję $i-1$ razy (z kolejnymi podstawieniami $\vdash \varphi_k \rightarrow \psi, \varphi_k \Rightarrow \psi$, $k \leq i$) aż uzyskamy 1.

Warianty reguł:

Dowód Lematu 6:

1. $\Longrightarrow$ 2. Z 1. za pomocą $(P \Rightarrow)$ otrzymujemy $\vdash \varphi_i, ..., \varphi_1 \Rightarrow \psi$, skąd przez i-krotne zastosowanie $(\Rightarrow\rightarrow)$ otrzymujemy 2.
2. $\Longrightarrow$ Zauważ, że dla dowolnych φ, ψ zachodzi $\vdash \varphi \rightarrow \psi, \varphi \Rightarrow \psi$, w szczególności $\vdash \varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \rightarrow ..., (\varphi_i \rightarrow \psi)...), \varphi_1 \Rightarrow \psi$. Stąd przez 2. i (Cut) otrzymujemy
$\vdash \varphi_1 \Rightarrow \varphi_2 \rightarrow (\varphi_3 \rightarrow ..., (\varphi_i \rightarrow \psi)...)$. Powtarzamy tę dedukcję $i-1$ razy (z kolejnymi podstawieniami $\vdash \varphi_k \rightarrow \psi, \varphi_k \Rightarrow \psi$, $k \leq i$) aż uzyskamy 1.
1. $\Longrightarrow$ 3. Przez lemat 5. 1. $\Longrightarrow$ 4. i $(\Rightarrow\rightarrow)$

Warianty reguł:

Dowód Lematu 6:

1. $\Longrightarrow$ 2. Z 1. za pomocą $(P \Rightarrow)$ otrzymujemy $\vdash \varphi_i, ..., \varphi_1 \Rightarrow \psi$, skąd przez i-krotne zastosowanie $(\Rightarrow\rightarrow)$ otrzymujemy 2.
2. $\Longrightarrow$ Zauważ, że dla dowolnych φ, ψ zachodzi $\vdash \varphi \rightarrow \psi, \varphi \Rightarrow \psi$, w szczególności $\vdash \varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \rightarrow ..., (\varphi_i \rightarrow \psi)...), \varphi_1 \Rightarrow \psi$. Stąd przez 2. i (Cut) otrzymujemy
$\vdash \varphi_1 \Rightarrow \varphi_2 \rightarrow (\varphi_3 \rightarrow ..., (\varphi_i \rightarrow \psi)...)$. Powtarzamy tę dedukcję $i-1$ razy (z kolejnymi podstawieniami $\vdash \varphi_k \rightarrow \psi, \varphi_k \Rightarrow \psi$, $k \leq i$) aż uzyskamy 1.
1. $\Longrightarrow$ 3. Przez lemat 5. 1. $\Longrightarrow$ 4. i $(\Rightarrow\rightarrow)$
3. $\Rightarrow$ 1. Ponieważ $\vdash \varphi_1 \wedge .... \wedge \varphi_i \rightarrow \psi, \varphi_1 \wedge .... \wedge \varphi_i \Rightarrow \psi$ więc przez (Cut) na 3. mamy $\vdash \varphi_1 \wedge .... \wedge \varphi_i \Rightarrow \psi$, skąd przez lemat 5 mamy 1.

Warianty reguł:

Uogólnione aksjomaty:

Twierdzenie7: Wersje LK z następującymi formami sekwentów aksjomatycznych są równoważne:

Warianty reguł:

Uogólnione aksjomaty:

Twierdzenie7: Wersje LK z następującymi formami sekwentów aksjomatycznych są równoważne:

1. $\varphi \Rightarrow \varphi$, dla dowolnej zmiennej φ
2. $\varphi \Rightarrow \varphi$, dla dowolnej formuły φ
3. $\Gamma, \varphi \Rightarrow \varphi, \Delta$, dla dowolnej zmiennej φ
4. $\Gamma, \varphi \Rightarrow \varphi, \Delta$, dla dowolnej formuły φ

Warianty reguł:

Uogólnione aksjomaty:

Aby dowieść Tw.7 odwołamy się do 2 lematów:

Warianty reguł:

Uogólnione aksjomaty:

Aby dowieść Tw.7 odwołamy się do 2 lematów:
Lemat 8: Jeżeli w RS jedyne sekwenty aksjomatyczne są sekwentami atomowymi, to $\vdash \varphi \Rightarrow \varphi$ dla dowolnego φ

Warianty reguł:

Uogólnione aksjomaty:

Aby dowieść Tw.7 odwołamy się do 2 lematów:
Lemat 8: Jeżeli w RS jedyne sekwenty aksjomatyczne są sekwentami atomowymi, to $\vdash \varphi \Rightarrow \varphi$ dla dowolnego φ
Lemat 9: Jeżeli ciągi Γ i Δ mają przynajmniej po jednym wystąpieniu takiej samej formuły, to $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$

Warianty reguł:

Uogólnione aksjomaty:

Aby dowieść Tw.7 odwołamy się do 2 lematów:
Lemat 8: Jeżeli w RS jedyne sekwenty aksjomatyczne są sekwentami atomowymi, to $\vdash \varphi \Rightarrow \varphi$ dla dowolnego φ
Lemat 9: Jeżeli ciągi Γ i Δ mają przynajmniej po jednym wystąpieniu takiej samej formuły, to $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$

Uwaga: Dowód Lematu9 jest trywialny (przez reguły osłabiania, ew. permutacji).

Warianty reguł:

Uogólnione aksjomaty:

Warianty reguł:

Uogólnione aksjomaty:

Dowód Lematu8 przeprowadzimy przez indukcję po długości φ. Wystarczy zbudować schematy dowodów pokazujące, że $\varphi \Rightarrow \varphi$ dla φ o dowolnej strukturze można wydedukować z sekwentów $\psi \Rightarrow \psi$, gdzie ψ jest formułą krótszą od φ. Jeżeli $\varphi := \varphi \wedge \psi$, to można zbudować następujący schemat dowodu:

Warianty reguł:

Uogólnione aksjomaty:

Dowód Lematu8 przeprowadzimy przez indukcję po długości φ. Wystarczy zbudować schematy dowodów pokazujące, że $\varphi \Rightarrow \varphi$ dla φ o dowolnej strukturze można wydedukować z sekwentów $\psi \Rightarrow \psi$, gdzie ψ jest formułą krótszą od φ. Jeżeli $\varphi := \varphi \wedge \psi$, to można zbudować następujący schemat dowodu:

$$
\dfrac{(\wedge\Rightarrow)\,\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi} \qquad \dfrac{\psi \Rightarrow \psi}{\varphi \wedge \psi \Rightarrow \psi}\,(\wedge\Rightarrow)}{\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi \wedge \psi}\,(\Rightarrow\wedge)
$$

Warianty reguł:

Uogólnione aksjomaty:

Dowód Lematu8 przeprowadzimy przez indukcję po długości φ. Wystarczy zbudować schematy dowodów pokazujące, że $\varphi \Rightarrow \varphi$ dla φ o dowolnej strukturze można wydedukować z sekwentów $\psi \Rightarrow \psi$, gdzie ψ jest formułą krótszą od φ. Jeżeli $\varphi := \varphi \wedge \psi$, to można zbudować następujący schemat dowodu:

$$\dfrac{(\wedge\Rightarrow)\,\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi} \qquad \dfrac{\psi \Rightarrow \psi}{\varphi \wedge \psi \Rightarrow \psi}\,(\wedge\Rightarrow)}{\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi \wedge \psi}\,(\Rightarrow\wedge)$$

Zadanie: wykazać to dla $\neg, \vee, \rightarrow$

Warianty reguł:

Warianty reguł dwuprzesłankowych:

W LK występuje zarówno reguły k-jednolite (context-sharing): $(\Rightarrow \wedge)$ i $(\vee \Rightarrow)$

Warianty reguł:

Warianty reguł dwuprzesłankowych:

W LK występuje zarówno reguły k-jednolite (context-sharing): $(\Rightarrow \wedge)$ i $(\vee \Rightarrow)$

jak i *k-niezależne* (context-free, context-independent): (Cut) i $(\rightarrow\Rightarrow)$

Warianty reguł:

Warianty reguł dwuprzesłankowych:

W LK występuje zarówno reguły k-jednolite (context-sharing): $(\Rightarrow \wedge)$ i $(\vee \Rightarrow)$

jak i *k-niezależne* (context-free, context-independent): (Cut) i $(\rightarrow\Rightarrow)$

Można otrzymać wariant LK z regułami tylko k-niezależnymi wprowadzając dla $\wedge$ i $\vee$:

Warianty reguł:

Warianty reguł dwuprzesłankowych:

W LK występuje zarówno reguły k-jednolite (context-sharing): $(\Rightarrow\wedge)$ i $(\vee\Rightarrow)$

jak i *k-niezależne* (context-free, context-independent): (Cut) i $(\rightarrow\Rightarrow)$

Można otrzymać wariant LK z regułami tylko k-niezależnymi wprowadzając dla $\wedge$ i $\vee$:

$$(\Rightarrow\wedge') \quad \frac{\Gamma\Rightarrow\Delta,\varphi \qquad \Pi\Rightarrow\Sigma,\psi}{\Gamma,\Pi\Rightarrow\Delta,\Sigma\varphi\wedge\psi} \qquad\qquad (\vee\Rightarrow') \quad \frac{\varphi,\Gamma\Rightarrow\Delta \qquad \psi,\Pi\Rightarrow\Sigma}{\varphi\vee\psi,\Gamma,\Pi\Rightarrow\Delta,\Sigma}$$

Warianty reguł:

Warianty reguł dwuprzesłankowych:

Można otrzymać wariant LK z regułami tylko k-jednolitymi wprowadzając:

Warianty reguł:

Warianty reguł dwuprzesłankowych:

Można otrzymać wariant LK z regułami tylko k-jednolitymi wprowadzając:

$$(Cut') \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad\qquad (\rightarrow\Rightarrow') \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \rightarrow \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

Warianty reguł:

Warianty reguł dwuprzesłankowych:

Można otrzymać wariant LK z regułami tylko k-jednolitymi wprowadzając:

$$(Cut') \ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad (\rightarrow\Rightarrow') \ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \rightarrow \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

Zadanie: wykaż, że reguły k-niezależne są wyprowadzalne z reguł k-jednolitych, przy użyciu osłabiania i permutacji, a reguły k-jednolite są wyprowadzalne z reguł k-niezależnych przy użyciu kontrakcji.

