MOŻLIWE ŚWIATY; WPROWADZENIE DO LOGIK MODALNYCH

Wykład w semestrze zimowym 2004/2005 dla studentów filozofii

(wykłady 3-11)

Andrzej Indrzejczak

Spis treści

8. Dedukcja naturalna i etykietowane systemy tableaux

9. Logiki okresów warunkowych

10. Logiki hybrydowe

11. Semantyka topologiczna dla słabych logik modalnych

12. Problemy logik modalnych 1-go rzędu – sztywna denotacja, aktualizm a possybilizm

13. Logiki wolne i ich zastosowanie w logice modalnej

14. Identyczność i deskrypcje określone

Logika S5: Semantyka

Definicja 1 (Modele S5) *Modelem* **S5** *jest dowolna para* $\mathfrak{M} = \langle\, \mathcal{W}, V \rangle$, *gdzie:*

- *dziedzina modelu to* $\mathcal{W} \neq \varnothing$, *który jest zbiorem punktów (światów możliwych);*

- V *jest funkcją ewaluacji (wartościowania) dla zmiennych w punktach dziedziny, tj.* $V : ZZ \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{W})$ *(*ZZ *to zbiór zmiennych zdaniowych a* $\mathcal{P}(\mathcal{W})$ *to zbiór potęgowy na* $\mathcal{W}$*)*

Zbiór wszystkich modeli **S5** *oznaczać będziemy symbolem* $MOD(\mathbf{S5})$.

Dziedzinę danego modelu $\mathfrak{M}$ *będziemy oznaczać przez* $\mathcal{W}_{\mathfrak{M}}$.

Definicję spełniania formuły φ w punkcie w modelu $\mathfrak{M}$ ($\mathfrak{M}, w \models \varphi$) wyrażają poniższe warunki:

$\mathfrak{M}, w \models \varphi$	wtw	$w \in V(\varphi)$
		dla dowolnej $\varphi \in ZZ$
$\mathfrak{M}, w \models \neg\varphi$	wtw	$\mathfrak{M}, w \not\models \varphi$
$\mathfrak{M}, w \models \varphi \wedge \psi$	wtw	$\mathfrak{M}, w \models \varphi$ i $\mathfrak{M}, w \models \psi$
$\mathfrak{M}, w \models \varphi \vee \psi$	wtw	$\mathfrak{M}, w \models \varphi$ lub $\mathfrak{M}, w \models \psi$
$\mathfrak{M}, w \models \varphi \rightarrow \psi$	wtw	$\mathfrak{M}, w \not\models \varphi$ lub $\mathfrak{M}, w \models \psi$
$\mathfrak{M}, w \models \Box\varphi$	wtw	$\mathfrak{M}, w' \models \varphi$
		dla dowolnego $w' \in \mathcal{W}_{\mathfrak{M}}$
$\mathfrak{M}, w \models \Diamond\varphi$	wtw	$\mathfrak{M}, w' \models \varphi$
		dla pewnego $w' \in \mathcal{W}_{\mathfrak{M}}$

Dla zbiorów formuł zapis $\mathfrak{M}, w \models \Gamma$ oznacza, że $\mathfrak{M}, w \models \psi$ dla $\forall_{\psi \in \Gamma}$.

$\mathfrak{M}, w \not\models \varphi$ oznacza fałszywość formuły φ w w; $\mathfrak{M}, w \not\models \Gamma$ oznacza fałszywość co najmniej jednego elementu Γ w w.

W przypadku gdy model jest ustalony, bądź domyślny będziemy po prostu pisać $w \models \varphi$ (względnie $w \not\models \varphi$) lub $w \models \Gamma$ (względnie $w \not\models \Gamma$) dla zbioru.

Zbiór wszystkich punktów spełniających daną formułę (zbiór) oznaczamy:

$\|\varphi\|_{\mathfrak{M}} = \{w \in \mathcal{W}_{\mathfrak{M}} : w \models \varphi\}$;

$\|\Gamma\|_{\mathfrak{M}} = \bigcap \|\psi\|_{\mathfrak{M}}$ dla $\forall_{\psi \in \Gamma}$

Zazwyczaj używać będziemy notacji skróconej $\|\varphi\|$ ($\|\Gamma\|$) przy $\mathfrak{M}$ domyślnym lub ustalonym.

$\|\varphi\|$ będziemy czytać dla wygody zwyczajowo jako "sąd φ" (intensja φ) w danym $\mathfrak{M}$.

Przykład 1: Niech $\mathfrak{M} = \langle \{w_1, w_2, w_3\}, V(p) = \{w_1, w_3\}, V(q) = \{w_2, w_3\} \ldots \rangle$, to:

- $w_1 \models p \vee \Box q$
- $w_2 \models p \vee \Diamond q$
- $w_2 \not\models p \vee \Box q$
- $w_1 \models \Box(p \vee q)$
- $w_1 \not\models \Box(p \wedge q)$
- $w_1 \models \Diamond(p \wedge q)$
- $w_1 \models \Box(q \rightarrow (\Diamond p \vee \Diamond q))$

c.d. przykładu 1:

(ten sam model $\mathfrak{M} = \langle\{w_1, w_2, w_3\},\ V(p) = \{w_1, w_3\}, V(q) = \{w_2, w_3\}\ldots\rangle$)

- $\|\Diamond p\| = \mathcal{W}$
- $\|\Box p\| = \varnothing$
- $\|p \vee \Box q\| = \{w_1, w_3\}$
- $\|p \rightarrow \Box q\| = \{w_2\}$
- $\|\{p \vee \Box q, p \wedge q\}\| = \|p \vee \Box q\| \cap \|p \wedge q\| = \{w_3\}$
- $\|\{p \vee \Box q, p \rightarrow \Box q\}\| = \varnothing$

Definicja 2 (Spełnialność, falsyfikowalność) φ (Γ) *jest <u>spełnialna w modelu $\mathfrak{M}$</u> wtw,* $\|\varphi\| \neq \varnothing$ $(\|\Gamma\| \neq \varnothing)$.

φ (Γ) *jest <u>spełnialna</u> wtw, istnieje model, w którym jest spełnialna.*

φ (Γ) *jest <u>sfalsyfikowana w modelu $\mathfrak{M}$</u> wtw,* $\|\varphi\| \neq \mathcal{W}_{\mathfrak{M}}$ $(\|\Gamma\| \neq \mathcal{W}_{\mathfrak{M}})$ (*inaczej:* $\mathfrak{M}$ *falsyfikuje* φ (Γ)).

φ (Γ) *jest <u>sfalsyfikowana</u> wtw, istnieje model, w którym jest sfalsyfikowana.*

Przykład 2: $\Diamond p \wedge \Box(p \rightarrow \Diamond\neg p)$ jest spełnialne.

Definicja spełniania formuły (czy zbioru formuł) w modelu daje nam *lokalną* charakterystykę prawdziwości. Dalszym krokiem jest wprowadzenie pojęcia *globalnej prawdziwości*:

Definicja 3 (Prawdziwość w modelu) $\mathfrak{M} \vDash \varphi$ *wtw,* $\forall_{w \in \mathcal{W}_{\mathfrak{M}}}, \mathfrak{M}, w \vDash \varphi$*(lub* $\|\varphi\|_{\mathfrak{M}} = \mathcal{W}_{\mathfrak{M}}$*);*

analogicznie dla Γ, $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$ *wtw,* $\|\Gamma\|_{\mathfrak{M}} = \mathcal{W}_{\mathfrak{M}}$.

Zawartością modelu $\mathfrak{M}$ *nazywamy zbiór* $E(\mathfrak{M}) = \{\varphi : \mathfrak{M} \vDash \varphi\}$.

Zbiór wszystkich modeli, w których φ (Γ) *jest globalnie prawdziwa, to* $Mod(\varphi) = \{\mathfrak{M} : \mathfrak{M} \vDash \varphi\}$ $(Mod(\Gamma) = \{\mathfrak{M} : \mathfrak{M} \vDash \Gamma\})$

Trzeci poziom prawdziwości to tautologiczność, czyli prawdziwość w każdym modelu.

Definicja 4 (Prawdziwość w każdym modelu)

$$\models \varphi \ wtw, \ \forall_{\mathfrak{M} \in MOD(\mathbf{S5})}, \mathfrak{M} \vDash \varphi$$

(*inaczej:* $\models \varphi \ wtw, \ MOD(\mathbf{S5}) \subseteq Mod(\varphi)$).

