METALOGIKA

Andrzej Indrzejczak

Katedra Logiki i Metodologii Nauk UŁ

Łódź, semestr letni 2009/2010

Analityczny System RS

Reguły:

$(AX)\quad \Gamma, \varphi \Rightarrow \varphi, \Delta$

$(\neg\Rightarrow)\quad \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}{\neg\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ $\qquad (\Rightarrow\neg)\quad \dfrac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\varphi}$

$(\wedge\Rightarrow)\quad \dfrac{\varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi\wedge\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ $\qquad (\Rightarrow\wedge)\quad \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi\wedge\psi}$

$(\Rightarrow\vee)\quad \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi\vee\psi}$ $\qquad (\vee\Rightarrow)\quad \dfrac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi\vee\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$

$(\Rightarrow\rightarrow)\quad \dfrac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi\rightarrow\psi}$ $\qquad (\rightarrow\Rightarrow)\quad \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi\rightarrow\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$

Analityczny System RS

Reguły:

(AX) $\Gamma, \varphi \Rightarrow \varphi, \Delta$

$(\neg\Rightarrow)$ $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}{\neg\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ $(\Rightarrow\neg)$ $\dfrac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\varphi}$

$(\wedge\Rightarrow)$ $\dfrac{\varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi\wedge\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ $(\Rightarrow\wedge)$ $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi\wedge\psi}$

$(\Rightarrow\vee)$ $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi\vee\psi}$ $(\vee\Rightarrow)$ $\dfrac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi\vee\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$

$(\Rightarrow\to)$ $\dfrac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi\to\psi}$ $(\to\Rightarrow)$ $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi\to\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$

Uwaga1: brak jest reguł strukturalnych ale Γ, Δ oznaczają zbiory.

Analityczny System RS

Reguły:

(AX) $\Gamma, \varphi \Rightarrow \varphi, \Delta$

$(\neg\Rightarrow)\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}{\neg\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ $\qquad (\Rightarrow\neg)\ \dfrac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\varphi}$

$(\wedge\Rightarrow)\ \dfrac{\varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi\wedge\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ $\qquad (\Rightarrow\wedge)\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi\wedge\psi}$

$(\Rightarrow\vee)\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi\vee\psi}$ $\qquad (\vee\Rightarrow)\ \dfrac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi\vee\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$

$(\Rightarrow\to)\ \dfrac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi\to\psi}$ $\qquad (\to\Rightarrow)\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi\to\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$

Uwaga1: brak jest reguł strukturalnych ale Γ, Δ oznaczają zbiory.
Uwaga2: definicje dowodu, dedukcji itp. bez zmian.

Analityczny System RS

Definicja długości dowodu:

Analityczny System RS

Definicja długości dowodu:

- Dowód aksjomatu ma długość 0

Analityczny System RS

Definicja długości dowodu:

- Dowód aksjomatu ma długość 0
- jeżeli S został wydedukowany z S' za pomocą reguły 1-przesłankowej, to jeżeli dowód S' ma długość n, to dowód S ma długość $n + 1$

Analityczny System RS

Definicja długości dowodu:

- Dowód aksjomatu ma długość 0
- jeżeli S został wydedukowany z S' za pomocą reguły 1-przesłankowej, to jeżeli dowód S' ma długość n, to dowód S ma długość $n + 1$
- jeżeli S został wydedukowany z S'i S" za pomocą reguły 2-przesłankowej, to jeżeli dowód S' ma długość n a dowód S" ma długość m, to dowód S ma długość $Max(n, m) + 1$

Analityczny System RS

Wybrane własności ARS:

Analityczny System RS

Wybrane własności ARS:

Twierdzenie20 (Przystosowanie): Jeżeli $\vdash_{ARS} \Gamma \Rightarrow \Delta$, to $\models \Gamma \Rightarrow \Delta$.

Analityczny System RS

Wybrane własności ARS:

Twierdzenie20 (Przystosowanie): Jeżeli $\vdash_{ARS} \Gamma \Rightarrow \Delta$, to $\models \Gamma \Rightarrow \Delta$.

Lemat21 (Dopuszczalność osłabiania): Jeżeli $\vdash_{ARS} \Gamma' \Rightarrow \Delta'$, to $\vdash_{ARS} \Gamma \Rightarrow \Delta$, dla $\Gamma' \subseteq \Gamma$, $\Delta' \subseteq \Delta$, ponadto długość dowodu nie jest większa.

Analityczny System RS

Wybrane własności ARS:

Twierdzenie20 (Przystosowanie): Jeżeli $\vdash_{ARS} \Gamma \Rightarrow \Delta$, to $\models \Gamma \Rightarrow \Delta$.

Lemat21 (Dopuszczalność osłabiania): Jeżeli $\vdash_{ARS} \Gamma' \Rightarrow \Delta'$, to $\vdash_{ARS} \Gamma \Rightarrow \Delta$, dla $\Gamma' \subseteq \Gamma$, $\Delta' \subseteq \Delta$, ponadto długość dowodu nie jest większa.

Lemat22 (Odwracalność reguł): Dla każdej reguły, jeżeli wniosek ma dowód (długości n), to przesłanki też mają dowody (długości $\leq n$).

Analityczny System RS

Wybrane własności ARS:

Twierdzenie20 (Przystosowanie): Jeżeli $\vdash_{ARS} \Gamma \Rightarrow \Delta$, to $\models \Gamma \Rightarrow \Delta$.

Lemat21 (Dopuszczalność osłabiania): Jeżeli $\vdash_{ARS} \Gamma' \Rightarrow \Delta'$, to $\vdash_{ARS} \Gamma \Rightarrow \Delta$, dla $\Gamma' \subseteq \Gamma$, $\Delta' \subseteq \Delta$, ponadto długość dowodu nie jest większa.

Lemat22 (Odwracalność reguł): Dla każdej reguły, jeżeli wniosek ma dowód (długości n), to przesłanki też mają dowody (długości $\leq n$).

Uwaga1: Nie możemy skorzystać z Lematu o odwracalności reguł dla LK-K, bo tamten był dowiedziony przy użyciu (Cut).

Analityczny System RS

Wybrane własności ARS:

Twierdzenie20 (Przystosowanie): Jeżeli $\vdash_{ARS} \Gamma \Rightarrow \Delta$, to $\models \Gamma \Rightarrow \Delta$.

Lemat21 (Dopuszczalność osłabiania): Jeżeli $\vdash_{ARS} \Gamma' \Rightarrow \Delta'$, to $\vdash_{ARS} \Gamma \Rightarrow \Delta$, dla $\Gamma' \subseteq \Gamma$, $\Delta' \subseteq \Delta$, ponadto długość dowodu nie jest większa.

Lemat22 (Odwracalność reguł): Dla każdej reguły, jeżeli wniosek ma dowód (długości n), to przesłanki też mają dowody (długości $\leq n$).

Uwaga1: Nie możemy skorzystać z Lematu o odwracalności reguł dla LK-K, bo tamten był dowiedziony przy użyciu (Cut).
Uwaga2: Dla obu lematów przeprowadzimy dowód indukcyjny po długości dowodu.

Analityczny System RS

Dopuszczalność osłabiania w ARS:

Analityczny System RS

Dopuszczalność osłabiania w ARS:

Dowód indukcyjny po długości dowodu $\Gamma' \Rightarrow \Delta'$.

Analityczny System RS

Dopuszczalność osłabiania w ARS:

Dowód indukcyjny po długości dowodu $\Gamma' \Rightarrow \Delta'$.
Baza: Dowód $\Gamma' \Rightarrow \Delta'$ ma długość 0, zatem jest to aksjomat.
Więc $\Gamma \Rightarrow \Delta$ też jest aksjomatem o dowodzie długości 0.

Analityczny System RS

Dopuszczalność osłabiania w ARS:

Dowód indukcyjny po długości dowodu $\Gamma' \Rightarrow \Delta'$.
Baza: Dowód $\Gamma' \Rightarrow \Delta'$ ma długość 0, zatem jest to aksjomat.
Więc $\Gamma \Rightarrow \Delta$ też jest aksjomatem o dowodzie długości 0.
Założenie indukcyjne mówi, że lemat zachodzi dla dowolnego dowodu $\Gamma' \Rightarrow \Delta'$ o długości $< n$. Pokazujemy, że zajdzie również gdy dowód ma długość n.

Analityczny System RS

Dopuszczalność osłabiania w ARS:

Dowód indukcyjny po długości dowodu $\Gamma' \Rightarrow \Delta'$.
Baza: Dowód $\Gamma' \Rightarrow \Delta'$ ma długość 0, zatem jest to aksjomat.
Więc $\Gamma \Rightarrow \Delta$ też jest aksjomatem o dowodzie długości 0.
Założenie indukcyjne mówi, że lemat zachodzi dla dowolnego dowodu $\Gamma' \Rightarrow \Delta'$ o długości $< n$. Pokazujemy, że zajdzie również gdy dowód ma długość n.
Musimy rozważyć przypadki zastosowania wszystkich reguł do uzyskania $\Gamma' \Rightarrow \Delta'$.

Analityczny System RS

Dopuszczalność osłabiania w ARS:

Analityczny System RS

Dopuszczalność osłabiania w ARS:

Rozważmy przypadek ($\wedge \Rightarrow$).

Analityczny System RS

Dopuszczalność osłabiania w ARS:

Rozważmy przypadek ($\wedge \Rightarrow$).

Mamy zatem dowód $\mathcal{D}$ długości n zakończony sekwentem $\varphi \wedge \psi, \Gamma'' \Rightarrow \Delta' := \Gamma' \Rightarrow \Delta'$ ($\Gamma' = \Gamma'' \cup \{\varphi \wedge \psi\}$).

Analityczny System RS

Dopuszczalność osłabiania w ARS:

Rozważmy przypadek $(\wedge \Rightarrow)$.

Mamy zatem dowód $\mathcal{D}$ długości n zakończony sekwentem $\varphi \wedge \psi, \Gamma'' \Rightarrow \Delta' := \Gamma' \Rightarrow \Delta'$ $(\Gamma' = \Gamma'' \cup \{\varphi \wedge \psi\})$.
Przesłanka $\varphi, \psi, \Gamma'' \Rightarrow \Delta'$ ma dowód długości $n-1$ zatem podpada pod założenie indukcyjne, czyli $\varphi, \psi, \Gamma'', \Pi \Rightarrow \Delta$, gdzie $\Pi = \Gamma - \Gamma'$, ma dowód tej samej długości, tj. $n-1$.

Analityczny System RS

Dopuszczalność osłabiania w ARS:

Rozważmy przypadek $(\wedge \Rightarrow)$.

Mamy zatem dowód $\mathcal{D}$ długości n zakończony sekwentem $\varphi \wedge \psi, \Gamma'' \Rightarrow \Delta' := \Gamma' \Rightarrow \Delta'$ $(\Gamma' = \Gamma'' \cup \{\varphi \wedge \psi\})$.
Przesłanka $\varphi, \psi, \Gamma'' \Rightarrow \Delta'$ ma dowód długości $n-1$ zatem podpada pod założenie indukcyjne, czyli $\varphi, \psi, \Gamma'', \Pi \Rightarrow \Delta$, gdzie $\Pi = \Gamma - \Gamma'$, ma dowód tej samej długości, tj. $n-1$.
Przez $(\wedge \Rightarrow)$ otrzymujemy $\varphi \wedge \psi, \Gamma'', \Pi \Rightarrow \Delta := \Gamma \Rightarrow \Delta$; dowód ma długość n.

Analityczny System RS

Dopuszczalność osłabiania w ARS:

Rozważmy przypadek $(\wedge \Rightarrow)$.