Warianty reguł:

Warianty reguł jednoprzesłankowych:

Występowanie dwóch reguł $(\Rightarrow \vee)$ i $(\wedge \Rightarrow)$ ujawnia pewne trudności:

Warianty reguł:

Warianty reguł jednoprzesłankowych:

Występowanie dwóch reguł $(\Rightarrow \vee)$ i $(\wedge \Rightarrow)$ ujawnia pewne trudności:

- w wielu dowodach nie można uniknąć zastosowań kontrakcji.

Warianty reguł:

Warianty reguł jednoprzesłankowych:

Występowanie dwóch reguł $(\Rightarrow \vee)$ i $(\wedge \Rightarrow)$ ujawnia pewne trudności:

- w wielu dowodach nie można uniknąć zastosowań kontrakcji.
- prowadzi do komplikacji w przypadku zastosowań LK jako procedury rozstrzygalnej

Warianty reguł:

Warianty reguł jednoprzesłankowych:

Występowanie dwóch reguł ($\Rightarrow \vee$) i ($\wedge \Rightarrow$) ujawnia pewne trudności:

- w wielu dowodach nie można uniknąć zastosowań kontrakcji.
- prowadzi do komplikacji w przypadku zastosowań LK jako procedury rozstrzygalnej
- reguły te nie są odwracalne

Warianty reguł:

Warianty reguł jednoprzesłankowych:

Przykład komplikacji dowodu:

Warianty reguł:

Warianty reguł jednoprzesłankowych:

Przykład komplikacji dowodu:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{p \Rightarrow p}{q, p \Rightarrow p}\,(W \Rightarrow)}{p \Rightarrow q \to p}\,(\Rightarrow\to)}{p \Rightarrow (p \to q) \vee (q \to p)}\,(\Rightarrow \vee)}{p \Rightarrow (p \to q) \vee (q \to p), q}\,(\Rightarrow W)}{\Rightarrow (p \to q) \vee (q \to p), p \to q}\,(\Rightarrow\to)}{\Rightarrow (p \to q) \vee (q \to p), (p \to q) \vee (q \to p)}\,(\Rightarrow \vee)}{\Rightarrow (p \to q) \vee (q \to p)}\,(\Rightarrow C)$$

Warianty reguł:

Warianty reguł jednoprzesłankowych:

Reguły Ketonena:

Warianty reguł:

Warianty reguł jednoprzesłankowych:

Reguły Ketonena:

$(\wedge\Rightarrow') \quad \dfrac{\varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow\vee') \quad \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}$

Warianty reguł:

Warianty reguł jednoprzesłankowych:

Reguły Ketonena:

$(\wedge\Rightarrow')$ $\dfrac{\varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ $\qquad$ $(\Rightarrow\vee')$ $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}$

Lemat10: W dowolnym systemie sekwentowym z kontrakcją i osłabianiem reguły Gentzena i Ketonena są równoważne.

Warianty reguł:

Warianty reguł jednoprzesłankowych:

Reguły Ketonena:

$(\wedge\Rightarrow') \quad \dfrac{\varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow\vee') \quad \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}$

Lemat10: W dowolnym systemie sekwentowym z kontrakcją i osłabianiem reguły Gentzena i Ketonena są równoważne.
Szkic dowodu: Aby dowieść wyprowadzalność wariantu Ketonena wystarczy do przesłanki dwukrotnie zastosować wariant Gentzena a następnie kontrakcję. Aby dowieść wyprowadzalność wariantu Gentzena wystarczy do przesłanki zastosować osłabianie aby uzyskać brakującą formułę poboczną, a następnie użyć reguły Ketonena.

Warianty reguł:

Warianty reguł jednoprzesłankowych:

Dowód powyższego sekwentu z użyciem wariantu Ketonena wygląda następująco:

Warianty reguł:

Warianty reguł jednoprzesłankowych:

Dowód powyższego sekwentu z użyciem wariantu Ketonena wygląda następująco:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{q \Rightarrow q}{p, q \Rightarrow q}\,(W \Rightarrow)}{q \Rightarrow p \to q}\,(\Rightarrow \to)}{q \Rightarrow p \to q, p}\,(\Rightarrow W)}{\Rightarrow p \to q, q \to p}\,(\Rightarrow \to)}{\Rightarrow (p \to q) \vee (q \to p)}\,(\Rightarrow \vee)$$

System LK-K:

Reguły strukturalne:

System LK-K:

Reguły strukturalne:

(AX) $\varphi \Rightarrow \varphi$

(Cut) $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$

$(W\Rightarrow)$ $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ $(\Rightarrow W)$ $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}$

$(C\Rightarrow)$ $\dfrac{\varphi, \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ $(\Rightarrow C)$ $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \varphi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}$

$(P\Rightarrow)$ $\dfrac{\Pi, \varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Pi, \psi, \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ $(\Rightarrow P)$ $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi, \varphi, \Pi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi, \Pi}$

System LK-K:

Reguły strukturalne:

$(AX)\quad \varphi \Rightarrow \varphi$

$(Cut)\quad \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$

$(W\Rightarrow)\quad \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ $\qquad (\Rightarrow W)\quad \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}$

$(C\Rightarrow)\quad \dfrac{\varphi, \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ $\qquad (\Rightarrow C)\quad \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \varphi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}$

$(P\Rightarrow)\quad \dfrac{\Pi, \varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Pi, \psi, \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ $\qquad (\Rightarrow P)\quad \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi, \varphi, \Pi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi, \Pi}$

Uwaga: (Cut) jest w wersji k-jednolitej

System LK-K:

Reguły logiczne:

System LK-K:

Reguły logiczne:

$(\neg\Rightarrow)\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}{\neg\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ $(\Rightarrow\neg)\ \dfrac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\varphi}$

$(\wedge\Rightarrow)\ \dfrac{\varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi\wedge\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ $(\Rightarrow\wedge)\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi\wedge\psi}$

$(\Rightarrow\vee)\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi\vee\psi}$ $(\vee\Rightarrow)\ \dfrac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi\vee\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$

$(\Rightarrow\rightarrow)\ \dfrac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi\rightarrow\psi}$ $(\rightarrow\Rightarrow)\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi\rightarrow\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$

System LK-K:

Reguły logiczne:

$(\neg\Rightarrow)\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}{\neg\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ $\qquad$ $(\Rightarrow\neg)\ \dfrac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\varphi}$

$(\wedge\Rightarrow)\ \dfrac{\varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi\wedge\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ $\qquad$ $(\Rightarrow\wedge)\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi\wedge\psi}$

$(\Rightarrow\vee)\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi\vee\psi}$ $\qquad$ $(\vee\Rightarrow)\ \dfrac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi\vee\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$

$(\Rightarrow\rightarrow)\ \dfrac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi\rightarrow\psi}$ $\qquad$ $(\rightarrow\Rightarrow)\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi\rightarrow\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$

Uwaga1: reguły $(\Rightarrow \vee)$ i $(\wedge \Rightarrow)$ są w wersji Ketonena

System LK-K:

Reguły logiczne:

$(\neg\Rightarrow)\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}{\neg\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ $\qquad$ $(\Rightarrow\neg)\ \dfrac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\varphi}$

$(\wedge\Rightarrow)\ \dfrac{\varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi\wedge\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ $\qquad$ $(\Rightarrow\wedge)\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi\wedge\psi}$

$(\Rightarrow\vee)\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi\vee\psi}$ $\qquad$ $(\vee\Rightarrow)\ \dfrac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi\vee\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$

$(\Rightarrow\rightarrow)\ \dfrac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi\rightarrow\psi}$ $\qquad$ $(\rightarrow\Rightarrow)\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi\rightarrow\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$

Uwaga1: reguły $(\Rightarrow\vee)$ i $(\wedge\Rightarrow)$ są w wersji Ketonena
Uwaga2: $(\rightarrow\Rightarrow)$ jest w wersji k-jednolitej

System LK-K:

Odwracalność reguł:

Lemat 11: o odwracalności reguł w LK-K:

System LK-K:

Odwracalność reguł:

Lemat 11: o odwracalności reguł w LK-K:
W LK-K dla każdej reguły oprócz osłabiania, jeżeli wniosek ma dowód, to przesłanki też

System LK-K:

Odwracalność reguł:

Lemat 11: o odwracalności reguł w LK-K:
W LK-K dla każdej reguły oprócz osłabiania, jeżeli wniosek ma dowód, to przesłanki też
Pokażemy dowód dla obu reguł z $\wedge$:

System LK-K:

Odwracalność reguł:

Lemat 11: o odwracalności reguł w LK-K:
W LK-K dla każdej reguły oprócz osłabiania, jeżeli wniosek ma dowód, to przesłanki też
Pokażemy dowód dla obu reguł z $\wedge$:
przypadek $(\wedge \Rightarrow)$

System LK-K:

Odwracalność reguł:

Lemat 11: o odwracalności reguł w LK-K:
W LK-K dla każdej reguły oprócz osłabiania, jeżeli wniosek ma dowód, to przesłanki też
Pokażemy dowód dla obu reguł z $\wedge$:
przypadek $(\wedge \Rightarrow)$

$$\dfrac{\dfrac{(\Rightarrow \wedge)\ \dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi \qquad \psi \Rightarrow \psi}{\varphi, \psi \Rightarrow \varphi \wedge \psi}}{\varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi} \qquad \dfrac{\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \wedge \psi, \varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}}{\varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (Cut)$$

System LK-K:

Odwracalność reguł:

przypadek $(\Rightarrow \wedge)$

System LK-K:

Odwracalność reguł:

przypadek $(\Rightarrow \wedge)$

$$\dfrac{(\Rightarrow P)\,\dfrac{(\Rightarrow W)\,\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi, \varphi}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \varphi \wedge \psi} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\psi, \varphi \Rightarrow \varphi}\,(W \Rightarrow)}{\varphi, \psi \Rightarrow \varphi}\,(P \Rightarrow)}{\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi}\,(\wedge \Rightarrow)}{\overline{\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}\,(Cut)$$

System LK-K:

Odwracalność reguł:

przypadek $(\Rightarrow \wedge)$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi$}
\LeftLabel{$(\Rightarrow W)$}
\UnaryInfC{$\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi, \varphi$}
\LeftLabel{$(\Rightarrow P)$}
\UnaryInfC{$\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \varphi \wedge \psi$}
\AxiomC{$\varphi \Rightarrow \varphi$}
\RightLabel{$(W \Rightarrow)$}
\UnaryInfC{$\psi, \varphi \Rightarrow \varphi$}
\RightLabel{$(P \Rightarrow)$}
\UnaryInfC{$\varphi, \psi \Rightarrow \varphi$}
\RightLabel{$(\wedge \Rightarrow)$}
\UnaryInfC{$\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi$}
\doubleLine
\UnaryInfC{$\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$}
\RightLabel{(Cut)}
\BinaryInfC{$\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$}
\end{prooftree}
$$

Analogicznie dla drugiej przesłanki $(\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi)$ w $(\Rightarrow \wedge)$.