$\not\models \varphi$ oznacza formułę nietautologiczną, czyli falsyfikowalną.

Przykład 3:

$\models$	$\not\models$
$\Diamond\varphi \leftrightarrow \neg\Box\neg\varphi$	
$\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$	$\Diamond\varphi \rightarrow \varphi$
$\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$	$\Box\Diamond\varphi \rightarrow \varphi$
$\Box\varphi \rightarrow \varphi$	$\varphi \rightarrow \Box\varphi$
$\Diamond\Box\varphi \rightarrow \varphi$	$\varphi \rightarrow \Diamond\Box\varphi$
$\Box\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$	$\Diamond\varphi \rightarrow \Box\varphi$
$\Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi)$	$\leftarrow$
$\Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Diamond\varphi \rightarrow \Diamond\psi)$	$\leftarrow$
$(\Diamond\varphi \rightarrow \Box\psi) \rightarrow \Box(\varphi \rightarrow \psi)$	$\leftarrow$
$\Box\varphi \vee \Box\psi \rightarrow \Box(\varphi \vee \psi)$	$\leftarrow$
$\Diamond(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \Diamond\varphi \wedge \Diamond\psi$	$\leftarrow$
$\Box(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \Box\varphi \wedge \Box\psi$	
$\Diamond(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \Diamond\varphi \vee \Diamond\psi$	
$\Box\varphi \leftrightarrow \Box\Box\varphi$	
$\Diamond\varphi \leftrightarrow \Diamond\Diamond\varphi$	
$\Box\varphi \leftrightarrow \Diamond\Box\varphi$	
$\Diamond\varphi \leftrightarrow \Box\Diamond\varphi$	

Definicja 5 (Wynikanie lokalne i globalne)
1. φ wynika lokalnie z Γ:

$\Gamma \models \varphi$ *wtw,* $\forall_{\mathfrak{M} \in MOD(\mathbf{S5})}(\|\Gamma\|_{\mathfrak{M}} \subseteq \|\varphi\|_{\mathfrak{M}})$
(*inaczej:* $\forall_{\mathfrak{M} \in MOD(\mathbf{S5})}, \forall_{w \in \mathcal{W}_{\mathfrak{M}}}$(*jeżeli* $\mathfrak{M}, w \vDash \Gamma$ *, to* $\mathfrak{M}, w \vDash \varphi$))

2. φ wynika globalnie z Γ:

$\Gamma \mid\models \varphi$ *wtw,* $Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\varphi)$
(*inaczej:* $\forall_{\mathfrak{M} \in MOD(\mathbf{S5})}$(*jeżeli* $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$ *, to* $\mathfrak{M} \vDash \varphi$))

Twierdzenie 1 *Jeżeli $\Gamma \models \varphi$, to $\Gamma \mid\models \varphi$, ale nie odwrotnie.*

Przykład 4:

$\varphi \mid\models \Box\varphi$, ale $\varphi \not\models \Box\varphi$.

Logika S5: Ujęcie aksjomatyczne

A. Schematy aksjomatów:

- Dowolne φ, które jest schematem tezy **KRZ**
- (Dual) $\Diamond\varphi \leftrightarrow \neg\Box\neg\varphi$
- (K) $\Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi)$
- (T) $\Box\varphi \rightarrow \varphi$
- (4) $\Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$
- (B) $\Diamond\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$

B. Reguły pierwotne:

- (MP) jeżeli $\varphi \in \mathbf{S5}$ i $\varphi \to \psi \in \mathbf{S5}$, to $\psi \in \mathbf{S5}$

- (RG) jeżeli $\varphi \in \mathbf{S5}$, to $\Box\varphi \in \mathbf{S5}$

Definicja 6 (dowód, teza) *Dowodem formuły φ jest skończony ciąg, którego dowolny element, to aksjomat lub formuła wydedukowana z
wcześniejszych elementów za pomocą reguł pierwotnych, a ostatni element ciągu to φ.*

φ jest tezą **S5** ($\vdash \varphi$) *wtw, φ ma dowód.*

Twierdzenie 2 (Przystosowanie, pełność, adekwatność (słaba))

(a) Jeżeli $\vdash \varphi$, to $\models \varphi$.
(b) Jeżeli $\models \varphi$, to $\vdash \varphi$.
(c) $\models \varphi$ wtw, $\vdash \varphi$.

Definicja 7 (Dowiedlność lokalna i globalna)
1. $\Gamma \ \vdash \varphi$ *wtw* $\vdash \bigwedge\Gamma' \to \varphi$, *dla pewnego skończonego* $\Gamma' \subseteq \Gamma$

2. $\Gamma \ \Vdash \varphi$ *wtw istnieje dowód* φ *z* Γ *na gruncie* **S5**

$\Vdash$ jest relacją mocniejszą od $\vdash$, gdyż dla $\Vdash$ nie zachodzi *twierdzenie o dedukcji*, które w przypadku $\vdash$ jest spełnione z definicji. Dla przykładu, mamy $p \Vdash \Box p$ (z racji domknięcia na (RG)), ale $p \nvdash \Box p$ (bo $\nvdash p \to \Box p$). Natomiast zachodzi zależność jednostronna:

$$\text{Jeżeli } \Gamma \ \vdash \varphi, \text{ to } \Gamma \ \Vdash \varphi$$

Twierdzenie 3 (Adekwatność mocna)

1. $\Gamma \vdash \varphi$ wtw, $\Gamma \models \varphi$

2. $\Gamma \Vdash \varphi$ wtw, $\Gamma \mid\models \varphi$

Podział logik modalnych

Uwaga: Logiki są tu rozumiane jako zbiory formuł domknięte na pewne operacje (reguły).

Definicja 8 (Logika modalna) *Przez logikę modalną* **L** *rozumiemy dowolny zbiór formuł w pewnym języku modalnym* **J**, *który spełnia następujące warunki:*

- *$TAUT \subseteq$* **L**, *gdzie $TAUT$ to zbiór tautologii* **KRZ**
- *jeżeli $\varphi \in$* **L**, *to e(φ) $\in$* **L**, *gdzie e to dowolny endomorfizm z ZZ w $FOR($***J***$)$*
- *jeżeli $\varphi \in$* **L** *i $\varphi \to \psi \in$* **L**, *to $\psi \in$* **L**

Uwaga: Dla uproszczenia rozważań, ograniczymy się do języka monomodalnego z jednym funktorem konieczności ($\mathbf{J}_\Box$) (zakładamy, że $\Diamond$ jest wprowadzana przez definicję).

Rozważmy następujące reguły:

(RE) jeżeli $\varphi \leftrightarrow \psi \in$ **L**, to $\Box\varphi \leftrightarrow \Box\psi \in$ **L**

(RM) jeżeli $\varphi \rightarrow \psi \in$ **L** , to $\Box\varphi \rightarrow \Box\psi \in$ **L**

(RR) jeżeli $\wedge\Gamma \rightarrow \psi \in$ **L** , to $\wedge\Box\Gamma \rightarrow \Box\psi \in$ **L**, gdzie $\Gamma \neq \varnothing$

(RG) jeżeli $\varphi \in$ **L** , to $\Box\varphi \in$ **L**

Definicja 9 (Klasy logik modalnych) *Dowolna logika modalna* **L** *domknięta na (RE) to* logika kongruencyjna *(klasyczna modalna), domknięta na (RM) to* logika monotoniczna, *domknięta na (RR), to* logika regularna, *wreszcie domknięta na (RR) i (RG) to* logika normalna.

Lemat 1 (Relacje między logikami)

(a) Każda logika normalna jest zarazem regularna;

(b) Każda logika regularna jest zarazem monotoniczna ((RM) jest szczególnym przypadkiem (RR));

(c) Każda logika monotoniczna jest logiką kongruencyjną.

Definicja 10 (Bazowe logiki modalne) *Niech* **E** *oznacza najsłabszą logikę kongruencyjną,* **M** *– monotoniczną,* **R** *– regularną, a* **K** *– normalną.*

Definicja dowodu, tezy i dedukowalności bez zmian; $\vdash_L \varphi$ ($\Gamma \vdash_L \varphi$) oznacza, że φ jest tezą **L** (jest dedukowalne z Γ w **L**).