Mamy zatem dowód $\mathcal{D}$ długości n zakończony sekwentem $\varphi \wedge \psi, \Gamma'' \Rightarrow \Delta' := \Gamma' \Rightarrow \Delta'$ $(\Gamma' = \Gamma'' \cup \{\varphi \wedge \psi\})$.
Przesłanka $\varphi, \psi, \Gamma'' \Rightarrow \Delta'$ ma dowód długości $n-1$ zatem podpada pod założenie indukcyjne, czyli $\varphi, \psi, \Gamma'', \Pi \Rightarrow \Delta$, gdzie $\Pi = \Gamma - \Gamma'$, ma dowód tej samej długości, tj. $n-1$.
Przez $(\wedge \Rightarrow)$ otrzymujemy $\varphi \wedge \psi, \Gamma'', \Pi \Rightarrow \Delta := \Gamma \Rightarrow \Delta$; dowód ma długość n.

Zadanie: dowieść inne przypadki.

Analityczny System RS

Odwracalność reguł w ARS:

Analityczny System RS

Odwracalność reguł w ARS:

Lemat22: Dla każdej reguły, jeżeli wniosek ma dowód (długości n), to przesłanki też mają dowody (długości $\leq n$).

Analityczny System RS

Odwracalność reguł w ARS:

Lemat22: Dla każdej reguły, jeżeli wniosek ma dowód (długości n), to przesłanki też mają dowody (długości $\leq n$).

Przeprowadzimy dowód indukcyjny po długości dowodu sekwentu-wniosku.

Analityczny System RS

Odwracalność reguł w ARS:

Lemat22: Dla każdej reguły, jeżeli wniosek ma dowód (długości n), to przesłanki też mają dowody (długości $\leq n$).

Przeprowadzimy dowód indukcyjny po długości dowodu sekwentu-wniosku.
Baza: Dowód ma długość 0, zatem jest to aksjomat. Niech to będzie np. $\Gamma, p \Rightarrow p, \Delta, \varphi \wedge \psi$, wtedy obie przesłanki mają postać $\Gamma, p \Rightarrow p, \Delta, \varphi$ i $\Gamma, p \Rightarrow p, \Delta, \psi$ i obie są dowiedlne (jako aksjomaty).

Analityczny System RS

Odwracalność reguł w ARS:

Lemat22: Dla każdej reguły, jeżeli wniosek ma dowód (długości n), to przesłanki też mają dowody (długości $\leq n$).

Przeprowadzimy dowód indukcyjny po długości dowodu sekwentu-wniosku.
Baza: Dowód ma długość 0, zatem jest to aksjomat. Niech to będzie np. $\Gamma, p \Rightarrow p, \Delta, \varphi \wedge \psi$, wtedy obie przesłanki mają postać $\Gamma, p \Rightarrow p, \Delta, \varphi$ i $\Gamma, p \Rightarrow p, \Delta, \psi$ i obie są dowiedlne (jako aksjomaty).
Analogicznie dla innych przypadków.

Analityczny System RS

Odwracalność reguł w ARS:

Lemat22: Dla każdej reguły, jeżeli wniosek ma dowód (długości n), to przesłanki też mają dowody (długości $\leq n$).

Przeprowadzimy dowód indukcyjny po długości dowodu sekwentu-wniosku.
Baza: Dowód ma długość 0, zatem jest to aksjomat. Niech to będzie np. $\Gamma, p \Rightarrow p, \Delta, \varphi \wedge \psi$, wtedy obie przesłanki mają postać $\Gamma, p \Rightarrow p, \Delta, \varphi$ i $\Gamma, p \Rightarrow p, \Delta, \psi$ i obie są dowiedlne (jako aksjomaty).
Analogicznie dla innych przypadków.
Założenie indukcyjne mówi, że lemat zachodzi dla dowolnego dowodu wniosku o długości $< n$. Pokazujemy, że zajdzie również gdy dowód ma długość n.

Analityczny System RS

Odwracalność reguł w ARS:

Rozważmy przypadek $(\wedge \Rightarrow)$.

Analityczny System RS

Odwracalność reguł w ARS:

Rozważmy przypadek $(\wedge \Rightarrow)$.
Mamy zatem dowód $\mathcal{D}$ długości n zakończony sekwentem $S := \varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$.

Analityczny System RS

Odwracalność reguł w ARS:

Rozważmy przypadek $(\wedge \Rightarrow)$.
Mamy zatem dowód $\mathcal{D}$ długości n zakończony sekwentem $S := \varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$.
Należy rozważyć 2 podprzypadki:

Analityczny System RS

Odwracalność reguł w ARS:

Rozważmy przypadek $(\wedge \Rightarrow)$.
Mamy zatem dowód $\mathcal{D}$ długości n zakończony sekwentem
$S := \varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$.
Należy rozważyć 2 podprzypadki:

a. $\varphi \wedge \psi$ jest formułą zasadniczą S

Analityczny System RS

Odwracalność reguł w ARS:

Rozważmy przypadek $(\wedge \Rightarrow)$.
Mamy zatem dowód $\mathcal{D}$ długości n zakończony sekwentem $S := \varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$.
Należy rozważyć 2 podprzypadki:

a. $\varphi \wedge \psi$ jest formułą zasadniczą S

b. $\varphi \wedge \psi$ nie jest formułą zasadniczą S

Analityczny System RS

Odwracalność reguł w ARS:

Rozważmy przypadek $(\wedge \Rightarrow)$.
Mamy zatem dowód $\mathcal{D}$ długości n zakończony sekwentem $S := \varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$.
Należy rozważyć 2 podprzypadki:

a. $\varphi \wedge \psi$ jest formułą zasadniczą S
b. $\varphi \wedge \psi$ nie jest formułą zasadniczą S

Jeżeli ostatnia reguła to $(\wedge \Rightarrow)$ z $\varphi \wedge \psi$ jako formułą zasadniczą, to wtedy po obcięciu ostatniego sekwentu z $\mathcal{D}$ mamy dowód $\varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ (długości $n - 1$).

Analityczny System RS

Odwracalność reguł w ARS:

Analityczny System RS

Odwracalność reguł w ARS:

Rozważmy przypadek ($\wedge \Rightarrow$), podprzypadek b.

Analityczny System RS

Odwracalność reguł w ARS:

Rozważmy przypadek $(\wedge \Rightarrow)$, podprzypadek b.
Jeżeli $\varphi \wedge \psi$ nie jest formułą zasadniczą S, to jest formułą parametryczną; przykładowo, jeżeli otatnio zastosowana reguła była 2-przesłankowa, to $\mathcal{D}$ kończy się następująco:

Analityczny System RS

Odwracalność reguł w ARS:

Rozważmy przypadek ($\wedge \Rightarrow$), podprzypadek b.
Jeżeli $\varphi \wedge \psi$ nie jest formułą zasadniczą S, to jest formułą parametryczną; przykładowo, jeżeli otatnio zastosowana reguła była 2-przesłankowa, to $\mathcal{D}$ kończy się następująco:

$$\frac{\varphi \wedge \psi, \Gamma' \Rightarrow \Delta' \qquad \varphi \wedge \psi, \Gamma'' \Rightarrow \Delta''}{\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

Analityczny System RS

Odwracalność reguł w ARS:

Rozważmy przypadek ($\wedge \Rightarrow$), podprzypadek b.
Jeżeli $\varphi \wedge \psi$ nie jest formułą zasadniczą S, to jest formułą parametryczną; przykładowo, jeżeli otatnio zastosowana reguła była 2-przesłankowa, to $\mathcal{D}$ kończy się następująco:

$$\frac{\varphi \wedge \psi, \Gamma' \Rightarrow \Delta' \qquad \varphi \wedge \psi, \Gamma'' \Rightarrow \Delta''}{\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

Ponieważ dowody obu przesłanek mają długość $< n$, to podpadają pod założenie indukcyjne. Zatem mamy dowody sekwentów $\varphi, \psi, \Gamma' \Rightarrow \Delta'$ i $\varphi, \psi, \Gamma'' \Rightarrow \Delta''$. Ale wtedy za pomocą tej samej reguły 2-przesłankowej, która kończyła $\mathcal{D}$ wydedukujemy z nich sekwent $\varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$, czyli przesłankę rozważanego sekwentu.

Analityczny System RS

Parę ważnych definicji

Analityczny System RS

Parę ważnych definicji

1. $\Gamma \vdash \Delta$ wtw $\vdash \Gamma' \Rightarrow \Delta'$ dla pewnego skończonego $\Gamma' \subseteq \Gamma$ i $\Delta' \subseteq \Delta$

Analityczny System RS

Parę ważnych definicji

1. $\Gamma \vdash \Delta$ wtw $\vdash \Gamma' \Rightarrow \Delta'$ dla pewnego skończonego $\Gamma' \subseteq \Gamma$ i $\Delta' \subseteq \Delta$
2. $\Gamma \nvdash \Delta$ wtw $\nvdash \Gamma' \Rightarrow \Delta'$ dla każdego skończonego $\Gamma' \subseteq \Gamma$ i $\Delta' \subseteq \Delta$

Analityczny System RS

Parę ważnych definicji

1. $\Gamma \vdash \Delta$ wtw $\vdash \Gamma' \Rightarrow \Delta'$ dla pewnego skończonego $\Gamma' \subseteq \Gamma$ i $\Delta' \subseteq \Delta$
2. $\Gamma \nvdash \Delta$ wtw $\nvdash \Gamma' \Rightarrow \Delta'$ dla każdego skończonego $\Gamma' \subseteq \Gamma$ i $\Delta' \subseteq \Delta$
3. (Γ, Δ) jest niesprzeczna wtw $\Gamma \nvdash \Delta$

Analityczny System RS

Parę ważnych definicji

1. $\Gamma \vdash \Delta$ wtw $\vdash \Gamma' \Rightarrow \Delta'$ dla pewnego skończonego $\Gamma' \subseteq \Gamma$ i $\Delta' \subseteq \Delta$
2. $\Gamma \nvdash \Delta$ wtw $\nvdash \Gamma' \Rightarrow \Delta'$ dla każdego skończonego $\Gamma' \subseteq \Gamma$ i $\Delta' \subseteq \Delta$
3. (Γ, Δ) jest niesprzeczna wtw $\Gamma \nvdash \Delta$
4. (Γ, Δ) jest sprzeczna wtw $\Gamma \vdash \Delta$

Analityczny System RS

Parę ważnych definicji

1. $\Gamma \vdash \Delta$ wtw $\vdash \Gamma' \Rightarrow \Delta'$ dla pewnego skończonego $\Gamma' \subseteq \Gamma$ i $\Delta' \subseteq \Delta$
2. $\Gamma \nvdash \Delta$ wtw $\nvdash \Gamma' \Rightarrow \Delta'$ dla każdego skończonego $\Gamma' \subseteq \Gamma$ i $\Delta' \subseteq \Delta$
3. (Γ, Δ) jest niesprzeczna wtw $\Gamma \nvdash \Delta$
4. (Γ, Δ) jest sprzeczna wtw $\Gamma \vdash \Delta$

Analityczny System RS

Niesprzeczność par zbiorów formuł

Analityczny System RS

Niesprzeczność par zbiorów formuł

Lemat23: Jeżeli (Γ, Δ) jest niesprzeczna, to:

- $\Gamma \cap \Delta = \varnothing$
- (Γ', Δ') jest niesprzeczna, dla dowolnego $\Gamma' \subseteq \Gamma$ i $\Delta' \subseteq \Delta$

Analityczny System RS

Niesprzeczność par zbiorów formuł

Lemat23: Jeżeli (Γ, Δ) jest niesprzeczna, to:

- $\Gamma \cap \Delta = \varnothing$
- (Γ', Δ') jest niesprzeczna, dla dowolnego $\Gamma' \subseteq \Gamma$ i $\Delta' \subseteq \Delta$

Dowód: W pierwszym wypadku gdyby $\Gamma \cap \Delta \neq \varnothing$ to byłoby dowiedlne (jako aksjomat), co przeczy założeniu. Podobnie w drugim przypadku, gdyby jakieś (Γ', Δ') było sprzeczne, to wtedy z $\Gamma' \Rightarrow \Delta'$ wydedukujemy przez (W) $\Gamma \Rightarrow \Delta$.