System LK-K:

Odwracalność reguł:

przypadek $(\Rightarrow \wedge)$

$$
\dfrac{
  (\Rightarrow P)\;\dfrac{(\Rightarrow W)\;\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi, \varphi}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \varphi \wedge \psi}
  \qquad
  \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\psi, \varphi \Rightarrow \varphi}\;(W \Rightarrow)}{\varphi, \psi \Rightarrow \varphi}\;(P \Rightarrow)}{\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi}\;(\wedge \Rightarrow)}{\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}
}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}\;(Cut)
$$

Analogicznie dla drugiej przesłanki $(\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi)$ w $(\Rightarrow \wedge)$.
Zadanie: dowiedź dla innych reguł w podobny sposób.

System LK-K:

Lemat12: Dowiedlne sekwenty:

W LK (LK-K) dowiedlne są następujące sekwenty:

System LK-K:

Lemat12: Dowiedlne sekwenty:

W LK (LK-K) dowiedlne są następujące sekwenty:

- $\varphi \Rightarrow \neg\neg\varphi \qquad \neg\neg\varphi \Rightarrow \varphi$
- $\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi \qquad \varphi \wedge \psi \Rightarrow \psi$
- $\varphi, \psi \Rightarrow \varphi \wedge \psi$
- $\varphi \Rightarrow \varphi \vee \psi \qquad \psi \Rightarrow \varphi \vee \psi$
- $\varphi \vee \psi \Rightarrow \varphi, \psi$
- $\varphi \rightarrow \psi, \varphi \Rightarrow \psi$
- $\neg\psi, \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \neg\varphi$
- $\Rightarrow \varphi, \varphi \rightarrow \psi$
- $\psi \Rightarrow \varphi \rightarrow \psi$

System LK-K:

Odwracalność reguł:

System LK-K:

Odwracalność reguł:

W LK-K tylko osłabianie jest nieodwracalne. Jeżeli się go pozbędziemy wprowadzając aksjomaty uogólnione postaci $\Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta, \varphi$, to z kolei (Cut) nie jest odwracalne.

System LK-K:

Odwracalność reguł:

W LK-K tylko osłabianie jest nieodwracalne. Jeżeli się go pozbędziemy wprowadzając aksjomaty uogólnione postaci $\Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta, \varphi$, to z kolei (Cut) nie jest odwracalne.

Wniosek: Gdyby wykazać zbędność (Cut), to wtedy LK-K z uogólnionymi aksjomatami i bez osłabiania będzie systemem w pełni odwracalnym.

System LK-K:

Odwracalność reguł:

W LK-K tylko osłabianie jest nieodwracalne. Jeżeli się go pozbędziemy wprowadzając aksjomaty uogólnione postaci $\Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta, \varphi$, to z kolei (Cut) nie jest odwracalne.

Wniosek: Gdyby wykazać zbędność (Cut), to wtedy LK-K z uogólnionymi aksjomatami i bez osłabiania będzie systemem w pełni odwracalnym.

Lemat13: W LK własność odwracalności nie zachodzi dla reguł: $(W \Rightarrow), (\Rightarrow W), (Cut), (\rightarrow\Rightarrow), (\wedge \Rightarrow), (\Rightarrow \vee)$
Dowód przez wykorzystanie semantycznej interpretacji.

System LK-K:

Odwracalność reguł:

W LK-K tylko osłabianie jest nieodwracalne. Jeżeli się go pozbędziemy wprowadzając aksjomaty uogólnione postaci $\Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta, \varphi$, to z kolei (Cut) nie jest odwracalne.

Wniosek: Gdyby wykazać zbędność (Cut), to wtedy LK-K z uogólnionymi aksjomatami i bez osłabiania będzie systemem w pełni odwracalnym.

Lemat13: W LK własność odwracalności nie zachodzi dla reguł: $(W \Rightarrow), (\Rightarrow W), (Cut), (\rightarrow\Rightarrow), (\wedge \Rightarrow), (\Rightarrow \vee)$
Dowód przez wykorzystanie semantycznej interpretacji.

Zadanie: Oczywiście lemat o odwracalności dla LK-K można też dowieść w wersji semantycznej

System LK – eliminacja cięcia:

Reguła Mix

$$(Mix)\quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi^k \qquad \varphi^n, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}$$

gdzie $k > 0$ i $n > 0$, to ilość wystąpień cut-formuły w lewej i prawej przesłance.

System LK – eliminacja cięcia:

Reguła Mix

$$(Mix)\quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi^k \qquad \varphi^n, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}$$

gdzie $k > 0$ i $n > 0$, to ilość wystąpień cut-formuły w lewej i prawej przesłance.

Uwaga: (Mix) jest równoważne (Cut).

System LK – eliminacja cięcia:

Reguła Mix

$$(Mix)\quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi^k \qquad \varphi^n, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}$$

gdzie $k > 0$ i $n > 0$, to ilość wystąpień cut-formuły w lewej i prawej przesłance.

Uwaga: (Mix) jest równoważne (Cut).

Twierdzenie14. Każdy dowód z użyciem (Mix) można przekształcić w dowód bez tej reguły.

System LK – eliminacja cięcia:

Dowód Gentzena

Klasyczna wersja dowodu, przedstawiona przez Gentzena, zawiera potrójną indukcję:

System LK – eliminacja cięcia:

Dowód Gentzena

Klasyczna wersja dowodu, przedstawiona przez Gentzena, zawiera potrójną indukcję:

1. po ilości wystąpień cięcia w dowodzie;

System LK – eliminacja cięcia:

Dowód Gentzena

Klasyczna wersja dowodu, przedstawiona przez Gentzena, zawiera potrójną indukcję:

1. po ilości wystąpień cięcia w dowodzie;
2. po długości cut-formuły (parametr ten określany jest przez Gentzena jako grade);

System LK – eliminacja cięcia:

Dowód Gentzena

Klasyczna wersja dowodu, przedstawiona przez Gentzena, zawiera potrójną indukcję:

1. po ilości wystąpień cięcia w dowodzie;
2. po długości cut-formuły (parametr ten określany jest przez Gentzena jako grade);
3. po głębokości (Cut) tj. ilości sekwentów zawierających cut-formułę i występujących nad sekwentem wnioskiem tego zastosowania (Cut) (parametr ten określany jest przez Gentzena jako rank).

System LK – eliminacja cięcia:

Definicja głębokości (Cut)

System LK – eliminacja cięcia:

Definicja głębokości (Cut)

Niech φ będzie cut-formułą, a $\mathcal{B}$ dowolną gałęzią zawierającą lewą przesłankę (Cut).

System LK – eliminacja cięcia:

Definicja głębokości (Cut)

Niech φ będzie cut-formułą, a $\mathcal{B}$ dowolną gałęzią zawierającą lewą przesłankę (Cut).
Rank($\mathcal{B}$) to ilość węzłów w tej gałęzi, w których występuje φ i które są nad wnioskiem (Cut).

System LK – eliminacja cięcia:

Definicja głębokości (Cut)

Niech φ będzie cut-formułą, a $\mathcal{B}$ dowolną gałęzią zawierająca lewą przesłankę (Cut).
Rank($\mathcal{B}$) to ilość węzłów w tej gałęzi, w których występuje φ i które są nad wnioskiem (Cut).
L-rank(φ) to maksymalna wartość rank($\mathcal{B}$), gdzie $\mathcal{B}$ to dowolna z gałęzi zawierających lewą przesłanką (Cut).

System LK – eliminacja cięcia:

Definicja głębokości (Cut)

Niech φ będzie cut-formułą, a $\mathcal{B}$ dowolną gałęzią zawierająca lewą przesłankę (Cut).
Rank($\mathcal{B}$) to ilość węzłów w tej gałęzi, w których występuje φ i które są nad wnioskiem (Cut).
L-rank(φ) to maksymalna wartość rank($\mathcal{B}$), gdzie $\mathcal{B}$ to dowolna z gałęzi zawierających lewą przesłanką (Cut).
R-rank(φ) definiujemy analogicznie ale dla prawej przesłanki.

System LK – eliminacja cięcia:

Definicja głębokości (Cut)

Niech φ będzie cut-formułą, a $\mathcal{B}$ dowolną gałęzią zawierającą lewą przesłankę (Cut).
Rank($\mathcal{B}$) to ilość węzłów w tej gałęzi, w których występuje φ i które są nad wnioskiem (Cut).
L-rank(φ) to maksymalna wartość rank($\mathcal{B}$), gdzie $\mathcal{B}$ to dowolna z gałęzi zawierających lewą przesłanką (Cut).
R-rank(φ) definiujemy analogicznie ale dla prawej przesłanki.
Rank(φ)=L-rank(φ)+R-rank(φ).

System LK – eliminacja cięcia:

Definicja głębokości (Cut)

Niech φ będzie cut-formułą, a $\mathcal{B}$ dowolną gałęzią zawierającą lewą przesłankę (Cut).
Rank($\mathcal{B}$) to ilość węzłów w tej gałęzi, w których występuje φ i które są nad wnioskiem (Cut).
L-rank(φ) to maksymalna wartość rank($\mathcal{B}$), gdzie $\mathcal{B}$ to dowolna z gałęzi zawierających lewą przesłanką (Cut).
R-rank(φ) definiujemy analogicznie ale dla prawej przesłanki.
Rank(φ)=L-rank(φ)+R-rank(φ).
Głębokość danego zastosowania (Cut) to rank jego cut-formuły.