Monomodalne logiki normalne: semantyka relacyjna

Definicja 11 (Struktura relacyjna)

Strukturą relacyjną, albo ramą (frame) jest dowolna para $\mathfrak{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$ gdzie:

- dziedzina to $\mathcal{W} \neq \varnothing$, który jest zbiorem punktów (światów możliwych);
- $\mathcal{R}$ to binarna relacja na $\mathcal{W}$, zwana relacją osiągalności.

W logikach modalnych aletycznych $\mathcal{R}ww'$ oznacza, że w' jest osiągalne z w (możliwe ze względu na w).

$\mathcal{R}(w) = \{w' : \mathcal{R}ww'\}$ to zbiór dostępnych dla w możliwości.

Definicja 12 (Model na strukturze) *Modelem na danej strukturze $\mathfrak{F}$ jest dowolny układ $\mathfrak{M} = \langle\ \mathfrak{F}, V\rangle$, gdzie V jest funkcją ewaluacji dla zmiennych, tj. $V : ZZ \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{W})$.*

Zbiór wszystkich modeli na danej strukturze oznaczać będziemy symbolem $MOD(\mathfrak{F})$. Zbiór wszystkich modeli relacyjnych (na dowolnej strukturze) oznaczać będziemy symbolem MOD.

Definicję *spełniania formuły φ w punkcie w modelu $\mathfrak{M}$* ($\mathfrak{M}, w \models \varphi$) wyrażają poniższe warunki:

$\mathfrak{M}, w \models \varphi$	wtw	$w \in V(\varphi)$
		dla dowolnej $\varphi \in ZZ$
$\mathfrak{M}, w \models \neg\varphi$	wtw	$\mathfrak{M}, w \not\models \varphi$
$\mathfrak{M}, w \models \varphi \wedge \psi$	wtw	$\mathfrak{M}, w \models \varphi$ i $\mathfrak{M}, w \models \psi$
$\mathfrak{M}, w \models \varphi \vee \psi$	wtw	$\mathfrak{M}, w \models \varphi$ lub $\mathfrak{M}, w \models \psi$
$\mathfrak{M}, w \models \varphi \rightarrow \psi$	wtw	$\mathfrak{M}, w \not\models \varphi$ lub $\mathfrak{M}, w \models \psi$
$\mathfrak{M}, w \models \Box\varphi$	wtw	$\mathfrak{M}, w' \models \varphi$
		dla dowolnego $w' \in \mathcal{R}(w)$
$\mathfrak{M}, w \models \Diamond\varphi$	wtw	$\mathfrak{M}, w' \models \varphi$
		dla pewnego $w' \in \mathcal{R}(w)$

Uwaga: definicje spełniania, falsyfikowania, prawdziwości w modelu (we wszystkich modelach) i wynikania pozostają bez zmian.

Przykład 1: Rozważmy strukturę $\mathfrak{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$ gdzie: $\mathcal{W} = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$, a $\mathcal{R} = \{\langle w_1, w_2 \rangle, \langle w_1, w_3 \rangle, \langle w_2, w_2 \rangle, \langle w_3, w_4 \rangle, \langle w_4, w_3 \rangle\}$. Niech $\mathfrak{M}_1 = \langle \mathfrak{F}, V_1 \rangle$, gdzie $V_1(p) = \{w_2, w_3\}, V_1(q) = \{w_1, w_4\}$, a $\mathfrak{M}_2 = \langle \mathfrak{F}, V_2 \rangle$, gdzie $V_2(p) = \varnothing, V_2(q) = \{w_1, w_3, w_4\}$.

- $\mathfrak{M}_1, w_1 \models \Box p \qquad \mathfrak{M}_2, w_1 \not\models \Box p$
- $\mathfrak{M}_2, w_1 \models \Diamond q \qquad \mathfrak{M}_1, w_1 \models \Diamond \Box q$
- $\mathfrak{M}_1, w_3 \models \Box \Box p \qquad \mathfrak{M}_1, w_1 \not\models \Box p \to p$
- $\mathfrak{M}_1, w_2 \models \Box p \to p \quad \mathfrak{M}_1, w_2 \models \Diamond p \to p$
- $\mathfrak{M}_2, w_1 \models \Diamond \Box^n q$, dla dowolnego $n > 0$

Zachodzi następujące:

Twierdzenie 1 (Adekwatność K)
$\Gamma \vdash_K \varphi$ wtw, $\Gamma \models \varphi$

Lemat 2 (K-tautologie)
Następujące schematy generują formuły prawdziwe we wszystkich modelach:

$\Diamond\varphi \leftrightarrow \neg\Box\neg\varphi$

$\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$

$\Box(\varphi \to \psi) \to (\Diamond\varphi \to \Diamond\psi)$

$\Box\varphi \vee \Box\psi \to \Box(\varphi \vee \psi)$

$\Diamond(\varphi \wedge \psi) \to \Diamond\varphi \wedge \Diamond\psi$

$\Box(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \Box\varphi \wedge \Box\psi$

$\Diamond(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \Diamond\varphi \vee \Diamond\psi$

Lemat 3 (formuły falsyfikowalne)
Następujące schematy nie są schematami K-tautologii:

(D) $\Box\varphi \to \Diamond\varphi$

(T) $\Box\varphi \to \varphi$

(T') $\varphi \to \Diamond\varphi$

(4) $\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$

(5) $\Diamond\varphi \to \Box\Diamond\varphi$

(B) $\varphi \to \Box\Diamond\varphi$

Aby scharakteryzować semantycznie inne logiki normalne musimy wprowadzić dodatkową terminologię:

Definicja 13 (Prawdziwość w strukturach)

1. $\mathfrak{F} \models \varphi\ wtw,\ \forall_{\mathfrak{M} \in MOD(\mathfrak{F})}, \mathfrak{M} \models \varphi$
(inaczej: $MOD(\mathfrak{F}) \subseteq Mod(\varphi)$).

2. Niech $\mathcal{F}$ oznacza dowolną klasę struktur, wtedy: $\mathcal{F} \models \varphi\ wtw,\ \forall_{\mathfrak{F} \in \mathcal{F}}, \mathfrak{F} \models \varphi$.

3. Zawartością struktury $\mathfrak{F}$ nazywamy zbiór $E(\mathfrak{F}) = \{\varphi : \mathfrak{F} \models \varphi\}$.

4. Zawartością klasy struktur $\mathcal{F}$ nazywamy zbiór $E(\mathcal{F}) = \{\varphi : \mathcal{F} \models \varphi\}$.

Twierdzenie 4
Zawartość dowolnej $\mathfrak{F}$ ($\mathcal{F}$) jest logiką normalną.

Ponieważ nośnik danej struktury (charakter jego elementów i liczność) nie ma wpływu na określenie danej logiki, natomiast strukturalne własności relacji osiągalności mają wpływ zasadniczy, więc będziemy mówić o klasach struktur jednolitych pod względem własności relacji osiągalności. Oto najważniejsze z nich:

nazwa	warunek
serialność	$\forall x \exists y \mathcal{R}xy$
zwrotność	$\forall x \mathcal{R}xx$
przechodniość	$\forall xyz(\mathcal{R}xy \wedge \mathcal{R}yz \rightarrow \mathcal{R}xz)$
symetria	$\forall xy(\mathcal{R}xy \rightarrow \mathcal{R}yx)$
euklidesowość	$\forall xyz(\mathcal{R}xy \wedge \mathcal{R}xz \rightarrow \mathcal{R}yz)$

Struktury i klasy struktur (a także modele na nich ufundowane) będziemy określać według własności, które posiadają ich relacje osiągalności. Np. powiemy, że $\mathcal{F}$ $(\mathfrak{F}, \mathfrak{M})$ jest klasą (strukturą, modelem) zwrotną, gdy każda struktura $\mathfrak{F} \in \mathcal{F}$ jest strukturą zwrotną.

Twierdzenie 5
Zachodzą następujące równoważności dla formuł (D), (T), (4), (5) i (B):

$\mathcal{F} \models \Box\varphi \to \Diamond\varphi$ wtw, $\mathcal{F}$ jest serialna

$\mathcal{F} \models \Box\varphi \to \varphi$ wtw, $\mathcal{F}$ jest zwrotna

$\mathcal{F} \models \Box\varphi \to \Box\Box\varphi$ wtw, $\mathcal{F}$ jest przechodnia

$\mathcal{F} \models \Diamond\varphi \to \Box\Diamond\varphi$ wtw, $\mathcal{F}$ jest euklidesowa

$\mathcal{F} \models \varphi \to \Box\Diamond\varphi$ wtw, $\mathcal{F}$ jest symetryczna.