Analityczny System RS

Niesprzeczność par zbiorów formuł

Lemat24: Jeżeli (Γ, Δ) jest niesprzeczna, to:

1. jeżeli $\varphi \in \Gamma$, to $\varphi \notin \Delta$
2. jeżeli $\varphi \in \Delta$, to $\varphi \notin \Gamma$
3. jeżeli $\neg\varphi \in \Gamma$, to $\varphi \notin \Gamma$
4. jeżeli $\neg\varphi \in \Delta$, to $\varphi \notin \Delta$
5. jeżeli $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$, to $\varphi \notin \Delta$ i $\psi \notin \Delta$
6. jeżeli $\varphi \wedge \psi \in \Delta$, to $\varphi \notin \Gamma$ lub $\psi \notin \Gamma$
7. jeżeli $\varphi \vee \psi \in \Gamma$, to $\varphi \notin \Delta$ lub $\psi \notin \Delta$
8. jeżeli $\varphi \vee \psi \in \Delta$, to $\varphi \notin \Gamma$ i $\psi \notin \Gamma$
9. jeżeli $\varphi \to \psi \in \Gamma$, to $\varphi \notin \Gamma$ lub $\psi \notin \Delta$
10. jeżeli $\varphi \to \psi \in \Delta$, to $\varphi \notin \Delta$ i $\psi \notin \Gamma$

Analityczny System RS

Niesprzeczność par zbiorów formuł

Dowód Lematu24:

Analityczny System RS

Niesprzeczność par zbiorów formuł

Dowód Lematu24:
Pierwsze dwa przypadki, to bezpośrednia konsekwencja poprzedniego lematu. Dla ilustracji udowodnimy punkt 9 i 10.

Analityczny System RS

Niesprzeczność par zbiorów formuł

Dowód Lematu24:
Pierwsze dwa przypadki, to bezpośrednia konsekwencja poprzedniego lematu. Dla ilustracji udowodnimy punkt 9 i 10.
Dla 9. załóżmy niewprost, że $\varphi \rightarrow \psi \in \Gamma$ ale $\varphi \in \Gamma$ i $\psi \in \Delta$.
Jednak $\vdash \varphi \rightarrow \psi, \varphi \Rightarrow \psi$, więc przez (W) dowiedziemy, że $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$, co jest sprzeczne z założeniem lematu.

Analityczny System RS

Niesprzeczność par zbiorów formuł

Dowód Lematu24:
Pierwsze dwa przypadki, to bezpośrednia konsekwencja poprzedniego lematu. Dla ilustracji udowodnimy punkt 9 i 10.
Dla 9. załóżmy niewprost, że $\varphi \to \psi \in \Gamma$ ale $\varphi \in \Gamma$ i $\psi \in \Delta$.
Jednak $\vdash \varphi \to \psi, \varphi \Rightarrow \psi$, więc przez (W) dowiedziemy, że $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$, co jest sprzeczne z założeniem lematu.
Dla 10. zakładamy niewprost, że $\varphi \in \Delta$ lub $\psi \in \Gamma$ chociaż $\varphi \to \psi \in \Delta$. Zauważmy jednak, że zarówno $\Rightarrow \varphi \to \psi, \varphi$ jak i $\psi \Rightarrow \varphi \to \psi$ są dowiedlne, więc w każdym wypadku przez (W) otrzymamy dowód $\Gamma \Rightarrow \Delta$ co przeczy założeniu lematu.

Analityczny i konstruktywny dowód pełności ARS

Saturacja (nasycanie) par zbiorów:

(Γ, Δ) jest (w dół) nasycony (downward saturated) wtw:

Analityczny i konstruktywny dowód pełności ARS

Saturacja (nasycanie) par zbiorów:

(Γ, Δ) jest (w dół) nasycony (downward saturated) wtw:

1. jeżeli $\neg\varphi \in \Gamma$, to $\varphi \in \Delta$
2. jeżeli $\neg\varphi \in \Delta$, to $\varphi \in \Gamma$
3. jeżeli $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$, to $\varphi \in \Gamma$ i $\psi \in \Gamma$
4. jeżeli $\varphi \wedge \psi \in \Delta$, to $\varphi \in \Delta$ lub $\psi \in \Delta$
5. jeżeli $\varphi \vee \psi \in \Gamma$, to $\varphi \in \Gamma$ lub $\psi \in \Gamma$
6. jeżeli $\varphi \vee \psi \in \Delta$, to $\varphi \in \Delta$ i $\psi \in \Delta$
7. jeżeli $\varphi \rightarrow \psi \in \Gamma$, to $\varphi \in \Delta$ lub $\psi \in \Gamma$
8. jeżeli $\varphi \rightarrow \psi \in \Delta$, to $\varphi \in \Gamma$ i $\psi \in \Delta$

Analityczny i konstruktywny dowód pełności ARS

Istnienie modelu:

Lemat25 (prawdziwościowy – wersja analityczna:)

Analityczny i konstruktywny dowód pełności ARS

Istnienie modelu:

Lemat25 (prawdziwościowy – wersja analityczna:)
Jeżeli (Γ, Δ) jest nasycony i niesprzeczny, to istnieje dla niej model falsyfikujący $\mathfrak{M}$, t.j. taki, że:

- jeżeli $\varphi \in \Gamma$, to $\mathfrak{M} \models \varphi$
- jeżeli $\varphi \in \Delta$, to $\mathfrak{M} \not\models \varphi$

Analityczny i konstruktywny dowód pełności ARS

Istnienie modelu:

Lemat25 (prawdziwościowy – wersja analityczna:)
Jeżeli (Γ, Δ) jest nasycony i niesprzeczny, to istnieje dla niej model falsyfikujący $\mathfrak{M}$, t.j. taki, że:

- jeżeli $\varphi \in \Gamma$, to $\mathfrak{M} \models \varphi$
- jeżeli $\varphi \in \Delta$, to $\mathfrak{M} \not\models \varphi$

Dowód: Definujemy model przyjmując, że $\mathfrak{M} = \mathrm{Var}(\Gamma)$ i dowodzimy, że spełnia warunki przez indukcję po długości formuł. Baza wynika z definicji, pozostałe przypadki do samodzielnego udowodnienia.

Analityczny i konstruktywny dowód pełności ARS

Lemat o saturacji:

Analityczny i konstruktywny dowód pełności ARS

Lemat o saturacji:

Lemat26:
Jeżeli $\nvdash \Gamma \Rightarrow \Delta$, to istnieje nasycone (Π, Σ), takie, że:

(a) $(\Pi, \Sigma) \subseteq SF(\Gamma, \Delta)$
(b) $\nvdash \Pi \Rightarrow \Sigma$ (jest niesprzeczny)

gdzie $SF(\Gamma, \Delta)$ oznacza zbiór wszystkich podformuł występujących w formułach z $\Gamma \cup \Delta$.

Analityczny i konstruktywny dowód pełności ARS

Lemat o saturacji:

Analityczny i konstruktywny dowód pełności ARS

Lemat o saturacji:

Dowód: Wstępnie należy zdefiniować jakiś algorytm poszukiwania dowodu (ćwiczenie). Jeżeli $\nvdash \Gamma \Rightarrow \Delta$, to istnieje co najmniej jedna gałąź drzewa dowodowego, której liść jest nieaksjomatyczny i atomowy. Jest ona skończonym ciągiem sekwentów:

$\Gamma \Rightarrow \Delta, ..., \Gamma_n \Rightarrow \Delta_n$

Analityczny i konstruktywny dowód pełności ARS

Lemat o saturacji:

Dowód: Wstępnie należy zdefiniować jakiś algorytm poszukiwania dowodu (ćwiczenie). Jeżeli $\nvdash \Gamma \Rightarrow \Delta$, to istnieje co najmniej jedna gałąź drzewa dowodowego, której liść jest nieaksjomatyczny i atomowy. Jest ona skończonym ciągiem sekwentów:

$\Gamma \Rightarrow \Delta, ..., \Gamma_n \Rightarrow \Delta_n$

Zdefiniujmy

$\Pi = \bigcup \Gamma_i$, $\Sigma = \bigcup \Delta_i$, gdzie $i \leq n$ (tzn. $\Gamma_i \Rightarrow \Delta_i$ to dowolny sekwent występujący na tej gałęzi)

Analityczny i konstruktywny dowód pełności ARS

Lemat o saturacji:

Dowód: Wstępnie należy zdefiniować jakiś algorytm poszukiwania dowodu (ćwiczenie). Jeżeli $\nvdash \Gamma \Rightarrow \Delta$, to istnieje co najmniej jedna gałąź drzewa dowodowego, której liść jest nieaksjomatyczny i atomowy. Jest ona skończonym ciągiem sekwentów:

$\Gamma \Rightarrow \Delta, ..., \Gamma_n \Rightarrow \Delta_n$

Zdefiniujmy

$\Pi = \bigcup \Gamma_i$, $\Sigma = \bigcup \Delta_i$, gdzie $i \leq n$ (tzn. $\Gamma_i \Rightarrow \Delta_i$ to dowolny sekwent występujący na tej gałęzi)

Należy wykazać, że (Π, Σ) jest nasycony i spełnia warunki (a) i (b).

Analityczny i konstruktywny dowód pełności ARS

Lemat o saturacji:

Dowód: Wstępnie należy zdefiniować jakiś algorytm poszukiwania dowodu (ćwiczenie). Jeżeli $\nvdash \Gamma \Rightarrow \Delta$, to istnieje co najmniej jedna gałąź drzewa dowodowego, której liść jest nieaksjomatyczny i atomowy. Jest ona skończonym ciągiem sekwentów:

$\Gamma \Rightarrow \Delta, \ldots, \Gamma_n \Rightarrow \Delta_n$

Zdefiniujmy

$\Pi = \bigcup \Gamma_i$, $\Sigma = \bigcup \Delta_i$, gdzie $i \leq n$ (tzn. $\Gamma_i \Rightarrow \Delta_i$ to dowolny sekwent występujący na tej gałęzi)

Należy wykazać, że (Π, Σ) jest nasycony i spełnia warunki (a) i (b).

Nasycenie wynika z faktu, że arunki definiujące parę nasyconą odpowiadają regułom zastosowanym w konstrukcji rozważanej gałęzi.

Analityczny i konstruktywny dowód pełności ARS

Lemat o saturacji:

Dowód: Wstępnie należy zdefiniować jakiś algorytm poszukiwania dowodu (ćwiczenie). Jeżeli $\nvdash \Gamma \Rightarrow \Delta$, to istnieje co najmniej jedna gałąź drzewa dowodowego, której liść jest nieaksjomatyczny i atomowy. Jest ona skończonym ciągiem sekwentów:
$\Gamma \Rightarrow \Delta, ..., \Gamma_n \Rightarrow \Delta_n$
Zdefiniujmy
$\Pi = \bigcup \Gamma_i$, $\Sigma = \bigcup \Delta_i$, gdzie $i \leq n$ (tzn. $\Gamma_i \Rightarrow \Delta_i$ to dowolny sekwent występujący na tej gałęzi)
Należy wykazać, że (Π, Σ) jest nasycony i spełnia warunki (a) i (b).
Nasycenie wynika z faktu, że arunki definiujące parę nasyconą odpowiadają regułom zastosowanym w konstrukcji rozważanej gałęzi.
(a) jest konsekwencją własności podformuł.