System LK – eliminacja cięcia:

Dowód Gentzena – schemat ogólny:

I. Indukcja po ilości (Mix)

1.1. Baza: W dowodzie z jednym (Mix), jest on eliminowalny

II. Indukcja po głębokości cut-formuły

III. Indukcja po długości cut-formuły

Wniosek z III: (Mix) o głębokości 2 na cut-formule o dowolnej długości jest eliminowalny

Wniosek z II: (Mix) o dowolnej głębokości jest eliminowalny

1.2. Krok indukcyjny: Jeżeli (Mix) jest eliminowalny w dowodzie, w którym występuje $k < n$ razy, to jest eliminowalny w dowodzie, w którym występuje n razy

Wniosek z 1.1., 1.2: (Mix) jest eliminowalne w każdym dowodzie

System LK – eliminacja cięcia:

Dowód Gentzena – schemat trochę mniej ogólny:

I. Indukcja po ilości (Mix)

1.1. Baza: W dowodzie z jednym (Mix), jest on eliminowalny

II. Indukcja po głębokości cut-formuły

2.1. Baza: (Mix) o głębokości 2 jest eliminowalny

III. Indukcja po długości cut-formuły

3.1. Baza: (Mix) na cut-formule o długości 0 jest eliminowalny

3.2. Krok indukcyjny: Jeżeli (Mix) na cut-formule o długości $k < n$ jest eliminowalny, to jest też eliminowalny na cut-formule o długości n

Wniosek z 3.1., 3.2: (Mix) o głębokości 2 na cut-formule o dowolnej długości jest eliminowalny

2.2. Krok indukcyjny: Jeżeli (Mix) głębokości $k < n$ jest eliminowalny, to (Mix) o głębokości n jest eliminowalny

Wniosek z 2.1., 2.2: (Mix) o dowolnej głębokości jest eliminowalny

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.1. rank=2, P. 3.1. długość = 0. 4 przypadki (przesłanki aksjomaty lub przez (W):

a) obie przesłanki aksjomatyczne – eliminacja trywialna

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.1. rank=2, P. 3.1. długość = 0. 4 przypadki (przesłanki aksjomaty lub przez (W):

a) obie przesłanki aksjomatyczne – eliminacja trywialna
dowód

$$(Mix)\ \frac{\varphi \Rightarrow \varphi \qquad \varphi \Rightarrow \varphi}{\varphi \Rightarrow \varphi}$$

zamieniamy na: $\varphi \Rightarrow \varphi$

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.1. rank=2, P. 3.1. długość = 0. 4 przypadki (przesłanki aksjomaty lub przez (W):

b) lewa przesłanka aksjomatyczna, prawa przez $(W \Rightarrow)$

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.1. rank=2, P. 3.1. długość = 0. 4 przypadki (przesłanki aksjomaty lub przez (W):

b) lewa przesłanka aksjomatyczna, prawa przez $(W \Rightarrow)$ fragment dowodu

$$(Mix)\ \frac{\varphi \Rightarrow \varphi \qquad \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

zamieniamy na frg. dowodu: $\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.1. rank=2, P. 3.1. długość = 0. 4 przypadki (przesłanki aksjomaty lub przez (W):

b) lewa przesłanka aksjomatyczna, prawa przez $(W \Rightarrow)$
fragment dowodu

$$(Mix)\ \frac{\varphi \Rightarrow \varphi \qquad \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

zamieniamy na frg. dowodu: $\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$
c) przypadek z prawą przesłanką aksjomatyczną a lewą przez $(\Rightarrow W)$ analogicznie.

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.1. rank=2, P. 3.1. długość = 0. 4 przypadki (przesłanki aksjomaty lub przez (W):

d) obie przesłanki przez (W) – fragment dowodu

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.1. rank=2, P. 3.1. długość = 0. 4 przypadki (przesłanki aksjomaty lub przez (W):

d) obie przesłanki przez (W) – fragment dowodu

$$(Mix)\ \dfrac{(\Rightarrow W)\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi} \qquad \dfrac{\Pi \Rightarrow \Sigma}{\varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma}\ (W \Rightarrow)}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}$$

zamieniamy na:

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.1. rank=2, P. 3.1. długość = 0. 4 przypadki (przesłanki aksjomaty lub przez (W):

d) obie przesłanki przez (W) – fragment dowodu

$$(Mix)\,\dfrac{(\Rightarrow W)\,\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi} \qquad \dfrac{\Pi \Rightarrow \Sigma}{\varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma}\,(W \Rightarrow)}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}$$

zamieniamy na:

$$(W)(P)\,\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}$$

gdzie $(W)(P)$ oznacza wielokrotne zastosowanie osłabiania i permutacji po obu stronach.

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.1. rank=2, P. 3.1. długość = 0. 4 przypadki (przesłanki aksjomaty lub przez (W):

d) obie przesłanki przez (W) – fragment dowodu

$$\dfrac{(\Rightarrow W)\,\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi} \qquad \dfrac{\Pi \Rightarrow \Sigma}{\varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma}\,(W \Rightarrow)}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}\,(Mix)$$

zamieniamy na:

$$(W)(P)\,\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}$$

gdzie $(W)(P)$ oznacza wielokrotne zastosowanie osłabiania i permutacji po obu stronach.
Wniosek: gdy cut-formuła ma długość 0, to (Mix) o rank=2 jest eliminowalne.

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.1. rank=2, P. 3.2. Zał. ind.: (Mix) na formule o długości $< n$ jest eliminowalny.

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.1. rank=2, P. 3.2. Zał. ind.: (Mix) na formule o długości $< n$ jest eliminowalny.

- Wykazujemy, że (Mix) na formule o długości n jest eliminowalny lub zastępowalny przez zastosowania (Mix) na formułach krótszych.

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.1. rank=2, P. 3.2. Zał. ind.: (Mix) na formule o długości $< n$ jest eliminowalny.

- Wykazujemy, że (Mix) na formule o długości n jest eliminowalny lub zastępowalny przez zastosowania (Mix) na formułach krótszych.
- W przypadku gdy jedna z przesłanek jest aksjomatem lub otrzymana przez (W) jest eliminowalny całkowicie analogicznie jak w P. 3.1.

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.1. rank=2, P. 3.2. Zał. ind.: (Mix) na formule o długości $< n$ jest eliminowalny.

- Wykazujemy, że (Mix) na formule o długości n jest eliminowalny lub zastępowalny przez zastosowania (Mix) na formułach krótszych.
- W przypadku gdy jedna z przesłanek jest aksjomatem lub otrzymana przez (W) jest eliminowalny całkowicie analogicznie jak w P. 3.1.
- Zostają przypadki gdzie cut-formuła jest otrzymana przez regułę logiczną w obu przesłankach.

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.1. rank=2, P. 3.2. Zał. ind.: (Mix) na formule o długości $< n$ jest eliminowalny.

a) Przypadek gdy cut-formuła $:= \varphi \wedge \psi$: frg. dowodu postaci:

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.1. rank=2, P. 3.2. Zał. ind.: (Mix) na formule o długości $< n$ jest eliminowalny.

a) Przypadek gdy cut-formuła $:= \varphi \wedge \psi$: frg. dowodu postaci:

$$(Mix)\ \dfrac{(\Rightarrow \wedge)\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi} \qquad \dfrac{\varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\varphi \wedge \psi, \Pi \Rightarrow \Sigma}\ (\wedge \Rightarrow)}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}$$

zostaje zastąpiony przez:

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.1. rank=2, P. 3.2. Zał. ind.: (Mix) na formule o długości $< n$ jest eliminowalny.

a) Przypadek gdy cut-formuła $:= \varphi \wedge \psi$: frg. dowodu postaci:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi}(\Rightarrow \wedge) \qquad \dfrac{\varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\varphi \wedge \psi, \Pi \Rightarrow \Sigma}(\wedge \Rightarrow)}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}(Mix)$$

zostaje zastąpiony przez:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi^\star \Rightarrow \Delta^\star, \Sigma}(Mix)}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}(W)(P)$$

gdzie $\Pi^\star(\Delta^\star)$ oznacza Π bez ewentualnych wystąpień φ.

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.1. rank=2, P. 3.2. Zał. ind.: (Mix) na formule o długości $< n$ jest eliminowalny.

a) Przypadek gdy cut-formuła $:= \varphi \wedge \psi$: frg. dowodu postaci:

$$(Mix)\ \dfrac{(\Rightarrow\wedge)\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi} \qquad \dfrac{\varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\varphi \wedge \psi, \Pi \Rightarrow \Sigma}\ (\wedge\Rightarrow)}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}$$

zostaje zastąpiony przez:

$$(W)(P)\ \dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi^\star \Rightarrow \Delta^\star, \Sigma}\ (Mix)}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}$$

gdzie $\Pi^\star(\Delta^\star)$ oznacza Π bez ewentualnych wystąpień φ.
analogicznie dla $(\wedge \Rightarrow)$ na ψ oraz dla $\vee$ i $\neg$

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.1. rank=2, P. 3.2. Zał. ind.: jw.

b) Przypadek gdy cut-formuła := $\varphi \rightarrow \psi$: frg. dowodu postaci:

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.1. rank=2, P. 3.2. Zał. ind.: jw.

b) Przypadek gdy cut-formuła := $\varphi \to \psi$: frg. dowodu postaci:

$$\dfrac{(\Rightarrow\to)\,\dfrac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \to \psi} \qquad \dfrac{\Pi \Rightarrow \Sigma, \varphi \qquad \psi, \Lambda \Rightarrow \Xi}{\varphi \to \psi, \Pi, \Lambda \Rightarrow \Sigma, \Xi}\,(\to\Rightarrow)}{\Gamma, \Pi, \Lambda \Rightarrow \Delta, \Sigma, \Xi}\,(Mix)$$

zostaje zastąpiony przez:

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.1. rank=2, P. 3.2. Zał. ind.: jw.

b) Przypadek gdy cut-formuła $:= \varphi \to \psi$: frg. dowodu postaci:

$$\dfrac{(\Rightarrow\to)\,\dfrac{\varphi,\Gamma \Rightarrow \Delta,\psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta,\varphi \to \psi} \qquad \dfrac{\Pi \Rightarrow \Sigma,\varphi \qquad \psi,\Lambda \Rightarrow \Xi}{\varphi \to \psi,\Pi,\Lambda \Rightarrow \Sigma,\Xi}\,(\to\Rightarrow)}{\Gamma,\Pi,\Lambda \Rightarrow \Delta,\Sigma,\Xi}\,(Mix)$$

zostaje zastąpiony przez:

$$\begin{array}{c} \dfrac{\Pi \Rightarrow \Sigma,\varphi \qquad \dfrac{\varphi,\Gamma \Rightarrow \Delta,\psi \qquad \psi,\Lambda \Rightarrow \Xi}{\varphi,\Gamma,\Lambda^\star \Rightarrow \Delta^\star,\Xi}\,(Mix)}{\Pi,\Gamma^*,\Lambda^{\star\star} \Rightarrow \Sigma^\star,\Delta^\star,\Xi}\,(Mix) \\ \hline\hline \Gamma,\Pi,\Lambda \Rightarrow \Delta,\Sigma,\Xi \end{array}\,(W)(P)$$

gdzie $\Delta^\star$ i $\Lambda^\star$ to Δ,Λ bez wystąpień ψ, $\Gamma^\star$ i $\Sigma^\star$ to Γ,Σ bez φ a $\Lambda^{\star\star}$ to Λ bez φ i ψ.

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: (Mix) o głębokości $< n$ jest eliminowalny.