Monomodalne logiki normalne: ujęcie aksjomatyczne

K standardowo jest charakteryzowane następująco:

Schematy aksjomatów i reguł pierwotnych:

- Dowolne φ, które jest schematem tezy **KRZ**
- (Dual) $\Diamond\varphi \leftrightarrow \neg\Box\neg\varphi$
- (K) $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$
- (MP) jeżeli $\varphi \in$ **K** i $\varphi \to \psi \in$ **K**, to $\psi \in$ **K**
- (RG) jeżeli $\varphi \in$ **K**, to $\Box\varphi \in$ **K**

nazwa	aksjomat
(D)	$\Box\varphi \to \Diamond\varphi$
(D')	$\Box(\Box\varphi \to \Diamond\varphi)$
(DC)	$\Diamond\varphi \to \Box\varphi$
(T)	$\Box\varphi \to \varphi$
(T')	$\Box(\Box\varphi \to \varphi)$
(TC)	$\varphi \to \Box\varphi$
(4)	$\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$
(4')	$\Box(\Box\varphi \to \Box\Box\varphi)$
(4C)	$\Box\Box\varphi \to \Box\varphi$
(B)	$\varphi \to \Box\Diamond\varphi$
(B')	$\Box(\varphi \to \Box\Diamond\varphi)$
(5)	$\Diamond\varphi \to \Box\Diamond\varphi$
(2)	$\Diamond\Box\varphi \to \Box\Diamond\varphi$
(M)	$\Box\Diamond\varphi \to \Diamond\Box\varphi$
(3)	$\Box(\Box\varphi \to \psi) \vee \Box(\Box\psi \to \varphi)$
(L)	$\Box(\Box\varphi \wedge \varphi \to \psi) \vee \Box(\Box\psi \wedge \psi \to \varphi)$
(F)	$\Box(\Box\varphi \to \psi) \vee (\Diamond\Box\psi \to \varphi)$
(R)	$\Diamond\Box\varphi \to (\varphi \to \Box\varphi)$
(G)	$\Box(\Box\varphi \to \varphi) \to \Box\varphi)$
(Grz)	$\Box(\Box(\varphi \to \Box\varphi) \to \varphi) \to \varphi$
(Go)	$\Box(\Box(\varphi \to \Box\varphi) \to \varphi) \to \Box\varphi$

Zasadniczo będziemy stosować konwencję Lemmona w nazywaniu logik: jeżeli dana logika jest zbudowana przez dodanie do **K** aksjomatów (X), (Y), (Z), to jej nazwę zapisujemy **KXYZ**, z ewentualnym użyciem kropek jako znaków przestankowych (zwłaszcza, gdy nazwa aksjomatu to liczba naturalna). W odniesieniu do kilku logik zrobimy jednak wyjątek od tej konwencji, ze względu na rozpowszechnione użycie innych nazw; w szczególności:

D=KD

T=KT

B=KTB

S4=KT4

S5=KT5

Szczególnie znaną grupę logik normalnych stanowi zbiór logik aksjomatyzowalnych za pomocą pięciu formuł z listy: (D), (T), (B), (4) i (5). Chociaż możliwych kombinacji w połączeniu z **K** jest tu 32 ($=2^5$), to różnych logik jest tylko 15, gdyż część kombinacji daje tylko różne aksjomatyzacje tej samej logiki, ze względu na wzajemną dedukowalność niektórych formuł. Podstawę redukcji podaje poniższy

Lemat 1 *W klasie logik normalnych zachodzą następujące zależności:*

(D) jest tezą **T** *(5) jest tezą* **KB4**

(4) jest tezą **KB5** *(4) jest tezą* **S5**

(T) jest tezą **KDB4** *(B) jest tezą* **S5**

Przykładowo **S5=KT45=KTB4=KT5**

Adekwatność względem klas struktur

Ogólna postać twierdzenia o przystosowaniu logiki **L** względem klasy struktur $\mathcal{F}$ mówi, że:

Twierdzenie 1 (Przystosowanie)

Jeżeli $\vdash_L \varphi$, to $\models_{\mathcal{F}} \varphi$.

Twierdzenie o pełności logiki **L** względem klasy struktur $\mathcal{F}$ mówi, że:

Twierdzenie 2 (Pełność)

Jeżeli $\models_{\mathcal{F}} \varphi$, to $\vdash_L \varphi$.

Oba twierdzenia dają nam twierdzenie o słabej adekwatności **L** względem klasy $\mathcal{F}$: **L**$=E(\mathcal{F})$.

Mówimy wtedy, że $\mathcal{F}$ *determinuje*, albo charakteryzuje **L**. $\mathcal{F}$ jest wtedy określane jako klasa **L**-struktur, a każdy model należący do MOD($\mathcal{F}$), to **L**-model. Powiemy też, że φ (Γ) jest **L**-spełnialny (lub **L**-falsyfikowalny) wtw, jest spełnialny (falsyfikowalny) w jakimś **L**-modelu.

Definicja 14

(Tautologiczność i wynikanie w klasach struktur) Niech $\mathcal{F}$ determinuje **L**, wtedy:

1. $\models_L \varphi$ wtw, $\models_{\mathcal{F}} \varphi$.

2. $\Gamma \models_L \varphi$ wtw, $\forall_{\mathfrak{M} \in MOD(\mathcal{F})}, \forall_{w \in \mathcal{W}_{\mathfrak{M}}}$
(jeżeli $\mathfrak{M}, w \vDash \Gamma$, to $\mathfrak{M}, w \vDash \varphi$)

3. $\Gamma \mid\models_L \varphi$ wtw, $\forall_{\mathfrak{M} \in MOD(\mathcal{F})}$
(jeżeli $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$, to $\mathfrak{M} \vDash \varphi$)

Wynikanie lokalne odpowiada dowiedlności typu $\vdash_L$, a globalne dowiedlności typu $\Vdash_L$, w tym sensie, że twierdzenie 1. i 2. można wzmocnić otrzymując mocne twierdzenia o adekwatności:

Twierdzenie 3 (Mocna adekwatność)

1. $\Gamma \vdash_L \varphi$ $wtw,$ $\Gamma \models_L \varphi$

2. $\Gamma \Vdash_L \varphi$ $wtw,$ $\Gamma \mid\models_L \varphi$

Tabela zestawia wyniki dotyczące determinacji 15 ważnych logik.

L	**L**-struktury
K	dowolne
D	serialne
T	zwrotne
K4	przechodnie
KB	symetryczne
K5	euklidesowe
KD5	serialne i euklidesowe
KDB	serialne i symetryczne
B	zwrotne i symetryczne
K4B	przechodnie i symetryczne
K4D	przechodnie i serialne
K45	przechodnie i euklidesowe
KD45	serialne, przechodnie i euklidesowe
S4	zwrotne i przechodnie
S5	równoważnościowe

Teoria korespondencji

A. Ważne własności relacji osiągalności

nazwa	warunek
funkcyjność	$\forall xyz(\mathcal{R}xy \land \mathcal{R}xz \to y = z)$
prawie-zwrotność	$\forall xy(\mathcal{R}xy \to \mathcal{R}yy)$
przeciwzwrotność	$\forall x\neg\mathcal{R}xx$
prawie-przechodniość	$\forall xyzv(\mathcal{R}xy \to (\mathcal{R}yz \land \mathcal{R}zv \to \mathcal{R}yv))$
gęstość	$\forall xy(\mathcal{R}xy \to \exists z(\mathcal{R}xz \land \mathcal{R}zy))$
antyprzechodniość	$\forall xyz(\mathcal{R}xy \land \mathcal{R}yz \to \neg\mathcal{R}xz)$
prawie-symetria	$\forall xyz(\mathcal{R}xy \land \mathcal{R}yz \to \mathcal{R}zy)$
asymetria mocna	$\forall xy(\mathcal{R}xy \to \neg\mathcal{R}yx)$
asymetria słaba	$\forall xy(\mathcal{R}xy \land x \neq y \to \neg\mathcal{R}yx)$
zbieżność	$\forall xyz(\mathcal{R}xy \land \mathcal{R}xz \to \exists v(\mathcal{R}yv \land \mathcal{R}zv))$
liniowość mocna	$\forall xy(\mathcal{R}xy \lor \mathcal{R}yx)$
liniowość słaba	$\forall xy(\mathcal{R}xy \lor \mathcal{R}yx \lor x = y)$
spójność mocna	$\forall xyz(\mathcal{R}xy \land \mathcal{R}xz \to \mathcal{R}yz \lor \mathcal{R}zy)$
spójność słaba	$\forall xyz(\mathcal{R}xy \land \mathcal{R}xz \to \mathcal{R}yz \lor \mathcal{R}zy \lor y = z)$