Analityczny i konstruktywny dowód pełności ARS

Lemat o saturacji:

Dowód: Wstępnie należy zdefiniować jakiś algorytm poszukiwania dowodu (ćwiczenie). Jeżeli $\nvdash \Gamma \Rightarrow \Delta$, to istnieje co najmniej jedna gałąź drzewa dowodowego, której liść jest nieaksjomatyczny i atomowy. Jest ona skończonym ciągiem sekwentów:
$\Gamma \Rightarrow \Delta, \ldots, \Gamma_n \Rightarrow \Delta_n$
Zdefiniujmy
$\Pi = \bigcup \Gamma_i$, $\Sigma = \bigcup \Delta_i$, gdzie $i \leq n$ (tzn. $\Gamma_i \Rightarrow \Delta_i$ to dowolny sekwent występujący na tej gałęzi)
Należy wykazać, że (Π, Σ) jest nasycony i spełnia warunki (a) i (b).
Nasycenie wynika z faktu, że arunki definiujące parę nasyconą odpowiadają regułom zastosowanym w konstrukcji rozważanej gałęzi.
(a) jest konsekwencją własności podformuł.
(b) jest spełniony z definicji.

Analityczny i konstruktywny dowód pełności ARS

Pełność:

Twierdzenie27: Jeżeli $\models \Gamma \Rightarrow \Delta$, to $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$

Analityczny i konstruktywny dowód pełności ARS

Pełność:

Twierdzenie27: Jeżeli $\models \Gamma \Rightarrow \Delta$, to $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$

Dowód:

Analityczny i konstruktywny dowód pełności ARS

Pełność:

Twierdzenie27: Jeżeli $\models \Gamma \Rightarrow \Delta$, to $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$

Dowód:

1. $\nvdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ (założenie)

Analityczny i konstruktywny dowód pełności ARS

Pełność:

Twierdzenie27: Jeżeli $\models \Gamma \Rightarrow \Delta$, to $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$

Dowód:

1. $\nvdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ (założenie)
2. istnieje nasycone i niesprzeczne (Π, Σ) (Lemat o saturacji)

Analityczny i konstruktywny dowód pełności ARS

Pełność:

Twierdzenie27: Jeżeli $\models \Gamma \Rightarrow \Delta$, to $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$

Dowód:

1. $\nvdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ (założenie)
2. istnieje nasycone i niesprzeczne (Π, Σ) (Lemat o saturacji)
3. istnieje model falsyfikujący dla (Π, Σ) (Lemat prawdziwościowy)

Analityczny i konstruktywny dowód pełności ARS

Pełność:

Twierdzenie27: Jeżeli $\models \Gamma \Rightarrow \Delta$, to $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$

Dowód:

1. $\nvdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ (założenie)
2. istnieje nasycone i niesprzeczne (Π, Σ) (Lemat o saturacji)
3. istnieje model falsyfikujący dla (Π, Σ) (Lemat prawdziwościowy)
4. istnieje model falsyfikujący dla (Γ, Δ) bo $\Gamma \subseteq \Pi$ a $\Delta \subseteq \Sigma$

Analityczny i konstruktywny dowód pełności ARS

Pełność:

Twierdzenie27: Jeżeli $\models \Gamma \Rightarrow \Delta$, to $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$

Dowód:

1. $\nvdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ (założenie)
2. istnieje nasycone i niesprzeczne (Π, Σ) (Lemat o saturacji)
3. istnieje model falsyfikujący dla (Π, Σ) (Lemat prawdziwościowy)
4. istnieje model falsyfikujący dla (Γ, Δ) bo $\Gamma \subseteq \Pi$ a $\Delta \subseteq \Sigma$
5. $\not\models \Gamma \Rightarrow \Delta$

Analityczny i konstruktywny dowód pełności ARS

Pełność:

Twierdzenie27: Jeżeli $\models \Gamma \Rightarrow \Delta$, to $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$

Dowód:

1. $\nvdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ (założenie)
2. istnieje nasycone i niesprzeczne (Π, Σ) (Lemat o saturacji)
3. istnieje model falsyfikujący dla (Π, Σ) (Lemat prawdziwościowy)
4. istnieje model falsyfikujący dla (Γ, Δ) bo $\Gamma \subseteq \Pi$ a $\Delta \subseteq \Sigma$
5. $\not\models \Gamma \Rightarrow \Delta$

Uwaga: konstruktywny dowód pełności daje nam również rozstrzygalność ARS.

Analityczny i konstruktywny dowód pełności ARS

Alternatywny dowód:

Analityczny i konstruktywny dowód pełności ARS

Alternatywny dowód:

Można oprzeć dowód pełności na pojęciu domknięcia sekwentu na reguły.

Analityczny i konstruktywny dowód pełności ARS

Alternatywny dowód:

Można oprzeć dowód pełności na pojęciu domknięcia sekwentu na reguły.

$\Gamma \Rightarrow \Delta$ jest domknięty na regułę:

Analityczny i konstruktywny dowód pełności ARS

Alternatywny dowód:

Można oprzeć dowód pełności na pojęciu domknięcia sekwentu na reguły.

$\Gamma \Rightarrow \Delta$ jest domknięty na regułę:

(a) jednoprzesłankową wtw, jeżeli formuła zasadnicza tej reguły należy do sekwentu, to formuły poboczne (przesłankowe) też należą.

Analityczny i konstruktywny dowód pełności ARS

Alternatywny dowód:

Można oprzeć dowód pełności na pojęciu domknięcia sekwentu na reguły.

$\Gamma \Rightarrow \Delta$ jest domknięty na regułę:

(a) jednoprzesłankową wtw, jeżeli formuła zasadnicza tej reguły należy do sekwentu, to formuły poboczne (przesłankowe) też należą.

(b) dwuprzesłankową wtw, jeżeli formuła zasadnicza tej reguły należy do sekwentu, to co najmniej jedna formuła poboczna też należy.

Analityczny i konstruktywny dowód pełności ARS

Alternatywny dowód:

Analityczny i konstruktywny dowód pełności ARS

Alternatywny dowód:

Zmieniamy też definicję nasycania:

Analityczny i konstruktywny dowód pełności ARS

Alternatywny dowód:

Zmieniamy też definicję nasycania:

(Γ, Δ) jest nasycony wtw:

Analityczny i konstruktywny dowód pełności ARS

Alternatywny dowód:

Zmieniamy też definicję nasycania:

(Γ, Δ) jest nasycony wtw:

(i) jest niesprzeczna i

Analityczny i konstruktywny dowód pełności ARS

Alternatywny dowód:

Zmieniamy też definicję nasycania:

(Γ, Δ) jest nasycony wtw:

(i) jest niesprzeczna i

(ii) $\Gamma \Rightarrow \Delta$ jest domknięty na każdą regułę

Analityczny i konstruktywny dowód pełności ARS

Alternatywny dowód:

Zmieniamy też definicję nasycania:

(Γ, Δ) jest nasycony wtw:

(i) jest niesprzeczna i

(ii) $\Gamma \Rightarrow \Delta$ jest domknięty na każdą regułę

Uwaga: nie tylko brak tu definiujących warunków ale wymagamy też niesprzeczności (w poprzedniej definicji nie było to wymagane – zb. nasycony mógł być sprzeczny)

Analityczny i konstruktywny dowód pełności ARS

Alternatywny dowód:

Analityczny i konstruktywny dowód pełności ARS

Alternatywny dowód:

Tym razem definiujemy algorytm nasycania dla dowolnej niesprzecznej pary formuł (a nie szukania dowodu dla dowolnego sekwentu!) a wykazać należy, że otrzymana para spełnia warunek (i) i (ii) (tj. niesprzeczność i domknięcie na reguły).

Analityczny i konstruktywny dowód pełności ARS

Alternatywny dowód:

Tym razem definiujemy algorytm nasycania dla dowolnej niesprzecznej pary formuł (a nie szukania dowodu dla dowolnego sekwentu!) a wykazać należy, że otrzymana para spełnia warunek (i) i (ii) (tj. niesprzeczność i domknięcie na reguły).

Uwaga: Niezbędne jest odwołanie się do lematu o odwracalności reguł.

Analityczny i konstruktywny dowód pełności ARS

Alternatywny dowód:

Definiujemy rekurencyjnie skończony ciąg sekwentów:
$\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0, \ \dots \ , \Gamma_n \Rightarrow \Delta_n$.

Analityczny i konstruktywny dowód pełności ARS

Alternatywny dowód:

Definiujemy rekurencyjnie skończony ciąg sekwentów:
$\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0, \dots, \Gamma_n \Rightarrow \Delta_n$.
a) $\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0 := \Gamma \Rightarrow \Delta$, jeżeli nie da się zastosować żadna reguła logiczna, to jest to poszukiwany przez nas sekwent nasycony.

Analityczny i konstruktywny dowód pełności ARS

Alternatywny dowód:

Definiujemy rekurencyjnie skończony ciąg sekwentów:
$\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0, \ldots, \Gamma_n \Rightarrow \Delta_n$.
a) $\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0 := \Gamma \Rightarrow \Delta$, jeżeli nie da się zastosować żadna reguła logiczna, to jest to poszukiwany przez nas sekwent nasycony.
b) Rozważmy przejście od i do $i+1$, niech $\Gamma_i \Rightarrow \Delta_i$ będzie sekwentem otrzymanym w etapie i, który jest niesprzeczny. Jeżeli nie da się zastosować żadna reguła, to jest to poszukiwany przez nas niesprzeczny sekwent nasycony. W przeciwnym wypadku wybierz regułę, ze względu na którą (Γ_i, Δ_i) nie jest domknięty. Należy rozważyć z osobna przypadek każdej formuły złożonej w Γ_i i w Δ_i.

Analityczny i konstruktywny dowód pełności ARS

Alternatywny dowód:

Przypadek $\varphi \wedge \psi \in \Delta_i$:

Analityczny i konstruktywny dowód pełności ARS

Alternatywny dowód:

Przypadek $\varphi \wedge \psi \in \Delta_i$:
Zatem $\Gamma_i \Rightarrow \Delta_i := \Gamma_i \Rightarrow \Delta_i', \varphi \wedge \psi$ i w grę wchodzi zastosowanie reguły $(\Rightarrow \wedge)$ z przesłanek $\Gamma_i \Rightarrow \Delta_i', \varphi$ i $\Gamma_i \Rightarrow \Delta_i', \psi$.

Analityczny i konstruktywny dowód pełności ARS

Alternatywny dowód:

Przypadek $\varphi \wedge \psi \in \Delta_i$:
Zatem $\Gamma_i \Rightarrow \Delta_i := \Gamma_i \Rightarrow \Delta'_i, \varphi \wedge \psi$ i w grę wchodzi zastosowanie reguły $(\Rightarrow \wedge)$ z przesłanek $\Gamma_i \Rightarrow \Delta'_i, \varphi$ i $\Gamma_i \Rightarrow \Delta'_i, \psi$.
Co najmniej jedna z nich nie ma dowodu, gdyż inaczej, wbrew założeniu, dowiedlny jest $\Gamma_i \Rightarrow \Delta_i$. Wybierz tę przesłankę, która nie ma dowodu – niech to będzie, np. $\Gamma_i \Rightarrow \Delta'_i, \varphi$ i zdefiniuj $\Gamma_{i+1} \Rightarrow \Delta_{i+1} := \Gamma_i \Rightarrow \Delta'_i, \varphi, \varphi \wedge \psi$.