Dowodzimy, że każdy (Mix) o głębokości $= n$ można zastąpić zastosowaniami (Mix) o mniejszej głębokości.

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: (Mix) o głębokości $< n$ jest eliminowalny.

Dowodzimy, że każdy (Mix) o głębokości $= n$ można zastąpić zastosowaniami (Mix) o mniejszej głębokości.
Dowód ma dwie części:

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: (Mix) o głębokości $< n$ jest eliminowalny.

Dowodzimy, że każdy (Mix) o głębokości $= n$ można zastąpić zastosowaniami (Mix) o mniejszej głębokości.
Dowód ma dwie części:
A. Zakładamy, że RR> 1 i rozważamy różne przypadki, które doprowadziły do dedukcji prawej przesłanki (Mix)

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: (Mix) o głębokości $< n$ jest eliminowalny.

Dowodzimy, że każdy (Mix) o głębokości $= n$ można zastąpić zastosowaniami (Mix) o mniejszej głębokości.
Dowód ma dwie części:
A. Zakładamy, że RR> 1 i rozważamy różne przypadki, które doprowadziły do dedukcji prawej przesłanki (Mix)
B. Zakładamy, że LR> 1 i rozważamy różne przypadki, które doprowadziły do dedukcji lewej przesłanki (Mix)

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: (Mix) o głębokości $< n$ jest eliminowalny.

Dowodzimy, że każdy (Mix) o głębokości $= n$ można zastąpić zastosowaniami (Mix) o mniejszej głębokości.
Dowód ma dwie części:
A. Zakładamy, że RR> 1 i rozważamy różne przypadki, które doprowadziły do dedukcji prawej przesłanki (Mix)
B. Zakładamy, że LR> 1 i rozważamy różne przypadki, które doprowadziły do dedukcji lewej przesłanki (Mix)
W każdej części należy rozważyć sytuacje, gdy cut-formuła jest:

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: (Mix) o głębokości $< n$ jest eliminowalny.

Dowodzimy, że każdy (Mix) o głębokości $= n$ można zastąpić zastosowaniami (Mix) o mniejszej głębokości.
Dowód ma dwie części:
A. Zakładamy, że RR> 1 i rozważamy różne przypadki, które doprowadziły do dedukcji prawej przesłanki (Mix)
B. Zakładamy, że LR> 1 i rozważamy różne przypadki, które doprowadziły do dedukcji lewej przesłanki (Mix)
W każdej części należy rozważyć sytuacje, gdy cut-formuła jest:
– parametryczna

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: (Mix) o głębokości $< n$ jest eliminowalny.

Dowodzimy, że każdy (Mix) o głębokości $= n$ można zastąpić zastosowaniami (Mix) o mniejszej głębokości.
Dowód ma dwie części:
A. Zakładamy, że RR> 1 i rozważamy różne przypadki, które doprowadziły do dedukcji prawej przesłanki (Mix)
B. Zakładamy, że LR> 1 i rozważamy różne przypadki, które doprowadziły do dedukcji lewej przesłanki (Mix)
W każdej części należy rozważyć sytuacje, gdy cut-formuła jest:
– parametryczna
– przesłankowa (zastosowanej reguły)

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: (Mix) o głębokości $< n$ jest eliminowalny.

Dowodzimy, że każdy (Mix) o głębokości $= n$ można zastąpić zastosowaniami (Mix) o mniejszej głębokości.
Dowód ma dwie części:
A. Zakładamy, że RR> 1 i rozważamy różne przypadki, które doprowadziły do dedukcji prawej przesłanki (Mix)
B. Zakładamy, że LR> 1 i rozważamy różne przypadki, które doprowadziły do dedukcji lewej przesłanki (Mix)
W każdej części należy rozważyć sytuacje, gdy cut-formuła jest:
– parametryczna
– przesłankowa (zastosowanej reguły)
– zasadnicza

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: (Mix) o głębokości $< n$ jest eliminowalny.

Dowodzimy, że każdy (Mix) o głębokości $= n$ można zastąpić zastosowaniami (Mix) o mniejszej głębokości.
Dowód ma dwie części:
A. Zakładamy, że RR> 1 i rozważamy różne przypadki, które doprowadziły do dedukcji prawej przesłanki (Mix)
B. Zakładamy, że LR> 1 i rozważamy różne przypadki, które doprowadziły do dedukcji lewej przesłanki (Mix)
W każdej części należy rozważyć sytuacje, gdy cut-formuła jest:
– parametryczna
– przesłankowa (zastosowanej reguły)
– zasadnicza
i wziąć pod uwagę wszystkie możliwe reguły.

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: (Mix) o głębokości $< n$ jest eliminowalny.

A. Zakładamy, że RR> 1

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: (Mix) o głębokości $< n$ jest eliminowalny.

A. Zakładamy, że RR> 1

a) Jeżeli w lewej przesłance cut-formuła występuje po obu stronach sekwentu, to redukcja całkowita, tak jak w przypadku aksjomatu.

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: (Mix) o głębokości $< n$ jest eliminowalny.

A. Zakładamy, że RR> 1

a) Jeżeli w lewej przesłance cut-formuła występuje po obu stronach sekwentu, to redukcja całkowita, tak jak w przypadku aksjomatu. fragment dowodu o postaci:

$$(Mix)\ \frac{\Gamma[\varphi] \Rightarrow \Delta[\varphi] \qquad \varphi^k, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma[\varphi], \Pi \Rightarrow \Delta^\star, \Sigma}$$

gdzie $\Gamma[\varphi]$ oznacza, że φ występuje w Γ

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: (Mix) o głębokości $< n$ jest eliminowalny.

A. Zakładamy, że RR> 1

a) Jeżeli w lewej przesłance cut-formuła występuje po obu stronach sekwentu, to redukcja całkowita, tak jak w przypadku aksjomatu. fragment dowodu o postaci:

$$(Mix)\ \frac{\Gamma[\varphi] \Rightarrow \Delta[\varphi] \qquad \varphi^k, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma[\varphi], \Pi \Rightarrow \Delta^\star, \Sigma}$$

gdzie $\Gamma[\varphi]$ oznacza, że φ występuje w Γ

zostaje zastąpiony przez:

$$(C)(W),(P)\ \frac{\varphi^k, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma[\varphi], \Pi \Rightarrow \Delta^\star, \Sigma}$$

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: (Mix) o głębokości $< n$ jest eliminowalny.

b) przypadki gdy cut-formuła jest parametrem a prawa przesłanka jest otrzymana przez regułę działającą tylko na następniku:

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: (Mix) o głębokości $< n$ jest eliminowalny.

b) przypadki gdy cut-formuła jest parametrem a prawa przesłanka jest otrzymana przez regułę działającą tylko na następniku: 1-przesłankowe reguły, np. przypadek $(\Rightarrow \vee)$

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: (Mix) o głębokości $< n$ jest eliminowalny.

b) przypadki gdy cut-formuła jest parametrem a prawa przesłanka jest otrzymana przez regułę działającą tylko na następniku:
1-przesłankowe reguły, np. przypadek $(\Rightarrow \vee)$
fragment dowodu o postaci:

$$(Mix)\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi^i \qquad \dfrac{\varphi^k, \Pi \Rightarrow \Sigma, \psi}{\varphi^k, \Pi \Rightarrow \Sigma, \psi \vee \chi} \Rightarrow \vee)}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma, \psi \vee \chi}$$

zostaje zastąpiony przez:

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: (Mix) o głębokości $< n$ jest eliminowalny.

b) przypadki gdy cut-formuła jest parametrem a prawa przesłanka jest otrzymana przez regułę działającą tylko na następniku:
1-przesłankowe reguły, np. przypadek $(\Rightarrow \vee)$
fragment dowodu o postaci:

$$(Mix)\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi^i \qquad \dfrac{\varphi^k, \Pi \Rightarrow \Sigma, \psi}{\varphi^k, \Pi \Rightarrow \Sigma, \psi \vee \chi} \Rightarrow \vee)}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma, \psi \vee \chi}$$

zostaje zastąpiony przez:

$$(\Rightarrow \vee)\ \dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi^i \qquad \varphi^k, \Pi \Rightarrow \Sigma, \psi}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma, \psi}(Mix)}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma, \psi \vee \chi}$$

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: (Mix) o głębokości $< n$ jest eliminowalny.

2-przesłankowe reguły – tylko $(\Rightarrow \wedge)$:

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: (Mix) o głębokości $< n$ jest eliminowalny.

2-przesłankowe reguły – tylko $(\Rightarrow \wedge)$:
fragment dowodu o postaci:

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi^i \qquad \dfrac{\varphi^k, \Pi \Rightarrow \Sigma, \psi \qquad \varphi^k, \Pi \Rightarrow \Sigma, \chi}{\varphi^k, \Pi \Rightarrow \Sigma, \psi \wedge \chi}\,(\Rightarrow \wedge)}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma, \psi \wedge \chi}\,(Mix)$$

zostaje zastąpiony przez:

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: (Mix) o głębokości $< n$ jest eliminowalny.

2-przesłankowe reguły – tylko $(\Rightarrow \wedge)$:
fragment dowodu o postaci:

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi^i \qquad \dfrac{\varphi^k, \Pi \Rightarrow \Sigma, \psi \qquad \varphi^k, \Pi \Rightarrow \Sigma, \chi}{\varphi^k, \Pi \Rightarrow \Sigma, \psi \wedge \chi}\,(\Rightarrow \wedge)}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma, \psi \wedge \chi}\,(Mix)$$

zostaje zastąpiony przez:

$$\dfrac{(M)\,\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi^i \qquad \varphi^k, \Pi \Rightarrow \Sigma, \psi}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma, \psi} \qquad \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi^i \qquad \varphi^k, \Pi \Rightarrow \Sigma, \chi}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma, \chi}\,(Mi}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma, \psi \wedge \chi}\,(\Rightarrow \wedge)$$

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: (Mix) o głębokości $< n$ jest eliminowalny.

c) przypadki gdy cut-formuła jest parametrem a prawa przesłanka jest otrzymana przez regułę działającą tylko na poprzedniku:

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: (Mix) o głębokości $< n$ jest eliminowalny.

c) przypadki gdy cut-formuła jest parametrem a prawa przesłanka jest otrzymana przez regułę działającą tylko na poprzedniku: przypadek $(\wedge \Rightarrow)$ – frg. dowodu postaci:

$$(Mix)\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi^i \qquad \dfrac{\psi, \varphi^k, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\psi \wedge \chi, \varphi^k, \Pi \Rightarrow \Sigma}\wedge \Rightarrow)}{\Gamma, \psi \wedge \chi, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}$$

$$(\wedge \Rightarrow)(P \Rightarrow)\ \dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi^i \qquad \psi, \varphi^k, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \psi, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}(Mix)}{\Gamma, \psi \wedge \chi, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}$$

analogicznie dla $(W \Rightarrow)$, $(C \Rightarrow)$, $(P \Rightarrow)$ a dla 2-przesłankowej $(\vee \Rightarrow)$ analogicznie do $(\Rightarrow \wedge)$ w b).