Twierdzenie 1
Zachodzą następujące równoważności dla (DC), (T'), (4'), (4C), (B'), (2), (3) i (L):

$\mathcal{F} \models \Diamond\varphi \to \Box\varphi$ wtw, $\mathcal{F}$ jest funkcyjna

$\mathcal{F} \models \Box(\Box\varphi \to \varphi)$ wtw, $\mathcal{F}$ jest prawie-zwrotna

$\mathcal{F} \models \Box(\Box\varphi \to \Box\Box\varphi)$ wtw, $\mathcal{F}$ jest prawie-przechodnia

$\mathcal{F} \models \Box\Box\varphi \to \Box\varphi$ wtw, $\mathcal{F}$ jest gęsta

$\mathcal{F} \models \Box(\varphi \to \Box\Diamond\varphi)$ wtw, $\mathcal{F}$ jest prawie-symetryczna.

$\mathcal{F} \models \Diamond\Box\varphi \to \Box\Diamond\varphi$ wtw, $\mathcal{F}$ jest zbieżna

$\mathcal{F} \models \Box(\Box\varphi \to \psi) \vee \Box(\Box\psi \to \varphi)$ wtw, $\mathcal{F}$ jest mocno spójna

$\mathcal{F} \models \Box(\Box\varphi \wedge \varphi \to \psi) \vee \Box(\Box\psi \wedge \psi \to \varphi)$ wtw, $\mathcal{F}$ jest słabo spójna

Twierdzenie 2 (Sahlqvist)
$\mathcal{F} \models \Diamond^i \Box^j \varphi \to \Box^k \Diamond^l \varphi$ wtw, $\mathcal{R}$ w $\mathcal{F}$ spełnia warunek $\forall xyz(\mathcal{R}^i xy \land \mathcal{R}^j xz \to \exists v(\mathcal{R}^k yv \land \mathcal{R}^l zv))$

B. Warunki niewyrażalne w standardowych językach modalnych.

Twierdzenie 3
Przeciwzwrotność, antyprzechodniość, asymetria (mocna i słaba) i liniowość (mocna i słaba) nie mają formuł-odpowiedników.

C. Formuły niewyrażalne w języku pierwszego rzędu.

Twierdzenie 4
Formuły: (M) $\Box\Diamond\varphi \to \Diamond\Box\varphi$ i (G) $\Box(\Box\varphi \to \varphi) \to \Box\varphi$ definiują klasy struktur, w których relacja osiągalności ma własności wyrażalne w języku drugiego rzędu.

Logiki multimodalne (normalne)

Logiki multimodalne (polimodalne) budujemy w językach typu $\mathbf{J_n}$, gdzie mamy do dyspozycji n (par) funktorów modalnych. Zapis $\Box_i$ oznacza, że mamy do czynienia z i-tym funktorem konieczności ($1 \leq i \leq n$). Semantyka ulega stosownemu uogólnieniu:

Definicja (Struktura relacyjna multimodalna) *Strukturą relacyjną*, albo *ramą* (frame) jest dowolny układ $\mathfrak{F} = \langle\, \mathcal{W}, \{\mathcal{R}_i\}\rangle$ gdzie $\mathcal{W} \neq \varnothing$ jest zbiorem punktów (światów możliwych, punktów czasowych), a $\{\mathcal{R}_i\}$ jest zbiorem binarnych relacji na $\mathcal{W}$, zwanych *relacjami osiągalności*.

Definicja modelu na strukturze multimodalnej jest bez zmian. Podobnie definicja spełniania formuł za wyjątkiem warunków dla konieczności i możliwości, które przybierają postać:

$$
\begin{array}{lll}
\mathfrak{M}, w \models \Box_i\varphi & \text{wtw} & \mathfrak{M}, w' \models \varphi \\
 & & \quad \text{dla dowolnego } w' \in \mathcal{R}_i(w) \\
\mathfrak{M}, w \models \Diamond_i\varphi & \text{wtw} & \mathfrak{M}, w' \models \varphi \\
 & & \quad \text{dla pewnego } w' \in \mathcal{R}_i(w)
\end{array}
$$

Logiki multimodalne, w których każda modalność spełnia te same warunki to *homogeniczne logiki*, natomiast takie, w których różne modalności mają różne własności, to *logiki heterogeniczne*. W obu wypadkach możemy mieć do czynienia ze zwykłym złożeniem kilku logik monomodalnych, w której brak jest interakcji pomiędzy różnymi modalnościami lub z *logikami interaktywnymi*, w których zachodzą relacje między różnymi modalnościami.

Przykład 2 (Logiki temporalne) Są to logiki bimodalne interaktywne z czterema funktorami:

G dla "odtąd zawsze" (zamiast $\Box_F$)

F dla "nastąpi" (zamiast $\Diamond_F$)

H dla "dotąd zawsze" (zamiast $\Box_P$)

P dla "nastąpiło" (zamiast $\Diamond_P$)

Język ten oznaczać będziemy jako $\mathbf{J_T}$.

Każda z (par) modalności jest modalnością normalną tzn., że zachodzi aksjomat (K) zarówno dla G jak i dla H, oraz dla obu funktorów mamy domknięcie na regułę (RG). Logiki te muszą też wyrażać symetrię przyszłości i przeszłości a zatem potrzebujemy też aksjomatów interakcji obu modalności. Uzyskujemy to z pomocą następującej pary formuł:

(B-Te) $\varphi \to \Box_i \Diamond_j \varphi$, gdzie $i \neq j \in \{F, P\}$.

Najsłabsza logika temporalna, która spełnia podane warunki to **Kt**.

Struktury dla bimodalnych logik temporalnych są postaci $\langle \mathcal{W}, \mathcal{R}_F, \mathcal{R}_P \rangle$, gdzie $\mathcal{W}$ jest zbiorem punktów czasowych, $\mathcal{R}_F$ jest relacją następstwa w czasie, a $\mathcal{R}_P$ jest relacją poprzedzania w czasie. Dodatkowo zakładamy, że $\mathcal{R}_P$ jest konwersem $\mathcal{R}_F$. Definicja modelu, spełniania itd. bez zmian.

Nadlogiki **Kt** mogą być zarówno homogeniczne, jak i heterogeniczne np. możemy przyjąć, że przeszłość jest linearna, ale przyszłość dopuszcza rozgałęzienia.

Systemy dedukcyjne

A. Konwencje zapisu

α	α_1	α_2	β	β_1	β_2
$\varphi \wedge \psi$	φ	ψ	$\neg(\varphi \wedge \psi)$	$\neg\varphi$	$\neg\psi$
$\neg(\varphi \vee \psi)$	$\neg\varphi$	$\neg\psi$	$\varphi \vee \psi$	φ	ψ
$\neg(\varphi \rightarrow \psi)$	φ	$\neg\psi$	$\varphi \rightarrow \psi$	$\neg\varphi$	ψ

π^i	ν^i	$\pi = \nu$
$\Diamond_i\varphi$	$\Box_i\varphi$	φ
$\neg\Box_i\varphi$	$\neg\Diamond_i\varphi$	$\neg\varphi$

Definicja 15 (Dopełnienia, podformuły) $-\varphi$ *oznacza* dopełnienie φ *lub inaczej: jest formułą komplementarną do* φ*; jest to* ψ, *jeżeli* $\varphi = \neg\psi$, *lub* $\neg\varphi$ *w przeciwnym wypadku.*