Analityczny i konstruktywny dowód pełności ARS

Alternatywny dowód:

Przypadek $\varphi \wedge \psi \in \Delta_i$:
Zatem $\Gamma_i \Rightarrow \Delta_i := \Gamma_i \Rightarrow \Delta'_i, \varphi \wedge \psi$ i w grę wchodzi zastosowanie reguły ($\Rightarrow \wedge$) z przesłanek $\Gamma_i \Rightarrow \Delta'_i, \varphi$ i $\Gamma_i \Rightarrow \Delta'_i, \psi$.
Co najmniej jedna z nich nie ma dowodu, gdyż inaczej, wbrew założeniu, dowiedlny jest $\Gamma_i \Rightarrow \Delta_i$. Wybierz tę przesłankę, która nie ma dowodu – niech to będzie, np. $\Gamma_i \Rightarrow \Delta'_i, \varphi$ i zdefiniuj $\Gamma_{i+1} \Rightarrow \Delta_{i+1} := \Gamma_i \Rightarrow \Delta'_i, \varphi, \varphi \wedge \psi$.
Zauważmy, że $\Gamma_i \subseteq \Gamma_{i+1}$ i $\Delta_i \subseteq \Delta_{i+1}$, a ponadto $\Gamma_{i+1} \Rightarrow \Delta_{i+1}$ jest domknięta na jedną regułę więcej (dla $\varphi \wedge \psi$) niż $\Gamma_i \Rightarrow \Delta'_i$.

Analityczny i konstruktywny dowód pełności ARS

Alternatywny dowód:

Przypadek $\varphi \wedge \psi \in \Delta_i$:

Analityczny i konstruktywny dowód pełności ARS

Alternatywny dowód:

Przypadek $\varphi \wedge \psi \in \Delta_i$:

Należy jeszcze wykazać, że $\Gamma_{i+1} \Rightarrow \Delta_{i+1}$ też jest niesprzeczne.

Analityczny i konstruktywny dowód pełności ARS

Alternatywny dowód:

Przypadek $\varphi \wedge \psi \in \Delta_i$:
Należy jeszcze wykazać, że $\Gamma_{i+1} \Rightarrow \Delta_{i+1}$ też jest niesprzeczne. Załóżmy niewprost, że $\Gamma_{i+1} \Rightarrow \Delta_{i+1}$ ma dowód, wtedy – przez lemat o odwracalności – dowód mają obie przesłanki tego sekwentu, ze względu na regułę $(\Rightarrow \wedge)$, czyli dowód ma $\Gamma_i \Rightarrow \Delta'_i, \varphi, \varphi := \Gamma_i \Rightarrow \Delta'_i, \varphi$, wbrew założeniu o jego niesprzeczności.

Analityczny i konstruktywny dowód pełności ARS

Alternatywny dowód:

Powtarzamy tę procedurę aż uzyskamy sekwent nasycony.

Analityczny i konstruktywny dowód pełności ARS

Alternatywny dowód:

Powtarzamy tę procedurę aż uzyskamy sekwent nasycony. Jest to proces skończony, gdyż każdy kolejny element ciągu zmniejsza ilość formuł, na które $\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0$ jest niedomknięty.

Analityczny i konstruktywny dowód pełności ARS

Alternatywny dowód:

Powtarzamy tę procedurę aż uzyskamy sekwent nasycony.
Jest to proces skończony, gdyż każdy kolejny element ciągu zmniejsza ilość formuł, na które $\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0$ jest niedomknięty.
Uzyskujem w ten sposób ponownie dowód lematu 26 (o saturacji); warunek (a) jest spełniony poprzez konstrukcję ciągu, a (b) jest spełniony, gdyż jak wykazaliśmy, każdy kolejny element ciągu dziedziczy niesprzeczność z elementu poprzedzającego.

Analityczny i konstruktywny dowód pełności ARS

Alternatywny dowód:

Powtarzamy tę procedurę aż uzyskamy sekwent nasycony.
Jest to proces skończony, gdyż każdy kolejny element ciągu zmniejsza ilość formuł, na które $\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0$ jest niedomknięty.
Uzyskujem w ten sposób ponownie dowód lematu 26 (o saturacji); warunek (a) jest spełniony poprzez konstrukcję ciągu, a (b) jest spełniony, gdyż jak wykazaliśmy, każdy kolejny element ciągu dziedziczy niesprzeczność z elementu poprzedzającego.
Reszta dowodu o pełności analogicznie jak w poprzedniej wersji.

Dopuszczalność Cut w ARS

Alternatywny dowód:

Dopuszczalność Cut w ARS

Alternatywny dowód:

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego

Dopuszczalność Cut w ARS

Alternatywny dowód:

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego
Różnice z dowodem Gentzena:

Dopuszczalność Cut w ARS

Alternatywny dowód:

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego

Różnice z dowodem Gentzena:

- pokazuje nie jak eliminować (Cut) z dowodu ale, że jego dołączenie nie wzmacnie systemu

Dopuszczalność Cut w ARS

Alternatywny dowód:

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego
Różnice z dowodem Gentzena:

- pokazuje nie jak eliminować (Cut) z dowodu ale, że jego dołączenie nie wzmacnie systemu
- bezpośrednio dla (Cut) a nie dla (Mix)

Dopuszczalność Cut w ARS

Alternatywny dowód:

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego
Różnice z dowodem Gentzena:

- pokazuje nie jak eliminować (Cut) z dowodu ale, że jego dołączenie nie wzmacnie systemu
- bezpośrednio dla (Cut) a nie dla (Mix)
- dla RS na sekwentach zbudowanych ze zbiorów (oryginalna wersja na alternatywach)

Dopuszczalność Cut w ARS

Alternatywny dowód:

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego
Różnice z dowodem Gentzena:

- pokazuje nie jak eliminować (Cut) z dowodu ale, że jego dołączenie nie wzmacnie systemu
- bezpośrednio dla (Cut) a nie dla (Mix)
- dla RS na sekwentach zbudowanych ze zbiorów (oryginalna wersja na alternatywach)
- indukcja na 2 parametrach (nie na 3)

Dopuszczalność Cut w ARS

Alternatywny dowód:

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego
Różnice z dowodem Gentzena:

- pokazuje nie jak eliminować (Cut) z dowodu ale, że jego dołączenie nie wzmacnie systemu
- bezpośrednio dla (Cut) a nie dla (Mix)
- dla RS na sekwentach zbudowanych ze zbiorów (oryginalna wersja na alternatywach)
- indukcja na 2 parametrach (nie na 3)
- indukcja nie po głębokości ale po długości dowodu przesłanki (Cut)

Dopuszczalność Cut w ARS

Alternatywny dowód:

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego
Różnice z dowodem Gentzena:

- pokazuje nie jak eliminować (Cut) z dowodu ale, że jego dołączenie nie wzmacnie systemu
- bezpośrednio dla (Cut) a nie dla (Mix)
- dla RS na sekwentach zbudowanych ze zbiorów (oryginalna wersja na alternatywach)
- indukcja na 2 parametrach (nie na 3)
- indukcja nie po głębokości ale po długości dowodu przesłanki (Cut)
- bazuje na lemacie o inwersji reguł i dopuszczalności (W)

Dopuszczalność Cut w ARS

Alternatywny dowód:

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego.

Dopuszczalność Cut w ARS

Alternatywny dowód:

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego.
Zatem dowodzimy, że jeżeli $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ i $\vdash \varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma$, to również $\vdash \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$.

Dopuszczalność Cut w ARS

Alternatywny dowód:

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego.
Zatem dowodzimy, że jeżeli $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ i $\vdash \varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma$, to również $\vdash \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$.
Dowód przeprowadzamy przez indukcję po długości φ a w jego obrębie dodatkowo przez indukcję po długości dowodu jednej z przesłanek (Cut).

Dopuszczalność Cut w ARS

Alternatywny dowód:

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego.
Zatem dowodzimy, że jeżeli $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ i $\vdash \varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma$, to również $\vdash \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$.
Dowód przeprowadzamy przez indukcję po długości φ a w jego obrębie dodatkowo przez indukcję po długości dowodu jednej z przesłanek (Cut).
Dodatkowo zakładamy, że aksjomaty mają postać $\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$, gdzie $\varphi \in ZZ$. Oczywiście nie osłabia to systemu, bo Twierdzenie 7 zachodzi też dla ARS, a przez dopuszczalność (W) $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ dla dowolnego $\Gamma \cap \Delta \neq \varnothing$. Założenie to jedynie upraszcza dowód.

Dopuszczalność Cut w ARS

Schemat dowodu dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

Dopuszczalność Cut w ARS

Schemat dowodu dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

I. Indukcja po długości cut-formuły

Dopuszczalność Cut w ARS

Schemat dowodu dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

I. Indukcja po długości cut-formuły

1.1. Baza: (Cut) na cut-formule o długości 0 jest dopuszczalny

Dopuszczalność Cut w ARS

Schemat dowodu dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

I. Indukcja po długości cut-formuły

1.1. Baza: (Cut) na cut-formule o długości 0 jest dopuszczalny

II. Indukcja po długości dowodu (lewej) przesłanki (Cut)

Dopuszczalność Cut w ARS

Schemat dowodu dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

I. Indukcja po długości cut-formuły

1.1. Baza: (Cut) na cut-formule o długości 0 jest dopuszczalny

II. Indukcja po długości dowodu (lewej) przesłanki (Cut)

2.1. Baza: (Cut) z lewą przesłanką o dowodzie długości 0 jest dopuszczalny

Dopuszczalność Cut w ARS

Schemat dowodu dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

I. Indukcja po długości cut-formuły

1.1. Baza: (Cut) na cut-formule o długości 0 jest dopuszczalny

II. Indukcja po długości dowodu (lewej) przesłanki (Cut)

2.1. Baza: (Cut) z lewą przesłanką o dowodzie długości 0 jest dopuszczalny

2.2. Krok indukcyjny: Jeżeli (Cut) z lewą przesłanką o dowodzie długości $< n$ jest dopuszczalny, to o dowodzie długości n też jest dopuszczalny

Dopuszczalność Cut w ARS

Schemat dowodu dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

I. Indukcja po długości cut-formuły

1.1. Baza: (Cut) na cut-formule o długości 0 jest dopuszczalny

II. Indukcja po długości dowodu (lewej) przesłanki (Cut)

2.1. Baza: (Cut) z lewą przesłanką o dowodzie długości 0 jest dopuszczalny

2.2. Krok indukcyjny: Jeżeli (Cut) z lewą przesłanką o dowodzie długości $< n$ jest dopuszczalny, to o dowodzie długości n też jest dopuszczalny

Wniosek z 2.1., 2.2: (Cut) o na cut-formule o długości 0 jest dopuszczalny bez względu na długość dowodu lewej przesłanki

Dopuszczalność Cut w ARS

Schemat dowodu dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

I. Indukcja po długości cut-formuły

1.1. Baza: (Cut) na cut-formule o długości 0 jest dopuszczalny

II. Indukcja po długości dowodu (lewej) przesłanki (Cut)

2.1. Baza: (Cut) z lewą przesłanką o dowodzie długości 0 jest dopuszczalny

2.2. Krok indukcyjny: Jeżeli (Cut) z lewą przesłanką o dowodzie długości $< n$ jest dopuszczalny, to o dowodzie długości n też jest dopuszczalny

Wniosek z 2.1., 2.2: (Cut) o na cut-formule o długości 0 jest dopuszczalny bez względu na długość dowodu lewej przesłanki

1.2. Krok indukcyjny: Jeżeli (Cut) na cut-formule o długości $< n$ jest dopuszczalny, to dla cut-formuły o długości n też jest dopuszczalny

Dopuszczalność Cut w ARS

Schemat dowodu dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

I. Indukcja po długości cut-formuły

1.1. Baza: (Cut) na cut-formule o długości 0 jest dopuszczalny

II. Indukcja po długości dowodu (lewej) przesłanki (Cut)

2.1. Baza: (Cut) z lewą przesłanką o dowodzie długości 0 jest dopuszczalny

2.2. Krok indukcyjny: Jeżeli (Cut) z lewą przesłanką o dowodzie długości $< n$ jest dopuszczalny, to o dowodzie długości n też jest dopuszczalny

Wniosek z 2.1., 2.2: (Cut) o na cut-formule o długości 0 jest dopuszczalny bez względu na długość dowodu lewej przesłanki

1.2. Krok indukcyjny: Jeżeli (Cut) na cut-formule o długości $< n$ jest dopuszczalny, to dla cut-formuły o długości n też jest dopuszczalny

Wniosek z 1.1., 1.2: (Cut) na dowolnej formule jest dopuszczalny

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

P. 1.1. Zakładamy, że φ jest zmienną

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

P. 1.1. Zakładamy, że φ jest zmienną

P. 2.1. Zakładamy, że dowód lewej przesłanki (Cut) $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ jest długości 0, tzn. jest aksjomatem.