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: (Mix) o głębokości $< n$ jest eliminowalny.

d) przypadki gdy cut-formuła jest parametrem a prawa przesłanka jest otrzymana przez regułę działającą na obu stronach sekwentu:

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: (Mix) o głębokości $< n$ jest eliminowalny.

d) przypadki gdy cut-formuła jest parametrem a prawa przesłanka jest otrzymana przez regułę działającą na obu stronach sekwentu: przypadek ($\Rightarrow\rightarrow$) – frg. dowodu postaci:

$$(Mix)\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi^i \qquad \dfrac{\psi, \varphi^k, \Pi \Rightarrow \Sigma, \chi}{\varphi^k, \Pi \Rightarrow \Sigma, \psi \rightarrow \chi}\ (\Rightarrow\rightarrow)}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma, \psi \rightarrow \chi}$$

$$(\Rightarrow\rightarrow)(P \Rightarrow)\ \dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi^i \qquad \psi, \varphi^k, \Pi \Rightarrow \Sigma, \chi}{\Gamma, \psi, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma, \chi}\ (Mix)}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma, \psi \rightarrow \chi}$$

analogicznie dla $(\neg \Rightarrow)$, $(\Rightarrow \neg)$

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: (Mix) o głębokości $< n$ jest eliminowalny.

2-przesłankowe reguły – tylko ($\rightarrow\Rightarrow$): frg. dowodu postaci:

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: (Mix) o głębokości $< n$ jest eliminowalny.

2-przesłankowe reguły – tylko $(\to\Rightarrow)$: frg. dowodu postaci:

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi^i \qquad \dfrac{\varphi^k, \Pi \Rightarrow \Sigma, \psi \qquad \chi, \varphi^n, \Lambda \Rightarrow \Xi}{\psi \to \chi, \varphi^{k+n}, \Pi, \Lambda \Rightarrow \Sigma, \Xi}\,(\to\Rightarrow)}{\Gamma, \psi \to \chi, \Pi, \Lambda \Rightarrow \Delta, \Sigma, \Xi}\,(Mix)$$

$$(C)(P)\,\dfrac{(\to\Rightarrow)\,\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi^i \qquad \varphi^k, \Pi \Rightarrow \Sigma, \psi}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma, \psi} \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi^i \qquad \chi, \varphi^n, \Lambda \Rightarrow \Xi}{\Gamma, \chi, \Lambda \Rightarrow \Delta, \Xi}\,(Mix)}{\chi, \Gamma, \Lambda \Rightarrow \Delta, \Xi}\,(P\Rightarrow)}{\psi \to \chi, \Gamma, \Pi, \Gamma, \Lambda \Rightarrow \Delta, \Sigma, \Delta, \Xi}}{\Gamma, \psi \to \chi, \Pi, \Lambda \Rightarrow \Delta, \Sigma, \Xi}$$

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: (Mix) o głębokości $< n$ jest eliminowalny.

e) przypadki gdy cut-formuła jest formułą przesłankową reguły zastosowanej do prawego sekwentu-przesłanki:

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: (Mix) o głębokości $< n$ jest eliminowalny.

e) przypadki gdy cut-formuła jest formułą przesłankową reguły zastosowanej do prawego sekwentu-przesłanki:
przypadek $(\Rightarrow\rightarrow)$ – fragment dowodu o postaci:

$$(Mix)\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi^i \qquad \dfrac{\varphi^k, \Pi \Rightarrow \Sigma, \psi}{\varphi^{k-1}, \Pi \Rightarrow \Sigma, \varphi \rightarrow \psi}\ (\Rightarrow\rightarrow)}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma, \varphi \rightarrow \psi}$$

$$\begin{array}{r c}
(Mix) & \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi^i \qquad \varphi^k, \Pi \Rightarrow \Sigma, \psi}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma, \psi} \\
(W \Rightarrow) & \dfrac{}{\varphi, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma, \psi} \\
(\Rightarrow\rightarrow) & \dfrac{}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma, \varphi \rightarrow \psi}
\end{array}$$

analogicznie dla pozostałych reguł 1-przesłankowych.

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: (Mix) o głębokości $< n$ jest eliminowalny.

2-przesłankowe reguły: przypadek $(\rightarrow\Rightarrow)$ – frg. dowodu o postaci:

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: (Mix) o głębokości $< n$ jest eliminowalny.

2-przesłankowe reguły: przypadek $(\to\Rightarrow)$ – frg. dowodu o postaci:

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi^i \qquad \dfrac{\Pi \Rightarrow \Sigma, \psi \qquad \varphi, \Lambda \Rightarrow \Xi}{\psi \to \varphi, \Pi, \Lambda \Rightarrow \Sigma, \Xi}\,(\to\Rightarrow)}{\Gamma, \psi \to \varphi, \Pi^\star, \Lambda^\star \Rightarrow \Delta, \Sigma, \Xi}\,(Mix)$$

jeżeli φ nie jest w Π ($\Pi^\star = \Pi$), to zostaje zastąpiony przez:

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: (Mix) o głębokości $< n$ jest eliminowalny.

2-przesłankowe reguły: przypadek $(\rightarrow\Rightarrow)$ – frg. dowodu o postaci:

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi^i \qquad \dfrac{\Pi \Rightarrow \Sigma, \psi \qquad \varphi, \Lambda \Rightarrow \Xi}{\psi \rightarrow \varphi, \Pi, \Lambda \Rightarrow \Sigma, \Xi}\,(\rightarrow\Rightarrow)}{\Gamma, \psi \rightarrow \varphi, \Pi^\star, \Lambda^\star \Rightarrow \Delta, \Sigma, \Xi}\,(Mix)$$

jeżeli φ nie jest w Π ($\Pi^\star = \Pi$), to zostaje zastąpiony przez:

$$\dfrac{\dfrac{\Pi \Rightarrow \Sigma, \psi \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi^i \qquad \varphi, \Lambda \Rightarrow \Xi}{\Gamma, \Lambda^\star, \Rightarrow \Delta, \Xi}\,(Mix)}{\varphi, \Gamma, \Lambda^\star, \Rightarrow \Delta, \Xi}\,(W\Rightarrow)}{\psi \rightarrow \varphi, \Pi, \Gamma, \Lambda^\star \Rightarrow \Sigma, \Delta, \Xi}\,(\rightarrow\Rightarrow)}{\Gamma, \psi \rightarrow \varphi, \Pi^\star, \Lambda^\star \Rightarrow \Delta, \Sigma, \Xi}\,(P)$$

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: (Mix) o głębokości $< n$ jest eliminowalny.

jeżeli φ jest w Π, to zostaje zastąpiony przez:

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: (Mix) o głębokości $< n$ jest eliminowalny.

jeżeli φ jest w Π, to zostaje zastąpiony przez:

$$
\dfrac{\dfrac{(Mix)\,\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi^i \qquad \Pi \Rightarrow \Sigma, \psi}{\Gamma, \Pi^\star \Rightarrow \Delta, \Sigma, \psi} \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi^i \qquad \varphi, \Lambda \Rightarrow \Xi}{\Gamma, \Lambda^\star, \Rightarrow \Delta, \Xi}\,(Mix)}{\varphi, \Gamma, \Lambda^\star, \Rightarrow \Delta, \Xi}\,(W \Rightarrow)}{\psi \to \varphi, \Gamma, \Pi^\star, \Gamma, \Lambda^\star \Rightarrow \Delta, \Sigma, \Delta, \Xi}\,(\to\Rightarrow)}{\Gamma, \psi \to \varphi, \Pi^\star, \Lambda^\star \Rightarrow \Delta, \Sigma, \Xi}\,(P)(C)
$$

przypadek $(\vee \Rightarrow)$ analogicznie.

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: (Mix) o głębokości $< n$ jest eliminowalny.

f) przypadki gdy cut-formuła jest formułą główną reguły zastosowanej do prawego sekwentu-przesłanki:

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: (Mix) o głębokości $< n$ jest eliminowalny.

f) przypadki gdy cut-formuła jest formułą główną reguły zastosowanej do prawego sekwentu-przesłanki:
przypadek ($\Rightarrow\rightarrow$) – fragment dowodu o postaci:

$$(Mix)\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi^i \qquad \dfrac{\varphi^k, \Pi \Rightarrow \Sigma, \psi}{\varphi^{k-1}, \Pi \Rightarrow \Sigma, \varphi \rightarrow \psi}\,(\Rightarrow\rightarrow)}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma, \varphi \rightarrow \psi}$$

$$(\Rightarrow\rightarrow)\ \dfrac{(W\Rightarrow)\ \dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi^i \qquad \varphi^k, \Pi \Rightarrow \Sigma, \psi}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma, \psi}\,(Mix)}{\varphi, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma, \psi}}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma, \varphi \rightarrow \psi}$$

analogicznie dla pozostałych reguł 1-przesłankowych.