B. Dedukcja Naturalna: reguły inferencji

($\perp$) φ , $-\varphi$ / $\perp$

($\neg\neg$) $\neg\neg\varphi$ / φ

(αE) α / α_i, gdzie $i \in \{1,2\}$

(αD) α_1 , α_2 / α

(βE) β , $-\beta_i$ / β_j , gdzie $i \neq j \in \{1,2\}$

(βD) β_i / β , gdzie $i \in \{1,2\}$

(D) ν^i / π^i , gdzie $\nu = \pi$

(T) ν^i / ν oraz π / π^i

Reguły konstrukcji dowodu:

$\mathcal{D}$

i DØW: β

$i+1$ $\quad -\beta_i$

$\cdot$

$\cdot$

k $\quad \beta_j$

$\mathcal{D}$

i DØW: φ

$i+1$ $\quad -\varphi$

$\cdot$

$\cdot$

k $\quad \perp$

Γ

i DØW: ν^i

$\Gamma^\star$

$\cdot$

$\cdot$

k $\quad \nu$

$\Gamma \cup \{\pi_1^i\}$

i DØW: π_2^i

$i+1$ $\quad \pi_1$

$\Gamma^\star$

$\cdot$

k $\quad \pi_2$

Definicja $\Gamma^\star$

nazwa	$\Gamma^\star$
K, **D**, **T**	$\{\nu : \nu^i \in \Gamma\}$
K4, **D4**	$\{\nu^i : \nu^i \in \Gamma\} \cup \{\nu : \nu^i \in \Gamma\}$
S4	$\{\nu^i : \nu^i \in \Gamma\}$
KB, **DB**, **B**	$\{\nu : \nu^i \in \Gamma\} \cup \{\pi^i : \pi \in \Gamma\}$
KB4, **KBD4**	$\{\nu : \nu^i \in \Gamma\} \cup \{\nu^i : \nu^i \in \Gamma\} \cup$ $\{\pi^i : \pi \in \Gamma\}$
K5, **KD5**	$\{\nu : \nu^i \in \Gamma\} \cup \{\pi^i : \pi^i \in \Gamma\}$
K45, **KD45**	$\{\nu : \nu^i \in \Gamma\} \cup \{\nu^i : \nu^i \in \Gamma\} \cup$ $\{\pi^i : \pi^i \in \Gamma\}$
S5	$\{\nu^i : \nu^i \in \Gamma\} \cup \{\pi^i : \pi^i \in \Gamma\}$

C. Etykietowane diagramy Betha

Definicja 16 (Etykiety)

1. 1 $\in$ET

2. Jeżeli σ $\in$ET, to $\sigma.k$ $\in$ET

$\sigma.k$ denotuje etykietę, której ostatni element to k; $\sigma\tau$: oznacza etykietę, która jest konkatenacją dwóch ciągów;

Będziemy nazywali etykietę σ *rodzicem* a $\sigma.i$ *dzieckiem*; oprócz 1. każda inna etykieta jest dzieckiem.

$\mid \sigma \mid$ oznacza *długość* etykiety, czyli ilość wystąpień liczb całkowitych w etykiecie.

Przykład i interpretacja

$1, 1.2.1.1.5, 1.1.1.1.3$, są etykietami, a 4.1.3.7., czy 1.3.0.5. etykietami nie są. Nieformalnie, etykieta jest nazwą określonego świata w konstruowanym modelu, a jej struktura pokazuje, jakie punkty w tym modelu ją poprzedzają przez $\mathcal{R}$, np. drugi przykład etykiety można odczytać jako (częściowy) opis modelu, w którym $1, 1.2, 1.2.1, 1.2.1.1$, i 1.2.1.1.5, należą do $\mathcal{W}$ a pary $\langle 1, 1.2\rangle, \langle 1.2, 1.2.1\rangle, ..., \langle 1.2.1.1, 1.2.1.1.5\rangle$ należą do $\mathcal{R}$. Ogólnie, dla dowolnych dwóch etykiet, z których jedna jest dzieckiem drugiej, oznacza to, że $\sigma.i$ jest osiągalne przez $\mathcal{R}$ z σ.

Definicja 17 (Formuły etykietowane) *Jeżeli $\varphi \in FOR(\mathbf{MOD})$ a $\sigma \in$ET, to $\sigma : \varphi$ jest formułą etykietowaną.*

Intuicyjnie $\sigma : \varphi$ oznacza, że φ jest spełnione w modelu w punkcie σ.

Reguły

1. Bazowa formalizacja (**K**-EDB)

($\perp$) $\sigma : \varphi$, $\sigma : -\varphi$ / $\perp$

($\neg\neg$) $\sigma : \neg\neg\varphi$ / $\sigma : \varphi$

(α) $\sigma : \alpha$ / $\sigma : \alpha_i$, gdzie $i \in \{1, 2\}$

(β) $\sigma : \beta$, / $\sigma : \beta_1$ $\mid$ $\sigma : \beta_2$,

(π) $\sigma : \pi^i$ / $\sigma.k : \pi$, gdzie $\sigma.k$ jest nową i-etykietą

(ν) $\sigma : \nu^i$ / $\sigma.k : \nu$, gdzie $\sigma.k$ jest dowolną i-etykietą

Reguły specjalne:

(D) $\sigma : \Box_i\varphi$ / $\sigma : \Diamond_i\varphi$ oraz $\sigma : \neg\Diamond_i\varphi$ / $\sigma : \neg\Box_i\varphi$

(T) $\sigma : \nu^i$ / $\sigma : \nu$

(4) $\sigma : \nu^i$ / $\sigma.k : \nu^i$, gdzie $\sigma.k$ jest dowolną i-etykietą

(B) $\sigma.k : \nu^i$ / $\sigma : \nu$, gdzie $\sigma.k$ jest dowolną i-etykietą

(B4) $\sigma.k : \nu^i$ / $\sigma : \nu^i$, gdzie $\sigma.k$ jest dowolną i-etykietą

(5$\Box$) $1.k : \nu^i$ / $1 : \Box_i\nu^i$, gdzie $1.k$ jest dowolną i-etykietą

(5.4) $\sigma : \nu^i$ / $\sigma.k : \nu^i$, gdzie $\mid \sigma \mid > 1$ i $\sigma.k$ jest dowolną i-etykietą

Formalizacje znanych logik normalnych można uzyskać przez następujące kombinacje podanych reguł.

D-EDB	**K**-EDB$\cup\{(D)\}$
T-EDB	**K**-EDB$\cup\{(T)\}$
K4-EDB	**K**-EDB$\cup\{(4)\}$
KB-EDB	**K**-EDB$\cup\{(B)\}$
K5-EDB	**K**-EDB$\cup\{(B4),(5\Box),(5.4.)\}$
KD4-EDB	**D**-EDB$\cup\{(4)\}$
KDB-EDB	**D**-EDB$\cup\{(B)\}$
KD5-EDB	**K5**-EDB$\cup\{(D)\}$
S4-EDB	**T**-EDB$\cup\{(4)\}$
B-EDB	**T**-EDB$\cup\{(B)\}$
KB4-EDB	**KB**-EDB$\cup\{(4),(B4)\}$
K4.5-EDB	**K**-EDB$\cup\{(4),(5\Box),(5.4.)\}$
KD4.5-EDB	**K4.5**-EDB$\cup\{(D)\}$
S5-EDB	**S4**-EDB$\cup\{(B4)\}$

The Master Argument

1. Wszystko co jest przeszłe i prawdziwe jest konieczne.

2. Niemożliwe nie wynika z możliwego.

3. Co ani nie jest, ani nie będzie, jest możliwe.

ZP: Każda możliwość kiedyś się zaktualizuje.

1. $P\varphi \to \Box P\varphi$

2. $\vdash \varphi \to \psi \ / \ \vdash \Diamond\varphi \to \Diamond\psi$

3. $\neg\varphi \land \neg F\varphi \land \Diamond\varphi$

($\neg 3 \leftrightarrow \neg\varphi \land \neg F\varphi \to \neg\Diamond\varphi$)

DC: $\varphi \land G\varphi \to PG\varphi$

Standardowy dowód pełności dla L

Jest to dowód niekonstruktywny, oparty o konstrukcję modelu kanonicznego metodą Henkina (a właściwie Lindenbauma). Pokazuje, że istnieje jeden model nieskończony (model kanoniczny), należący do $MOD(\mathcal{L})$, który falsyfikuje każdą formułę niedowiedlną w **L**.