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

P. 1.1. Zakładamy, że φ jest zmienną
P. 2.1. Zakładamy, że dowód lewej przesłanki (Cut) $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ jest długości 0, tzn. jest aksjomatem.
2 przypadki:

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

P. 1.1. Zakładamy, że φ jest zmienną
P. 2.1. Zakładamy, że dowód lewej przesłanki (Cut) $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ jest długości 0, tzn. jest aksjomatem.
2 przypadki:
a) $\Gamma \cap \Delta \neq \varnothing$ $(\varphi \notin \Gamma)$

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

P. 1.1. Zakładamy, że φ jest zmienną
P. 2.1. Zakładamy, że dowód lewej przesłanki (Cut) $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ jest długości 0, tzn. jest aksjomatem.
2 przypadki:
a) $\Gamma \cap \Delta \neq \varnothing$ $(\varphi \notin \Gamma)$
wtedy $\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$ też jest aksjomatem.

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

P. 1.1. Zakładamy, że φ jest zmienną
P. 2.1. Zakładamy, że dowód lewej przesłanki (Cut) $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ jest długości 0, tzn. jest aksjomatem.
2 przypadki:
a) $\Gamma \cap \Delta \neq \varnothing$ ($\varphi \notin \Gamma$)
wtedy $\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$ też jest aksjomatem.
b) $\Gamma \cap \Delta = \varnothing$ (tzn. φ jest formułą zasadniczą i $\Gamma = \Gamma', \varphi$)

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

P. 1.1. Zakładamy, że φ jest zmienną
P. 2.1. Zakładamy, że dowód lewej przesłanki (Cut) $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ jest długości 0, tzn. jest aksjomatem.
2 przypadki:
a) $\Gamma \cap \Delta \neq \varnothing$ ($\varphi \notin \Gamma$)
wtedy $\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$ też jest aksjomatem.
b) $\Gamma \cap \Delta = \varnothing$ (tzn. φ jest formułą zasadniczą i $\Gamma = \Gamma', \varphi$)
ponieważ prawa przesłanka $\varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma$ ma dowód, więc, przez dopuszczalność (W), $\Gamma', \varphi, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$ też ma dowód.

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

P. 1.1., 2.2. założenie indukcyjne: (Cut) na zmiennej φ z lewą przesłanką o dowodzie długości $< n$ jest dopuszczalny.

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

P. 1.1., 2.2. założenie indukcyjne: (Cut) na zmiennej φ z lewą przesłanką o dowodzie długości $< n$ jest dopuszczalny.
Dowodzimy, że (Cut) na zmiennej φ z lewą przesłanką o dowodzie długości n też jest dopuszczalny.

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

P. 1.1., 2.2. założenie indukcyjne: (Cut) na zmiennej φ z lewą przesłanką o dowodzie długości $< n$ jest dopuszczalny.
Dowodzimy, że (Cut) na zmiennej φ z lewą przesłanką o dowodzie długości n też jest dopuszczalny.
Dowód przez rozważenie wszystkich przypadków, które doprowadziły do dedukcji $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$.

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

P. 1.1., 2.2. założenie indukcyjne: (Cut) na zmiennej φ z lewą przesłanką o dowodzie długości $< n$ jest dopuszczalny.
Dowodzimy, że (Cut) na zmiennej φ z lewą przesłanką o dowodzie długości n też jest dopuszczalny.
Dowód przez rozważenie wszystkich przypadków, które doprowadziły do dedukcji $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$.
Uwaga: ponieważ φ jest zmienną więc w grę wchodzą tylko takie przekształcenia gdzie była formułą parametryczną.

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

P. 1.1., P. 2.2. Przypadek $(\Rightarrow \neg)$

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

P. 1.1., P. 2.2. Przypadek $(\Rightarrow \neg)$

$\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi := \Gamma \Rightarrow \Delta', \neg\psi, \varphi$ i wydedukowana z $\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta', \varphi$.

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

P. 1.1., P. 2.2. Przypadek $(\Rightarrow \neg)$
$\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi := \Gamma \Rightarrow \Delta', \neg\psi, \varphi$ i wydedukowana z $\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta', \varphi$.
Sekwent-przesłanka ma dowód długości $n - 1$ zatem podpada pod zał. ind., tzn. jeżeli $\vdash \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta', \varphi$ i $\vdash \varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma$ (tj. prawa przesłanka), to również dowiedlne jest $\psi, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta', \Sigma$, skąd przez $(\Rightarrow \neg)$ mamy $\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta', \neg\psi, \Sigma := \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$.

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

P. 1.1., P. 2.2. Przypadek $(\Rightarrow \wedge)$

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

P. 1.1., P. 2.2. Przypadek $(\Rightarrow \wedge)$

$\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi := \Gamma \Rightarrow \Delta', \psi \wedge \chi, \varphi$ i wydedukowana z $\Gamma \Rightarrow \Delta', \psi, \varphi$ oraz $\Gamma \Rightarrow \Delta', \chi, \varphi$.

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

P. 1.1., P. 2.2. Przypadek $(\Rightarrow \wedge)$

$\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi := \Gamma \Rightarrow \Delta', \psi \wedge \chi, \varphi$ i wydedukowana z $\Gamma \Rightarrow \Delta', \psi, \varphi$ oraz $\Gamma \Rightarrow \Delta', \chi, \varphi$.

Oba sekwenty-przesłanki mają dowody długości $< n$ zatem podpadają pod zał. ind., tzn., że (w połączeniu z prawą przesłanką) dowiedlne jest zarówno $\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta', \Sigma, \psi$, jak i $\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta', \Sigma, \chi$, skąd przez $(\Rightarrow \wedge)$ mamy $\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta', \psi \wedge \chi, \Sigma := \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$.

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

P. 1.1., P. 2.2. Przypadek $(\Rightarrow \wedge)$
$\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi := \Gamma \Rightarrow \Delta', \psi \wedge \chi, \varphi$ i wydedukowana z $\Gamma \Rightarrow \Delta', \psi, \varphi$ oraz $\Gamma \Rightarrow \Delta', \chi, \varphi$.
Oba sekwenty-przesłanki mają dowody długości $< n$ zatem podpadają pod zał. ind., tzn., że (w połączeniu z prawą przesłanką) dowiedlne jest zarówno $\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta', \Sigma, \psi$, jak i $\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta', \Sigma, \chi$, skąd przez $(\Rightarrow \wedge)$ mamy $\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta', \psi \wedge \chi, \Sigma := \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$.
Zadanie: dowiedź pozostałe przypadki

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

P. 1.1., P. 2.2. Przypadek $(\Rightarrow \wedge)$
$\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi := \Gamma \Rightarrow \Delta', \psi \wedge \chi, \varphi$ i wydedukowana z $\Gamma \Rightarrow \Delta', \psi, \varphi$ oraz $\Gamma \Rightarrow \Delta', \chi, \varphi$.
Oba sekwenty-przesłanki mają dowody długości $< n$ zatem podpadają pod zał. ind., tzn., że (w połączeniu z prawą przesłanką) dowiedlne jest zarówno $\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta', \Sigma, \psi$, jak i $\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta', \Sigma, \chi$, skąd przez $(\Rightarrow \wedge)$ mamy $\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta', \psi \wedge \chi, \Sigma := \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$.
Zadanie: dowiedź pozostałe przypadki
Dowiedliśmy (przez indukcję po długości dowodu lewej przesłanki), że dla dowolnej zmiennej φ jeżeli $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ i $\vdash \varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma$, to również $\vdash \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$.

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

P. 1.2. założenie indukcyjne: (Cut) na φ o długości $< n$ jest dopuszczalny.

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

P. 1.2. założenie indukcyjne: (Cut) na φ o długości $< n$ jest dopuszczalny.
Dowodzimy, że (Cut) na φ o długości n też jest dopuszczalny.

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

P. 1.2. założenie indukcyjne: (Cut) na φ o długości $< n$ jest dopuszczalny.
Dowodzimy, że (Cut) na φ o długości n też jest dopuszczalny.
Dowód przez rozważenie wszystkich przypadków φ.

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

P. 1.2. założenie indukcyjne: (Cut) na φ o długości $< n$ jest dopuszczalny.
Dowodzimy, że (Cut) na φ o długości n też jest dopuszczalny.
Dowód przez rozważenie wszystkich przypadków φ.

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

P. 1.2. przypadek $\varphi := \neg\psi$

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

P. 1.2. przypadek $\varphi := \neg\psi$

Obie przesłanki (Cut) mają postać $\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\psi$ i $\neg\psi, \Pi \Rightarrow \Sigma$.

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

P. 1.2. przypadek $\varphi := \neg\psi$
Obie przesłanki (Cut) mają postać $\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\psi$ i $\neg\psi, \Pi \Rightarrow \Sigma$.
Z lematu o inwersji dowód mają też ich przesłanki, tj. $\vdash \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ i $\vdash \Pi \Rightarrow \Sigma, \psi$, zatem z zał. ind. (bo ψ ma długość $n-1$) dowiedlne jest $\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$.

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

P. 1.2. przypadek $\varphi := \psi \wedge \chi$

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

P. 1.2. przypadek $\varphi := \psi \wedge \chi$
Obie przesłanki (Cut) mają postać $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \chi$ i $\psi \wedge \chi, \Pi \Rightarrow \Sigma$.

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

P. 1.2. przypadek $\varphi := \psi \wedge \chi$
Obie przesłanki (Cut) mają postać $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \chi$ i $\psi \wedge \chi, \Pi \Rightarrow \Sigma$.
Z lematu o inwersji dowód mają też ich przesłanki, tj. (i) $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi$, (ii) $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta, \chi$ i (iii) $\vdash \psi, \chi, \Pi \Rightarrow \Sigma$, zatem z zał. ind. (bo ψ i χ mają długość $< n$), (i) i (iii) dowiedlne jest $\chi, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$, skąd, przez (ii) i zał. ind. mamy dowód $\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$.