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: j.w.

reguły 2-przesłankowe – przypadek ($\vee \Rightarrow$): frg. postaci:

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: j.w.

reguły 2-przesłankowe – przypadek $(\vee \Rightarrow)$: frg. postaci:

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi^{i} \qquad \dfrac{\varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma \qquad \psi, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\varphi \vee \psi, \Pi \Rightarrow \Sigma}\,(\vee \Rightarrow)}{\Gamma, \Pi^{\star} \Rightarrow \Delta, \Sigma}\,(Mix)$$

$$\dfrac{S_L \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi^{i} \qquad \varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \varphi, \Pi^{\star} \Rightarrow \Delta, \Sigma}}{\varphi, \Gamma, \Pi^{\star} \Rightarrow \Delta, \Sigma} \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi^{i} \qquad \psi, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \psi, \Pi^{\star} \Rightarrow \Delta, \Sigma}}{\psi, \Gamma, \Pi^{\star} \Rightarrow \Delta, \Sigma}\,(P \Rightarrow)}{\varphi \vee \psi, \Gamma, \Pi^{\star} \Rightarrow \Delta, \Sigma}\,(\vee \Rightarrow)}{\dfrac{\Gamma, \Gamma, \Pi^{\star} \Rightarrow \Delta, \Delta, \Sigma}{\Gamma, \Pi^{\star} \Rightarrow \Delta, \Sigma}\,(P)(C)}\,(Mix)$$

analogicznie dla $(\rightarrow\Rightarrow)$ – uwaga na podprzypadki! Analogicznie dowodzimy redukcji głębokości (Mix) przy założeniu, że LR ; 1

Eliminacja cięcia:

Niektóre konsekwencje eliminacji cięcia:

- dowód rozstrzygalności rachunku zdań w wersji klasycznej i intuicjonistycznej

Eliminacja cięcia:

Niektóre konsekwencje eliminacji cięcia:

- dowód rozstrzygalności rachunku zdań w wersji klasycznej i intuicjonistycznej
- dowód niesprzeczności logiki klasycznej i intuicjonistycznej

Eliminacja cięcia:

Niektóre konsekwencje eliminacji cięcia:

- dowód rozstrzygalności rachunku zdań w wersji klasycznej i intuicjonistycznej
- dowód niesprzeczności logiki klasycznej i intuicjonistycznej
- dowód niesprzeczności arytmetyki bez reguły indukcji

Eliminacja cięcia:

Niektóre konsekwencje eliminacji cięcia:

- dowód rozstrzygalności rachunku zdań w wersji klasycznej i intuicjonistycznej
- dowód niesprzeczności logiki klasycznej i intuicjonistycznej
- dowód niesprzeczności arytmetyki bez reguły indukcji
- dowód twierdzenia o interpolacji dla logiki klasycznej i intuicjonistycznej

Eliminacja cięcia:

Niektóre konsekwencje eliminacji cięcia:

- dowód rozstrzygalności rachunku zdań w wersji klasycznej i intuicjonistycznej
- dowód niesprzeczności logiki klasycznej i intuicjonistycznej
- dowód niesprzeczności arytmetyki bez reguły indukcji
- dowód twierdzenia o interpolacji dla logiki klasycznej i intuicjonistycznej

Twierdzenie o niesprzeczności LK: $\Rightarrow$ nie jest dowiedlne w LK.

Eliminacja cięcia:

Własność podformuł:

Większość wymienionych przez nas konsekwencji eliminacji cięcia jest pochodną tzw. *własności podformuł*. Wyróżnijmy 3 znaczenia:

Eliminacja cięcia:

Własność podformuł:

Większość wymienionych przez nas konsekwencji eliminacji cięcia jest pochodną tzw. *własności podformuł*. Wyróżnijmy 3 znaczenia:

1. Reguła posiada tę własność wtedy gdy w sekwentach-przesłankach występują tylko podformuły formuł z sekwentu-wniosku.

Eliminacja cięcia:

Własność podformuł:

Większość wymienionych przez nas konsekwencji eliminacji cięcia jest pochodną tzw. *własności podformuł*. Wyróżnijmy 3 znaczenia:

1. Reguła posiada tę własność wtedy gdy w sekwentach-przesłankach występują tylko podformuły formuł z sekwentu-wniosku.
2. System RS posiada tę własność wtedy gdy każda reguła ją posiada.

Eliminacja cięcia:

Własność podformuł:

Większość wymienionych przez nas konsekwencji eliminacji cięcia jest pochodną tzw. *własności podformuł*. Wyróżnijmy 3 znaczenia:

1. Reguła posiada tę własność wtedy gdy w sekwentach-przesłankach występują tylko podformuły formuł z sekwentu-wniosku.
2. System RS posiada tę własność wtedy gdy każda reguła ją posiada.
3. Dowód sekwentu S posiada własność podformuł wtedy gdy wszystkie sekwenty w nim występujące składają się tylko z podformuł S.

Eliminacja cięcia:

Własność podformuł:

Większość wymienionych przez nas konsekwencji eliminacji cięcia jest pochodną tzw. *własności podformuł*. Wyróżnijmy 3 znaczenia:

1. Reguła posiada tę własność wtedy gdy w sekwentach-przesłankach występują tylko podformuły formuł z sekwentu-wniosku.
2. System RS posiada tę własność wtedy gdy każda reguła ją posiada.
3. Dowód sekwentu S posiada własność podformuł wtedy gdy wszystkie sekwenty w nim występujące składają się tylko z podformuł S.

Uwaga: jeżeli system RS ma własność podformuł, to i każdy dowód w tym systemie ją posiada, ale nie odwrotnie.

Eliminacja cięcia:

Różne znaczenia analityczności:

Eliminacja cięcia:

Różne znaczenia analityczności:

- Euklidesowe – dowód przez równoważnościowe przekształcenia

Eliminacja cięcia:

Różne znaczenia analityczności:

- Euklidesowe – dowód przez równoważnościowe przekształcenia
- Kartezjańskie – rozwiązanie problemu sprowadzalne do rozwiązania podproblemów

Eliminacja cięcia:

Różne znaczenia analityczności:

- Euklidesowe – dowód przez równoważnościowe przekształcenia
- Kartezjańskie – rozwiązanie problemu sprowadzalne do rozwiązania podproblemów
- teoriodowodowe – dowód jest prowadzony od tyłu (od twierdzenia do aksjomatów)

Eliminacja cięcia:

Różne znaczenia analityczności:

- Euklidesowe – dowód przez równoważnościowe przekształcenia
- Kartezjańskie – rozwiązanie problemu sprowadzalne do rozwiązania podproblemów
- teoriodowodowe – dowód jest prowadzony od tyłu (od twierdzenia do aksjomatów)
- metodologiczne (w RS) – reguła cięcia jest eliminowalna

Eliminacja cięcia:

Różne znaczenia analityczności:

- Euklidesowe – dowód przez równoważnościowe przekształcenia
- Kartezjańskie – rozwiązanie problemu sprowadzalne do rozwiązania podproblemów
- teoriodowodowe – dowód jest prowadzony od tyłu (od twierdzenia do aksjomatów)
- metodologiczne (w RS) – reguła cięcia jest eliminowalna
- met. (w RS, Tab) – wszystkie reguły systemu mają własność podformuł

Eliminacja cięcia:

Różne znaczenia analityczności:

- Euklidesowe – dowód przez równoważnościowe przekształcenia
- Kartezjańskie – rozwiązanie problemu sprowadzalne do rozwiązania podproblemów
- teoriodowodowe – dowód jest prowadzony od tyłu (od twierdzenia do aksjomatów)
- metodologiczne (w RS) – reguła cięcia jest eliminowalna
- met. (w RS, Tab) – wszystkie reguły systemu mają własność podformuł
- met. (w Tab) – wszystkie reguły są regułami eliminacji

Eliminacja cięcia:

Różne znaczenia analityczności:

- Euklidesowe – dowód przez równoważnościowe przekształcenia
- Kartezjańskie – rozwiązanie problemu sprowadzalne do rozwiązania podproblemów
- teoriodowodowe – dowód jest prowadzony od tyłu (od twierdzenia do aksjomatów)
- metodologiczne (w RS) – reguła cięcia jest eliminowalna
- met. (w RS, Tab) – wszystkie reguły systemu mają własność podformuł
- met. (w Tab) – wszystkie reguły są regułami eliminacji
- met. (w RS, DN) – stosowalność reguł jest ograniczona do wyznaczonego zbioru formuł (np. zbioru podformuł dowodzonej formuły)

Eliminacja cięcia:

Własność podformuł a analityczność:

Przyjmijmy następujące definicje:

Eliminacja cięcia:

Własność podformuł a analityczność:

Przyjmijmy następujące definicje:

1. System RS, w którym stosowalność reguł w dowodzie jest ograniczona do wyznaczonego zbioru formuł (np. zbioru podformuł dowodzonego sekwentu lub jakiegoś dobrze zdefiniowanego ich nadzbioru) jest *(słabo) analityczny*.

Eliminacja cięcia:

Własność podformuł a analityczność:

Przyjmijmy następujące definicje:

1. System RS, w którym stosowalność reguł w dowodzie jest ograniczona do wyznaczonego zbioru formuł (np. zbioru podformuł dowodzonego sekwentu lub jakiegoś dobrze zdefiniowanego ich nadzbioru) jest *(słabo) analityczny*.
2. System RS, który posiada własność podformuł będziemy określać jako *ściśle analityczny*.

Eliminacja cięcia:

Własność podformuł a analityczność:

Przyjmijmy następujące definicje:

1. System RS, w którym stosowalność reguł w dowodzie jest ograniczona do wyznaczonego zbioru formuł (np. zbioru podformuł dowodzonego sekwentu lub jakiegoś dobrze zdefiniowanego ich nadzbioru) jest *(słabo) analityczny*.
2. System RS, który posiada własność podformuł będziemy określać jako *ściśle analityczny*.

Uwaga1: System RS, w którym każdy dowód posiada własność podformuł jest (słabo) analityczny.

Rozstrzygalność:

Preliminaria – Uogólnienie pojęcia dowodu:

Rozstrzygalność:

Preliminaria – Uogólnienie pojęcia dowodu:

- Drzewo, w którym niekoniecznie każdy liść jest sekwentem aksjomatycznym, ale które spełnia pozostałe dwa warunki definicji dowodu, to *dedukcja sekwentu* S.

Rozstrzygalność:

Preliminaria – Uogólnienie pojęcia dowodu:

- Drzewo, w którym niekoniecznie każdy liść jest sekwentem aksjomatycznym, ale które spełnia pozostałe dwa warunki definicji dowodu, to *dedukcja sekwentu* S.
- Niech $\mathcal{D}$ będzie dedukcją S, a X oznacza zbiór wszystkich liści drzewa $\mathcal{D}$, które nie są sekwentami aksjomatycznymi, wtedy $\mathcal{D}$ jest dedukcją S z X ($X \vdash$ S).

Rozstrzygalność:

Preliminaria – Uogólnienie pojęcia dowodu:

- Drzewo, w którym niekoniecznie każdy liść jest sekwentem aksjomatycznym, ale które spełnia pozostałe dwa warunki definicji dowodu, to *dedukcja sekwentu* S.
- Niech $\mathcal{D}$ będzie dedukcją S, a X oznacza zbiór wszystkich liści drzewa $\mathcal{D}$, które nie są sekwentami aksjomatycznymi, wtedy $\mathcal{D}$ jest dedukcją S z X ($X \vdash$ S).

Uwaga: W szczególności dedukcja z pustym X jest dowodem S.