Definicja (Zbiór niesprzeczny i maksymalnie niesprzeczny):

1. Γ jest niesprzeczny ($Nsp(\Gamma)$) wtw, $\Gamma \nvdash \bot$

2. Γ jest maksymalnie niesprzeczny ($MNsp(\Gamma)$) wtw,:

i) $Nsp(\Gamma)$

ii) dla dowolnego Δ, jeżeli $\Gamma \subseteq \Delta$, to $\Delta \vdash \bot$

Przypomnijmy, że zachodzi:

(**TDN**): $\Gamma, \neg\varphi \vdash \bot$ wtw, $\Gamma \vdash \varphi$

Lemat 1 Dla dowolnego $MNsp(\Gamma)$ zachodzi:

1.1. $\varphi \notin \Gamma$ wtw, $\neg\varphi \in \Gamma$

1.2. jeżeli $\vdash \varphi$, to $\varphi \in \Gamma$

1.3. jeżeli $\varphi \in \Gamma$ i $\varphi \to \psi \in \Gamma$, to $\psi \in \Gamma$

Lemat 2 (Lindenbaum) Jeżeli $Nsp(\Gamma)$, to istnieje $MNsp(\Delta)$, taki, że $\Gamma \subseteq \Delta$

Lemat 3 Niech $Nsp(\Gamma)$, to jeżeli $\Diamond\varphi \in \Gamma$, to $Nsp(\Gamma^\star \cup \{\varphi\})$

Definicja: Model kanoniczny dla **L**, to $\mathfrak{M}_c = \langle\ \mathcal{W}_c, \mathcal{R}_c, V_c\rangle$ gdzie:

$\mathcal{W}_c = \{\Gamma : MNsp(\Gamma)\}$

$\mathcal{R}_c\Gamma\Delta$ wtw, $\Gamma^\star \subseteq \Delta$

$V_c(p) = \{\Gamma : p \in \Gamma\}$

Lemat 4 Dla dowolnego $MNsp(\Gamma)$, jeżeli $\Box\varphi \in \Gamma$, to $\varphi \in \Delta$, dla dowolnego Δ, takiego, że $\mathcal{R}_c\Gamma\Delta$

Lemat 5 Dla dowolnego $MNsp(\Gamma), \varphi \in \Gamma$ wtw, $\mathfrak{M}_c, \Gamma \models \varphi$

Jako wniosek otrzymujemy:

Twiedzenie o pełności: Jeżeli $\Gamma \models \varphi$, to $\Gamma \vdash \varphi$

Logiki okresów warunkowych

Kłopotliwe schematy rozumowania:

(SH) $\varphi \to \psi, \psi \to \chi \ / \ \varphi \to \chi$

(TR) $\varphi \to \psi \ / \ \neg\psi \to \neg\varphi$

(OP) $\varphi \to \psi \ / \ \varphi \wedge \chi \to \psi$

Gdyby Kowalski nie wygrał w audiotele, toby nie miał samochodu. Gdyby nie miał samochodu, toby nie przejechał swojego sąsiada. Zatem, gdyby przejechał swojego sąsiada, toby wygrał w audiotele.

Jeżeli nasypię do filiżanki kawy 3 łyżki cukru, to będzie słodka. Zatem, jeżeli nasypię tam 3 łyżki cukru i naleję oleju silnikowego, to będzie słodka.

Reguły, tezy, logiki:

(RCEA) $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ / $\vdash \varphi > \chi \leftrightarrow \psi > \chi$

(RCEC) $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ / $\vdash \chi > \varphi \leftrightarrow \chi > \psi$

(CM) $\varphi > \psi \wedge \chi \rightarrow (\varphi > \psi) \wedge (\varphi > \chi)$

(CC) $(\varphi > \psi) \wedge (\varphi > \chi) \rightarrow \varphi > \psi \wedge \chi$

(RCK) $\vdash \varphi_1 \wedge \ldots\ldots \wedge \varphi_n \rightarrow \psi$ / $\vdash (\chi > \varphi_1) \wedge \ldots\ldots \wedge (\chi > \varphi_n) \rightarrow \chi > \psi$, n$\geq$0

Logika domknięta na (RCEA) i (RCEC) jest logiką *klasyczną*, jeżeli dodatkowo zawiera (CM) to jest *monotoniczna*, a jeżeli zawiera też (CR), to jest *regularna*. Logika klasyczna domknięta na (RCK) to logika normalna. Najsłabsza logika klasyczna to **CE**, monotoniczna to **CM**, regularna to **CR** a normalna to **CK**.

Semantyka dla logik normalnych

Przez standardowy model warunkowy rozumiemy strukturę $\mathfrak{M} = \langle \mathcal{W}, f, V \rangle$ gdzie $\mathcal{W}$ to zbiór światów, V to waluacja zmiennych, a f to funkcja selekcji klasy światów (sądu), która dowolnemu światu i sądowi przyporządkowuje jakiś sąd. Formalnie $f : \mathcal{W} \times \mathcal{P}(\mathcal{W}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{W})$. Warunki spełniania dla dowolnego zdania są takie same jak w dowolnych rozważanych poprzednio modelach, dla okresów warunkowych stosowna klauzula wygląda tak:

$\mathfrak{M}, w \models \varphi > \psi$ wtw, $f(w, \|\varphi\|) \subseteq \|\psi\|$

Tautologiczność i wynikanie w takich modelach definiujemy tak jak poprzednio.

CK można teraz scharakteryzować semantycznie jako logikę zdeterminowaną przez klasę wszystkich standardowych modeli warunkowych. Najbardziej znane logiki OW są nadlogikami **CK**.

Ważniejsze logiki normalne

1.**CKD** (dependable) to najmniejsza logika zawierająca **CK** +(ID) $\varphi > \varphi$
(id) $f(w, X) \subseteq X$

2.**CKWM** (weakly material) to najmniejsza logika zawierająca **CK** + (MP) $\varphi > \psi \to (\varphi \to \psi)$
(mp) jeżeli $w \in X$, to $w \in f(w, X)$

3. **CKDO** (ordered) to najmniejsza logika zawierająca **CKD** + (CO.1) $\neg\varphi > \varphi \to \psi > \varphi$ + (CO.2) $(\varphi > \psi) \wedge (\psi > \varphi) \to (\varphi > \chi \leftrightarrow \psi > \chi)$
(co1) jeżeli $f(w, X) = \varnothing$, to $f(w, Y) \cap X = \varnothing$
(co2) jeżeli $f(w, X) \subseteq Y$ i $f(w, Y) \subseteq X$, to $f(w, X) = f(w, Y)$

4. **CO** = **CKDO**+(MP)

5. **CA** (additive) = **CO**+
(CA) $(\varphi > \psi) \wedge (\chi > \psi) \to \varphi \vee \chi > \psi$
(ca) $f(w, \|\varphi \vee \psi\|) \subseteq f(w, \|\varphi\|) \cup f(w, \|\psi\|)$

6. **V** = **CKDOV** (variably strict) to najmniejsza logika zawierająca **CKDO** +
(CV) $(\varphi > \psi) \wedge \neg(\varphi > \neg\chi) \rightarrow \varphi \wedge \chi > \psi$
(cv) jeżeli $f(w, \|\varphi\|) \subseteq X$, to $f(w, \|\varphi\|) \subseteq \|\neg\chi\|$ lub $f(w, \|\varphi \wedge \chi\|) \subseteq X$

7. **VW** = **CKDOV**+(MP)

8. **CKM** (material) = **CKD**+(MP)+
(CS) $\varphi \wedge \psi \rightarrow \varphi > \psi$
(cs) jeżeli $w \in X$, to $f(w, X) = \{w\}$

9. **SS** = **CA**+(CS)

10. **VC** = **VW**+(CS)

11. **C2** (singular) = **VC**+
(CEM) $(\varphi > \psi) \vee (\varphi > \neg\psi)$
(cem) $f(w, X)$ ma co najwyżej jeden element

LOGIKI HYBRYDOWE: Język

Bazowy hybrydowy (zdaniowy) język modalny $\mathbf{J_H}$ uzyskujemy poprzez dodanie do $\mathbf{J_M}$:

a) Drugiego sortu zmiennych zdaniowych, zwanych *nominałami*; jest to przeliczalny zbiór NOM $= \{i, j, k, ...\}$. Ich zadaniem jest nazywanie punktów w modelu. Atomy języka to teraz zbiór ZZ$\cup$NOM (ZZ$\cap$NOM $= \varnothing$). W metajęzyku będziemy używać symboli σ, τ, θ dla reprezentacji nominałów.

b) Dwuargumentowego funktora spełniania, który łączy dowolny nominał z dowolną formułą. Formuły tego typu (sat-formuły) zaznaczamy następująco: $\sigma : \varphi$ i odczytujemy: "formuła φ jest spełniona w punkcie σ. Przykłady sat-formuł:
$i : (p \to \Diamond q)$, $i : j$, $i : \Diamond j$.