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

P. 1.2. przypadek $\varphi := \psi \wedge \chi$
Obie przesłanki (Cut) mają postać $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \chi$ i $\psi \wedge \chi, \Pi \Rightarrow \Sigma$.
Z lematu o inwersji dowód mają też ich przesłanki, tj. (i) $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi$, (ii) $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta, \chi$ i (iii) $\vdash \psi, \chi, \Pi \Rightarrow \Sigma$, zatem z zał. ind. (bo ψ i χ mają długość $< n$), (i) i (iii) dowiedlne jest $\chi, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$, skąd, przez (ii) i zał. ind. mamy dowód $\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$.
Zadanie: dowiedź pozostałe przypadki

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

Dowiedliśmy (przez indukcję po długości cut-formuły), że dla dowolnej φ jeżeli $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ i $\vdash \varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma$, to również $\vdash \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$.

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

Dowiedliśmy (przez indukcję po długości cut-formuły), że dla dowolnej φ jeżeli $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ i $\vdash \varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma$, to również $\vdash \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$.
Zadanie: przeprowadź dowód dopuszczalności (Cut) symetrycznie, tzn. dokonując w P. 2.1., 2.2. indukcji po długości prawej przesłanki (Cut).

Pełność RS metodą Lindenbauma

Niesprzeczność par zbiorów formuł

Dopuszczalność (Cut) pozwala na udowodnienie:

Pełność RS metodą Lindenbauma

Niesprzeczność par zbiorów formuł

Dopuszczalność (Cut) pozwala na udowodnienie:
Lemat28: Jeżeli (Γ, Δ) jest niesprzeczna, to $(\Gamma \cup \{\varphi\}, \Delta)$ jest niesprzeczna lub $(\Gamma, \Delta \cup \{\varphi\})$ jest niesprzeczna, dla dowolnej formuły φ

Pełność RS metodą Lindenbauma

Niesprzeczność par zbiorów formuł

Dopuszczalność (Cut) pozwala na udowodnienie:
Lemat28: Jeżeli (Γ, Δ) jest niesprzeczna, to $(\Gamma \cup \{\varphi\}, \Delta)$ jest niesprzeczna lub $(\Gamma, \Delta \cup \{\varphi\})$ jest niesprzeczna, dla dowolnej formuły φ
Dowód: Załóżmy niewprost, że oba zbiory są sprzeczne, wtedy zarówno $\vdash \Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta$ jak i $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ Przez (Cut) otrzymamy $\Gamma \Rightarrow \Delta$, co przeczy założeniu.

Pełność RS metodą Lindenbauma

Niesprzeczność par zbiorów formuł

Dopuszczalność (Cut) pozwala na udowodnienie:
Lemat28: Jeżeli (Γ, Δ) jest niesprzeczna, to $(\Gamma \cup \{\varphi\}, \Delta)$ jest niesprzeczna lub $(\Gamma, \Delta \cup \{\varphi\})$ jest niesprzeczna, dla dowolnej formuły φ
Dowód: Załóżmy niewprost, że oba zbiory są sprzeczne, wtedy zarówno $\vdash \Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta$ jak i $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ Przez (Cut) otrzymamy $\Gamma \Rightarrow \Delta$, co przeczy założeniu.
Uwaga: bez (Cut) nie mogliśmy dowieść tej własności niesprzecznych par formuł.

Pełność RS metodą Lindenbauma

Maksymalność par zbiorów formuł

Aby dowieść pełności RS metodą Henkina-Lindenbauma musimy uogólnić pojęcie zbioru maksymalnego na pary formuł.

Pełność RS metodą Lindenbauma

Maksymalność par zbiorów formuł

Aby dowieść pełności RS metodą Henkina-Lindenbauma musimy uogólnić pojęcie zbioru maksymalnego na pary formuł.
(Γ, Δ) jest maksymalna wtw $\Gamma \cup \Delta =$FOR

Pełność RS metodą Lindenbauma

Maksymalność par zbiorów formuł

Aby dowieść pełności RS metodą Henkina-Lindenbauma musimy uogólnić pojęcie zbioru maksymalnego na pary formuł.
(Γ, Δ) jest maksymalna wtw $\Gamma \cup \Delta =$FOR
Lemat29: Jeżeli (Γ, Δ) jest niesprzeczna i maksymalna, to:

Pełność RS metodą Lindenbauma

Maksymalność par zbiorów formuł

Aby dowieść pełności RS metodą Henkina-Lindenbauma musimy uogólnić pojęcie zbioru maksymalnego na pary formuł.
(Γ, Δ) jest maksymalna wtw $\Gamma \cup \Delta =$FOR
Lemat29: Jeżeli (Γ, Δ) jest niesprzeczna i maksymalna, to:

1. jeżeli $\varphi \notin \Gamma$, to $\varphi \in \Delta$

Pełność RS metodą Lindenbauma

Maksymalność par zbiorów formuł

Aby dowieść pełności RS metodą Henkina-Lindenbauma musimy uogólnić pojęcie zbioru maksymalnego na pary formuł.
(Γ, Δ) jest maksymalna wtw $\Gamma \cup \Delta =$FOR
Lemat29: Jeżeli (Γ, Δ) jest niesprzeczna i maksymalna, to:

1. jeżeli $\varphi \notin \Gamma$, to $\varphi \in \Delta$
2. jeżeli $\varphi \notin \Delta$, to $\varphi \in \Gamma$

Pełność RS metodą Lindenbauma

Maksymalność par zbiorów formuł

Aby dowieść pełności RS metodą Henkina-Lindenbauma musimy uogólnić pojęcie zbioru maksymalnego na pary formuł.
(Γ, Δ) jest maksymalna wtw $\Gamma \cup \Delta =$FOR
Lemat29: Jeżeli (Γ, Δ) jest niesprzeczna i maksymalna, to:

1. jeżeli $\varphi \notin \Gamma$, to $\varphi \in \Delta$
2. jeżeli $\varphi \notin \Delta$, to $\varphi \in \Gamma$
3. jeżeli $\neg\varphi \notin \Gamma$, to $\varphi \in \Gamma$

Pełność RS metodą Lindenbauma

Maksymalność par zbiorów formuł

Aby dowieść pełności RS metodą Henkina-Lindenbauma musimy uogólnić pojęcie zbioru maksymalnego na pary formuł.
(Γ, Δ) jest maksymalna wtw $\Gamma \cup \Delta =$FOR
Lemat29: Jeżeli (Γ, Δ) jest niesprzeczna i maksymalna, to:

1. jeżeli $\varphi \notin \Gamma$, to $\varphi \in \Delta$
2. jeżeli $\varphi \notin \Delta$, to $\varphi \in \Gamma$
3. jeżeli $\neg\varphi \notin \Gamma$, to $\varphi \in \Gamma$
4. jeżeli $\neg\varphi \notin \Delta$, to $\varphi \in \Delta$

Pełność RS metodą Lindenbauma

Maksymalność par zbiorów formuł

Aby dowieść pełności RS metodą Henkina-Lindenbauma musimy uogólnić pojęcie zbioru maksymalnego na pary formuł.
(Γ, Δ) jest maksymalna wtw $\Gamma \cup \Delta =$FOR
Lemat29: Jeżeli (Γ, Δ) jest niesprzeczna i maksymalna, to:

1. jeżeli $\varphi \notin \Gamma$, to $\varphi \in \Delta$
2. jeżeli $\varphi \notin \Delta$, to $\varphi \in \Gamma$
3. jeżeli $\neg\varphi \notin \Gamma$, to $\varphi \in \Gamma$
4. jeżeli $\neg\varphi \notin \Delta$, to $\varphi \in \Delta$

Dowód: Dla 3. – gdyby zarówno $\neg\varphi \notin \Gamma$ jak i $\varphi \notin \Gamma$, to – z racji maksymalności – $\{\neg\varphi, \varphi\} \subseteq \Delta$. Ale $\vdash\Rightarrow \neg\varphi, \varphi$, co przeczy niesprzeczności (Γ, Δ).

Pełność RS metodą Lindenbauma

Maksymalność par zbiorów formuł

Pełność RS metodą Lindenbauma

Maksymalność par zbiorów formuł

Odpowiednik lematu Lindenbauma dla par zbiorów formuł.

Pełność RS metodą Lindenbauma

Maksymalność par zbiorów formuł

Odpowiednik lematu Lindenbauma dla par zbiorów formuł.

Lemat30: Jeżeli (Γ, Δ) jest niesprzeczna, to istnieje maksymalna i niesprzeczna (Γ', Δ') taka, że $\Gamma \subseteq \Gamma'$ i $\Delta \subseteq \Delta'$

Pełność RS metodą Lindenbauma

Maksymalność par zbiorów formuł

Odpowiednik lematu Lindenbauma dla par zbiorów formuł.
Lemat30: Jeżeli (Γ, Δ) jest niesprzeczna, to istnieje maksymalna i niesprzeczna (Γ', Δ') taka, że $\Gamma \subseteq \Gamma'$ i $\Delta \subseteq \Delta'$
Dowód: Z racji przeliczalności FOR możemy uporządkować liniowo ten zbiór i kolejno dodawać każdą formułę do Γ lub Δ. Dokładniej, niech $\varphi_1, \varphi_2, ...$ będzie nieskończoną listą wszystkich formuł .

Pełność RS metodą Lindenbauma

Maksymalność par zbiorów formuł

Odpowiednik lematu Lindenbauma dla par zbiorów formuł.
Lemat30: Jeżeli (Γ, Δ) jest niesprzeczna, to istnieje maksymalna i niesprzeczna (Γ', Δ') taka, że $\Gamma \subseteq \Gamma'$ i $\Delta \subseteq \Delta'$
Dowód: Z racji przeliczalności FOR możemy uporządkować liniowo ten zbiór i kolejno dodawać każdą formułę do Γ lub Δ. Dokładniej, niech $\varphi_1, \varphi_2, ...$ będzie nieskończoną listą wszystkich formuł .
Definiujemy nieskończony ciąg sekwentów $\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0$, $\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1$, ... taki, że $\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0 := \Gamma \Rightarrow \Delta$,

Pełność RS metodą Lindenbauma

Maksymalność par zbiorów formuł

Odpowiednik lematu Lindenbauma dla par zbiorów formuł.
Lemat30: Jeżeli (Γ, Δ) jest niesprzeczna, to istnieje maksymalna i niesprzeczna (Γ', Δ') taka, że $\Gamma \subseteq \Gamma'$ i $\Delta \subseteq \Delta'$
Dowód: Z racji przeliczalności FOR możemy uporządkować liniowo ten zbiór i kolejno dodawać każdą formułę do Γ lub Δ. Dokładniej, niech $\varphi_1, \varphi_2, ...$ będzie nieskończoną listą wszystkich formuł .
Definiujemy nieskończony ciąg sekwentów $\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0$, $\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1$, ... taki, że $\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0 := \Gamma \Rightarrow \Delta$,

a dla każdego $i \geq 0$,

Pełność RS metodą Lindenbauma

Maksymalność par zbiorów formuł

Odpowiednik lematu Lindenbauma dla par zbiorów formuł.
Lemat30: Jeżeli (Γ, Δ) jest niesprzeczna, to istnieje maksymalna i niesprzeczna (Γ', Δ') taka, że $\Gamma \subseteq \Gamma'$ i $\Delta \subseteq \Delta'$
Dowód: Z racji przeliczalności FOR możemy uporządkować liniowo ten zbiór i kolejno dodawać każdą formułę do Γ lub Δ. Dokładniej, niech $\varphi_1, \varphi_2, ...$ będzie nieskończoną listą wszystkich formuł .
Definiujemy nieskończony ciąg sekwentów $\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0$, $\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1$, ...
taki, że $\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0 := \Gamma \Rightarrow \Delta$,
a dla każdego $i \geq 0$,
$\Gamma_{i+1} \Rightarrow \Delta_{i+1} := \Gamma_i \Rightarrow \Delta_i, \varphi_{i+1}$, jeżeli $(\Gamma_i, \Delta_i \cup \{\varphi_{i+1}\})$ jest niesprzeczna;