Rozstrzygalność:

Preliminaria – drzewo dowodowe sekwentu S

Rozstrzygalność:

Preliminaria – drzewo dowodowe sekwentu S

1. Każde jednoelementowe drzewo, którego węzeł jest sekwentem S jest *drzewem dowodowym sekwentu S*.

Rozstrzygalność:

Preliminaria – drzewo dowodowe sekwentu S

1. Każde jednoelementowe drzewo, którego węzeł jest sekwentem S jest *drzewem dowodowym sekwentu S*.
2. Jeżeli S' jest nieatomowym liściem w drzewie dowodowym sekwentu S, to drzewo uzyskane przez dopisanie sekwentu T powyżej sekwentu S' jest drzewem dowodowym sekwentu S, pod warunkiem, że T jest podstawieniem przesłanki a S' jest podstawieniem wniosku jednej z reguł jednoprzesłankowych.

Rozstrzygalność:

Preliminaria – drzewo dowodowe sekwentu S

1. Każde jednoelementowe drzewo, którego węzeł jest sekwentem S jest *drzewem dowodowym sekwentu S*.
2. Jeżeli S' jest nieatomowym liściem w drzewie dowodowym sekwentu S, to drzewo uzyskane przez dopisanie sekwentu T powyżej sekwentu S' jest drzewem dowodowym sekwentu S, pod warunkiem, że T jest podstawieniem przesłanki a S' jest podstawieniem wniosku jednej z reguł jednoprzesłankowych.
3. Jeżeli S' jest nieatomowym liściem w drzewie dowodowym sekwentu S, to drzewo uzyskane przez dopisanie sekwentów T i T' powyżej sekwentu S' jest drzewem dowodowym sekwentu S, pod warunkiem, że T jest podstawieniem lewej przesłanki, T' jest podstawieniem prawej przesłanki, a S' jest podstawieniem wniosku jednej z reguł dwuprzesłankowych.

Rozstrzygalność:

Preliminaria – drzewo dowodowe sekwentu S

1. Każde jednoelementowe drzewo, którego węzeł jest sekwentem S jest *drzewem dowodowym sekwentu S*.
2. Jeżeli S' jest nieatomowym liściem w drzewie dowodowym sekwentu S, to drzewo uzyskane przez dopisanie sekwentu T powyżej sekwentu S' jest drzewem dowodowym sekwentu S, pod warunkiem, że T jest podstawieniem przesłanki a S' jest podstawieniem wniosku jednej z reguł jednoprzesłankowych.
3. Jeżeli S' jest nieatomowym liściem w drzewie dowodowym sekwentu S, to drzewo uzyskane przez dopisanie sekwentów T i T' powyżej sekwentu S' jest drzewem dowodowym sekwentu S, pod warunkiem, że T jest podstawieniem lewej przesłanki, T' jest podstawieniem prawej przesłanki, a S' jest podstawieniem wniosku jednej z reguł dwuprzesłankowych.
4. Nic więcej nie jest drzewem dowodowym sekwentu S.

Rozstrzygalność:

Preliminaria – dowód/dedukcja S a drzewo dowodowe S:

Rozstrzygalność:

Preliminaria – dowód/dedukcja S a drzewo dowodowe S:

Oba pojęcia są wprowadzone indukcyjnymi definicjami szczególnego rodzaju drzew, jednak budowanymi w różny sposób. Definicja dowodu/dedukcji zaczyna od liści i pokazuje jak dojść do korzenia, natomiast definicja drzewa dowodowego zaczyna od korzenia i pokazuje jak dojść do liści.

Rozstrzygalność:

Preliminaria – dowód/dedukcja S a drzewo dowodowe S:

Oba pojęcia są wprowadzone indukcyjnymi definicjami szczególnego rodzaju drzew, jednak budowanymi w różny sposób. Definicja dowodu/dedukcji zaczyna od liści i pokazuje jak dojść do korzenia, natomiast definicja drzewa dowodowego zaczyna od korzenia i pokazuje jak dojść do liści.

Definicja taka jest przydatniejsza jako podstawa dla stosowania indukcji wstępującej po gałęziach konstruowanego drzewa. Zależność między dwoma ujęciami oddaje poniższy:

Rozstrzygalność:

Preliminaria – dowód/dedukcja S a drzewo dowodowe S:

Oba pojęcia są wprowadzone indukcyjnymi definicjami szczególnego rodzaju drzew, jednak budowanymi w różny sposób. Definicja dowodu/dedukcji zaczyna od liści i pokazuje jak dojść do korzenia, natomiast definicja drzewa dowodowego zaczyna od korzenia i pokazuje jak dojść do liści.

Definicja taka jest przydatniejsza jako podstawa dla stosowania indukcji wstępującej po gałęziach konstruowanego drzewa. Zależność między dwoma ujęciami oddaje poniższy:

Fakt15: $\mathcal{D}$ jest dedukcją S z X wtw $\mathcal{D}$ jest drzewem dowodowym sekwentu S, w którym X jest podzbiorem zbioru liści.

Rozstrzygalność:

Drzewa dowodowe kompletne:

Rozstrzygalność:

Drzewa dowodowe kompletne:

to drzewa dowodowe, w których każdy liść jest sekwentem atomowym. Dla drzew dowodowych zachodzi ważny:

Rozstrzygalność:

Drzewa dowodowe kompletne:

to drzewa dowodowe, w których każdy liść jest sekwentem atomowym. Dla drzew dowodowych zachodzi ważny:

Lemat16: Każde drzewo dowodowe sekwentu S można poszerzyć do drzewa kompletnego

Rozstrzygalność:

Drzewa dowodowe kompletne:

to drzewa dowodowe, w których każdy liść jest sekwentem atomowym. Dla drzew dowodowych zachodzi ważny:

Lemat16: Każde drzewo dowodowe sekwentu S można poszerzyć do drzewa kompletnego

Dowód: Wystarczy zawsze wybierać pierwszy od lewej nieatomowy sekwent-liść i stosować do niego logiczną regułę (po ewentualnych permutacjach) do pierwszej od lewej nieatomowej formuły. Własność podformuł zapewnia skończoność takiej procedury.

Rozstrzygalność:

Drzewa dowodowe kompletne:

to drzewa dowodowe, w których każdy liść jest sekwentem atomowym. Dla drzew dowodowych zachodzi ważny:

Lemat16: Każde drzewo dowodowe sekwentu S można poszerzyć do drzewa kompletnego

Dowód: Wystarczy zawsze wybierać pierwszy od lewej nieatomowy sekwent-liść i stosować do niego logiczną regułę (po ewentualnych permutacjach) do pierwszej od lewej nieatomowej formuły. Własność podformuł zapewnia skończoność takiej procedury.

Prostą konsekwencją powyższego lematu jest:

Rozstrzygalność:

Drzewa dowodowe kompletne:

to drzewa dowodowe, w których każdy liść jest sekwentem atomowym. Dla drzew dowodowych zachodzi ważny:

Lemat16: Każde drzewo dowodowe sekwentu S można poszerzyć do drzewa kompletnego

Dowód: Wystarczy zawsze wybierać pierwszy od lewej nieatomowy sekwent-liść i stosować do niego logiczną regułę (po ewentualnych permutacjach) do pierwszej od lewej nieatomowej formuły. Własność podformuł zapewnia skończoność takiej procedury.

Prostą konsekwencją powyższego lematu jest:

Fakt17: Każde kompletne drzewo dowodowe sekwentu S jest dowodem S albo dedukcją S z niepustego zbioru atomowych (nieaksjomatycznych) sekwentów X.

Rozstrzygalność:

Zbieżność

System RS jest zbieżny (confluent) wtw, jeżeli sekwent jest dowiedlny, to dowolne drzewo dowodowe z tym sekwentem jako korzeniem można poszerzyć tak, że uzyskamy dowód tego sekwentu.

Rozstrzygalność:

Zbieżność

System RS jest zbieżny (confluent) wtw, jeżeli sekwent jest dowiedlny, to dowolne drzewo dowodowe z tym sekwentem jako korzeniem można poszerzyć tak, że uzyskamy dowód tego sekwentu.

LK nawet bez (Cut) jest niezbieżne. Przyczyną braku zbieżności LK jest występowanie kontrakcji, osłabiania, G-reguły ($\Rightarrow \vee$) i ($\wedge \Rightarrow$) oraz k-niezależna reguła ($\rightarrow\Rightarrow$).

Rozstrzygalność:

Zbieżność

System RS jest zbieżny (confluent) wtw, jeżeli sekwent jest dowiedlny, to dowolne drzewo dowodowe z tym sekwentem jako korzeniem można poszerzyć tak, że uzyskamy dowód tego sekwentu.

LK nawet bez (Cut) jest niezbieżne. Przyczyną braku zbieżności LK jest występowanie kontrakcji, osłabiania, G-reguły $(\Rightarrow \vee)$ i $(\wedge \Rightarrow)$ oraz k-niezależna reguła $(\rightarrow\Rightarrow)$.

Uwaga: W LK w rezultacie braku zbieżności mimo iż S jest dowiedlne, to można otrzymać jego drzewo dowodowe, które nie jest dowodem S.

Rozstrzygalność:

Zbieżność

Dla LK-K bez (Cut) zachodzi zbieżność:

Rozstrzygalność:

Zbieżność

Dla LK-K bez (Cut) zachodzi zbieżność:

Lemat18: Jeżeli S jest dowiedlne w LK-K, to każde drzewo dowodowe sekwentu S można poszerzyć do dowodu S w LK-K.

Rozstrzygalność:

Zbieżność

Dla LK-K bez (Cut) zachodzi zbieżność:

Lemat18: Jeżeli S jest dowiedlne w LK-K, to każde drzewo dowodowe sekwentu S można poszerzyć do dowodu S w LK-K.

Konsekwencją powyższych jest:

Rozstrzygalność:

Zbieżność

Dla LK-K bez (Cut) zachodzi zbieżność:

Lemat18: Jeżeli S jest dowiedlne w LK-K, to każde drzewo dowodowe sekwentu S można poszerzyć do dowodu S w LK-K.

Konsekwencją powyższych jest:

Twierdzenie19: O rozstrzygalności dla LK-K: Dla dowolnego S w skończony sposób można wykazać, że jest dowiedlne lub dowodu nie posiada.

Rozstrzygalność:

Zbieżność

Dla LK-K bez (Cut) zachodzi zbieżność:

Lemat18: Jeżeli S jest dowiedlne w LK-K, to każde drzewo dowodowe sekwentu S można poszerzyć do dowodu S w LK-K.

Konsekwencją powyższych jest:

Twierdzenie19: O rozstrzygalności dla LK-K: Dla dowolnego S w skończony sposób można wykazać, że jest dowiedlne lub dowodu nie posiada.

Uwaga: Dla LK też można dowieść rozstrzygalności ale wymaga to uwzględnienia konieczności "backtrackingu" – rozważania różnych poszerzeń danego drzewa dowodowego.