Formuły, w których jedyne zmienne to nominały, to czyste (pure) formuły $\mathbf{J_H}$.

2. Semantyka

Pojęcie struktury modelowej dla logiki hybrydowej nie ulega zmianie, natomiast definicja waluacji musi ulec pewnej zmianie, aby zgadzać się z intuicyjną interpretacją nominałów.

Definicja 18 *Waluacją jest dowolna funkcja V:ZZ$\cup$NOM$\longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{W})$, taka, że V($\sigma$) dla dowolnego nominału σ jest singletonem.*

Warunki spełniania formuł pozostają bez zmian natomiast dodatkowy warunek dla sat-formuł wygląda następująco:

$\mathfrak{M}, w \vDash \sigma : \varphi$ wtw $\mathfrak{M}, w' \vDash \varphi$, gdzie $\{w'\}$=V(σ)

Pozostałe definicje semantyczne nie wymagają zmian.

3. Logiki

Najmniejsza (monomodalna) hybrydowa logika normalna $\mathbf{K_H}$ wymaga dodania do **K** następujących schematów aksjomatów:

(K:)	$\sigma : (\varphi \to \psi) \to (\sigma : \varphi \to \sigma : \psi)$
(S-D:)	$\sigma : \varphi \leftrightarrow \neg\sigma : \neg\varphi$
(D:)	$\sigma \wedge \varphi \to \sigma : \varphi$
(ZWR-N)	$\sigma : \sigma$
(SYM-N)	$\sigma : \tau \leftrightarrow \tau : \sigma$
(NOM)	$\sigma : \varphi \wedge \sigma : \tau \to \tau : \varphi$
(AGREE)	$\tau : \sigma : \varphi \leftrightarrow \sigma : \varphi$
(BACK)	$\Diamond\sigma : \varphi \to \sigma : \varphi$

Oprócz domknięcia na (MP) i (RG) $\mathbf{K_H}$ jest domknięta na regułę Gödla dla funktora spełniania tzn. (RG:) jeżeli $\varphi \in \mathbf{K_H}$, to $\sigma : \varphi \in \mathbf{K_H}$

dla dowolnego nominału σ. Natomiast reguła podstawiania zachodzi w następującej postaci: jeżeli $\varphi \in \mathbf{K_H}$, to e(φ) $\in \mathbf{K_H}$, gdzie e:ZZ$\longrightarrow$FOR, ale e:NOM$\longrightarrow$NOM.

4. Teoria korespondencji

nazwa	aksjomat	warunek
(D')	$\Box\sigma \to \Diamond\sigma$	serialność
(DC')	$\Diamond\sigma \to \Box\sigma$	funkcyjność
(T')	$\Box\sigma \to \sigma$	zwrotność
(T')	$\Box(\Box\sigma \to \sigma)$	prawie-zwrotność
(TC')	$\sigma \to \Box\sigma$	–
(IRR)	$\sigma \to \Box\neg\sigma$	przeciwzwrotność
(4')	$\Box\sigma \to \Box\Box\sigma$	przechodniość
(4C')	$\Box\Box\sigma \to \Box\sigma$	gęstość
(INT)	$\neg\Box\sigma \to \Box\Box\sigma$	antyprzechodniość
(B')	$\sigma \to \Box\Diamond\sigma$	symetria
(ASM)	$\sigma \to \Box\Box\neg\sigma$	asymetria mocna
(ASS)	$\sigma \to \Box(\Diamond\sigma \to \sigma)$	asymetria słaba
(5')	$\Diamond\sigma \to \Box\Diamond\sigma$	euklidesowość
(2')	$\Diamond\Box\sigma \to \Box\Diamond\sigma$	zbieżność
(3')	$\Box(\Box\sigma \to \tau)\vee$ $\Box(\Box\tau \to \sigma)$	spójność mocna
(L')	$\Box(\Box\sigma \wedge \sigma \to \tau)$ $\vee\Box(\Box\tau \wedge \tau \to \sigma)$	spójność słaba
(DI)	$\sigma : \Diamond\tau \vee \tau : \Diamond\sigma$	liniowość mocna
(TRI)	$\sigma : \Diamond\tau \vee \tau : \Diamond\sigma \vee \sigma : \tau$	liniowość słaba

SEMANTYKA TOPOLOGICZNA

Definicja 19 (Struktura otoczeniowa)

Strukturą otoczeniową jest dowolna para $\mathfrak{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{N} \rangle$ gdzie:

- dziedzina to $\mathcal{W} \neq \varnothing$, który jest zbiorem punktów (światów możliwych);

- $\mathcal{N}$ to funkcja z $\mathcal{W}$ w $\mathcal{PP}(\mathcal{W})$ ($\mathcal{N} : \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{PP}(\mathcal{W})$), zwana funkcją sąsiedztwa (inaczej: $\mathcal{N}(w) \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{W})$, dla każdego $w \in \mathcal{W}$).

$\mathcal{N}$ (od neighbourhood lub od necessary) jest to funkcja, która każdemu punktowi przyporządkowuje zbiór tych sądów, które są w nim konieczne.

Modelem na danej strukturze $\mathfrak{F}$ jest dowolny układ $\mathfrak{M} = \langle\, \mathfrak{F}, V \rangle$, gdzie V jest funkcją waluacji zmiennych. Zarówno definicja wartościowania zmiennych, jak i warunki spełniania w modelu dla wszystkich formuł za wyjątkiem modalnych są takie same jak w semantyce relacyjnej. Różnica dotyczy waluacji formuł modalnych;

$w \models \Box\varphi$ wtw $\|\varphi\| \in \mathcal{N}(w)$

$w \models \Diamond\varphi$ wtw $\| - \varphi\| \notin \mathcal{N}(w)$

Definicje prawdziwości w modelu, tautologiczności i wynikania bez zmian.

Intuicyjnie $\Box\varphi$ jest prawdziwe w punkcie w wtedy gdy sąd wyrażany przez φ jest w tym punkcie konieczny. Analogicznie, formuła jest w w możliwa wtedy gdy $\mathcal{N}(w)$ nie zawiera dopełnienia sądu wyrażanego przez tę formułę. Jak widać funkcja $\mathcal{N}$ w istocie interpretuje konieczność jako operator wnętrza a możliwość jako operator domknięcia, stąd często semantyka otoczeniowa określana jest jako semantyka topologiczna.

Charakteryzacja

E jest adekwatne względem klasy wszystkich modeli otoczeniowych.

M jest adekwatne względem klasy tych modeli otoczeniowych, które spełniają warunek:

(m) jeżeli $X \cap Y \in \mathcal{N}(w)$, to $X \in \mathcal{N}(w)$ i $Y \in \mathcal{N}(w)$

lub równoważnie

(m') jeżeli $X \subseteq Y$ i $X \in \mathcal{N}(w)$, to $Y \in \mathcal{N}(w)$

(c) jeżeli $X \in \mathcal{N}(w)$ i $Y \in \mathcal{N}(w)$, to $X \cap Y \in \mathcal{N}(w)$

(n) $\mathcal{W} \in \mathcal{N}(w)$

(d) jeżeli $X \in \mathcal{N}(w)$, to $-X \notin \mathcal{N}(w)$

(t) jeżeli $X \in \mathcal{N}(w)$, to $w \in X$

(4) jeżeli $X \in \mathcal{N}(w)$, to $\{w' : X \in \mathcal{N}(w')\} \in \mathcal{N}(w)$

Klasa modeli otoczeniowych spełniających warunki (m) i (c) daje nam najsłabszą logikę regularną **R**, a po zawężeniu do modeli spełniających dodatkowo warunek (n) otrzymujemy otoczeniową charakteryzację **K**. (d), (t) i (4) charakteryzują modele otoczeniowe spełniające aksjomaty: (D), (T) i (4).