Pełność RS metodą Lindenbauma

Maksymalność par zbiorów formuł

Odpowiednik lematu Lindenbauma dla par zbiorów formuł.
Lemat30: Jeżeli (Γ, Δ) jest niesprzeczna, to istnieje maksymalna i niesprzeczna (Γ', Δ') taka, że $\Gamma \subseteq \Gamma'$ i $\Delta \subseteq \Delta'$
Dowód: Z racji przeliczalności FOR możemy uporządkować liniowo ten zbiór i kolejno dodawać każdą formułę do Γ lub Δ. Dokładniej, niech $\varphi_1, \varphi_2, \ldots.$ będzie nieskończoną listą wszystkich formuł .
Definiujemy nieskończony ciąg sekwentów $\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0$, $\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1$, ...
taki, że $\Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0 := \Gamma \Rightarrow \Delta$,
    a dla każdego $i \geq 0$,
$\Gamma_{i+1} \Rightarrow \Delta_{i+1} := \Gamma_i \Rightarrow \Delta_i, \varphi_{i+1}$, jeżeli $(\Gamma_i, \Delta_i \cup \{\varphi_{i+1}\})$ jest niesprzeczna;
w przeciwnym wypadku $\Gamma_{i+1} \Rightarrow \Delta_{i+1} := \Gamma_i, \varphi_{i+1} \Rightarrow \Delta_i$.

Pełność RS metodą Lindenbauma

Maksymalność par zbiorów formuł

Z lematu 28 i konstrukcji ciągu wynika, że na każdym etapie przynajmniej jedna z rozważanej pary sekwentów jest niesprzeczna, zatem każdy kolejny element ciągu sekwentów jest niesprzeczny.

Pełność RS metodą Lindenbauma

Maksymalność par zbiorów formuł

Z lematu 28 i konstrukcji ciągu wynika, że na każdym etapie przynajmniej jedna z rozważanej pary sekwentów jest niesprzeczna, zatem każdy kolejny element ciągu sekwentów jest niesprzeczny.
Niech $\Gamma' = \bigcup \Gamma_i$, a $\Delta' = \bigcup \Delta_i$, dla $i < \omega$

Pełność RS metodą Lindenbauma

Maksymalność par zbiorów formuł

Z lematu 28 i konstrukcji ciągu wynika, że na każdym etapie przynajmniej jedna z rozważanej pary sekwentów jest niesprzeczna, zatem każdy kolejny element ciągu sekwentów jest niesprzeczny.

Niech $\Gamma' = \bigcup \Gamma_i$, a $\Delta' = \bigcup \Delta_i$, dla $i < \omega$

Jest oczywiste, że $\Gamma' \cup \Delta' = FOR$, (Γ', Δ') jest zatem maksymalna.

Pełność RS metodą Lindenbauma

Maksymalność par zbiorów formuł

Z lematu 28 i konstrukcji ciągu wynika, że na każdym etapie przynajmniej jedna z rozważanej pary sekwentów jest niesprzeczna, zatem każdy kolejny element ciągu sekwentów jest niesprzeczny.
Niech $\Gamma' = \bigcup \Gamma_i$, a $\Delta' = \bigcup \Delta_i$, dla $i < \omega$
Jest oczywiste, że $\Gamma' \cup \Delta' = FOR$, (Γ', Δ') jest zatem maksymalna. Załóżmy niewprost, że (Γ', Δ') jest sprzeczna. Ponieważ każdy dowód jest skończony oznacza to, że istnieje skończona para (Π, Σ), taka, że $\Pi \subseteq \Gamma', \Sigma \subseteq \Delta'$ oraz $\Pi \Rightarrow \Sigma$ ma dowód. Z racji skończoności (Π, Σ) istnieje w konstrukcji ciągu sekwentów taki etap i, że $\Pi \subseteq \Gamma_i$ i $\Sigma \subseteq \Delta_i$, ale to oznacza, że $\Gamma_i \Rightarrow \Delta_i$ jest sprzeczna, wbrew temu, co dowiedliśmy wyżej. Z definicji konstrukcji ciągu mamy też, że $\Gamma \subseteq \Gamma'$ i $\Delta \subseteq \Delta'$. Zatem (Γ, Δ) można poszerzyć do niesprzecznej pary maksymalnej.

Pełność RS metodą Lindenbauma

Lemat prawdziwościowy

Lemat31: Jeżeli (Γ, Δ) jest maksymalna, to istnieje model $\mathfrak{M}$, taki, że:

Pełność RS metodą Lindenbauma

Lemat prawdziwościowy

Lemat31: Jeżeli (Γ, Δ) jest maksymalna, to istnieje model $\mathfrak{M}$, taki, że:

- $\varphi \in \Gamma$ wtw $\mathfrak{M} \vDash \varphi$
- $\varphi \in \Delta$ wtw $\mathfrak{M} \nvDash \varphi$

Pełność RS metodą Lindenbauma

Lemat prawdziwościowy

Lemat31: Jeżeli (Γ, Δ) jest maksymalna, to istnieje model $\mathfrak{M}$, taki, że:

- $\varphi \in \Gamma$ wtw $\mathfrak{M} \models \varphi$
- $\varphi \in \Delta$ wtw $\mathfrak{M} \not\models \varphi$

Dowód: Definujemy model przyjmując, że $\mathfrak{M} = \mathrm{Var}(\Gamma)$ i dowodzimy, że spełnia warunki przez indukcję po długości formuł.

Pełność RS metodą Lindenbauma

Lemat prawdziwościowy

Lemat31: Jeżeli (Γ, Δ) jest maksymalna, to istnieje model $\mathfrak{M}$, taki, że:

- $\varphi \in \Gamma$ wtw $\mathfrak{M} \models \varphi$
- $\varphi \in \Delta$ wtw $\mathfrak{M} \not\models \varphi$

Dowód: Definujemy model przyjmując, że $\mathfrak{M} = \mathsf{Var}(\Gamma)$ i dowodzimy, że spełnia warunki przez indukcję po długości formuł. Baza wynika z definicji.

Pełność RS metodą Lindenbauma

Lemat prawdziwościowy

Lemat31: Jeżeli (Γ, Δ) jest maksymalna, to istnieje model $\mathfrak{M}$, taki, że:

- $\varphi \in \Gamma$ wtw $\mathfrak{M} \models \varphi$
- $\varphi \in \Delta$ wtw $\mathfrak{M} \not\models \varphi$

Dowód: Definujemy model przyjmując, że $\mathfrak{M} = \mathrm{Var}(\Gamma)$ i dowodzimy, że spełnia warunki przez indukcję po długości formuł.
Baza wynika z definicji.
Niech $\varphi := \neg\psi$:

Pełność RS metodą Lindenbauma

Lemat prawdziwościowy

Lemat31: Jeżeli (Γ, Δ) jest maksymalna, to istnieje model $\mathfrak{M}$, taki, że:

- $\varphi \in \Gamma$ wtw $\mathfrak{M} \models \varphi$
- $\varphi \in \Delta$ wtw $\mathfrak{M} \not\models \varphi$

Dowód: Definujemy model przyjmując, że $\mathfrak{M} = \mathrm{Var}(\Gamma)$ i dowodzimy, że spełnia warunki przez indukcję po długości formuł.
Baza wynika z definicji.
Niech $\varphi := \neg\psi$:
a) jeżeli $\neg\psi \in \Gamma$, to – przez lemat 24, 3. – $\psi \notin \Gamma$, a przez lemat 29, 1. – $\psi \in \Delta$. Z założenia indukcyjnego $\mathfrak{M} \not\models \psi$, zatem $\mathfrak{M} \models \neg\psi$.
Podobnie w drugą stronę.

Pełność RS metodą Lindenbauma

Lemat prawdziwościowy

Lemat31: Jeżeli (Γ, Δ) jest maksymalna, to istnieje model $\mathfrak{M}$, taki, że:

- $\varphi \in \Gamma$ wtw $\mathfrak{M} \models \varphi$
- $\varphi \in \Delta$ wtw $\mathfrak{M} \not\models \varphi$

Dowód: Definujemy model przyjmując, że $\mathfrak{M} = \mathrm{Var}(\Gamma)$ i dowodzimy, że spełnia warunki przez indukcję po długości formuł.
Baza wynika z definicji.
Niech $\varphi := \neg\psi$:
a) jeżeli $\neg\psi \in \Gamma$, to – przez lemat 24, 3. – $\psi \notin \Gamma$, a przez lemat 29, 1. – $\psi \in \Delta$. Z założenia indukcyjnego $\mathfrak{M} \not\models \psi$, zatem $\mathfrak{M} \models \neg\psi$.
Podobnie w drugą stronę.
Dowiedź pozostałych przypadków.

Pełność RS metodą Lindenbauma

Alternatywne ujęcie maksymalności par zbiorów formuł

Można dowieść, że maksymalna para zbiorów ma następujące własności:

Pełność RS metodą Lindenbauma

Alternatywne ujęcie maksymalności par zbiorów formuł

Można dowieść, że maksymalna para zbiorów ma następujące własności:

1. $\neg\varphi \in \Gamma$ wtw $\varphi \in \Delta$
2. $\neg\varphi \in \Delta$ wtw $\varphi \in \Gamma$
3. $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$ wtw $\varphi \in \Gamma$ i $\psi \in \Gamma$
4. $\varphi \wedge \psi \in \Delta$ wtw $\varphi \in \Delta$ lub $\psi \in \Delta$
5. $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ wtw $\varphi \in \Gamma$ lub $\psi \in \Gamma$
6. $\varphi \vee \psi \in \Delta$ wtw $\varphi \in \Delta$ i $\psi \in \Delta$
7. $\varphi \to \psi \in \Gamma$ wtw $\varphi \in \Delta$ lub $\psi \in \Gamma$
8. $\varphi \to \psi \in \Delta$ wtw $\varphi \in \Gamma$ i $\psi \in \Delta$

Pełność RS metodą Lindenbauma

Alternatywne ujęcie maksymalności par zbiorów formuł

Można dowieść, że maksymalna para zbiorów ma następujące własności:

1. $\neg\varphi \in \Gamma$ wtw $\varphi \in \Delta$
2. $\neg\varphi \in \Delta$ wtw $\varphi \in \Gamma$
3. $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$ wtw $\varphi \in \Gamma$ i $\psi \in \Gamma$
4. $\varphi \wedge \psi \in \Delta$ wtw $\varphi \in \Delta$ lub $\psi \in \Delta$
5. $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ wtw $\varphi \in \Gamma$ lub $\psi \in \Gamma$
6. $\varphi \vee \psi \in \Delta$ wtw $\varphi \in \Delta$ i $\psi \in \Delta$
7. $\varphi \to \psi \in \Gamma$ wtw $\varphi \in \Delta$ lub $\psi \in \Gamma$
8. $\varphi \to \psi \in \Delta$ wtw $\varphi \in \Gamma$ i $\psi \in \Delta$

i wykorzystać to w dowodzie lematu prawdziwościowego zamiast odwoływać się do lematu 24 i lematu 29.