RACHUNKI SEKWENTOWE

Andrzej Indrzejczak

Katedra Logiki i Metodologii Nauk UŁ

Łódź, semestr letni 2011/2012

Wprowadzenie

Geneza RS

Wprowadzenie

Geneza RS

Określenie *rachunek sekwentów* (RS) stosowane jest współcześnie w odniesieniu do obszernej grupy systemów dedukcyjnych zwanych też często, ze względu na nazwisko autora, systemami Gentzena.

Wprowadzenie

Geneza RS

Określenie *rachunek sekwentów* (RS) stosowane jest współcześnie w odniesieniu do obszernej grupy systemów dedukcyjnych zwanych też często, ze względu na nazwisko autora, systemami Gentzena. Systemy RS wywodzą się z badań Gentzena z lat 30-tych nad utworzeniem systemów dedukcji naturalnej.

Wprowadzenie

Geneza RS

Określenie *rachunek sekwentów* (RS) stosowane jest współcześnie w odniesieniu do obszernej grupy systemów dedukcyjnych zwanych też często, ze względu na nazwisko autora, systemami Gentzena. Systemy RS wywodzą się z badań Gentzena z lat 30-tych nad utworzeniem systemów dedukcji naturalnej.
Nazwa RS pochodzi od podstawowych jednostek, na których zdefiniowane są reguły.

Trochę historii i systematyzacji

Można prowizorycznie wyróżnić kilka dat i etapów w rozwoju problematyki RS:

Trochę historii i systematyzacji

Można prowizorycznie wyróżnić kilka dat i etapów w rozwoju problematyki RS:

- 1929 – wprowadzenie sekwentów i T-dowodów przez Hertza

Trochę historii i systematyzacji

Można prowizorycznie wyróżnić kilka dat i etapów w rozwoju problematyki RS:

- 1929 – wprowadzenie sekwentów i T-dowodów przez Hertza
- 1934 – publikacje Gentzena poświęcone dedukcji naturalnej, w których wprowadza rachunki sekwentowe LJ i LK i dowodzi twierdzenia o eliminacji cięcia

Trochę historii i systematyzacji

Można prowizorycznie wyróżnić kilka dat i etapów w rozwoju problematyki RS:

- 1929 – wprowadzenie sekwentów i T-dowodów przez Hertza
- 1934 – publikacje Gentzena poświęcone dedukcji naturalnej, w których wprowadza rachunki sekwentowe LJ i LK i dowodzi twierdzenia o eliminacji cięcia
- 1936 – sekwentowy system DN Gentzena

Trochę historii i systematyzacji

Można prowizorycznie wyróżnić kilka dat i etapów w rozwoju problematyki RS:

- 1929 – wprowadzenie sekwentów i T-dowodów przez Hertza
- 1934 – publikacje Gentzena poświęcone dedukcji naturalnej, w których wprowadza rachunki sekwentowe LJ i LK i dowodzi twierdzenia o eliminacji cięcia
- 1936 – sekwentowy system DN Gentzena
- lata 40-te i 50-te: pierwsze modyfikacje RS – Ketonen, Kleene, Bernays, Suszko

Trochę historii i systematyzacji

Można prowizorycznie wyróżnić kilka dat i etapów w rozwoju problematyki RS:

- 1929 – wprowadzenie sekwentów i T-dowodów przez Hertza
- 1934 – publikacje Gentzena poświęcone dedukcji naturalnej, w których wprowadza rachunki sekwentowe LJ i LK i dowodzi twierdzenia o eliminacji cięcia
- 1936 – sekwentowy system DN Gentzena
- lata 40-te i 50-te: pierwsze modyfikacje RS – Ketonen, Kleene, Bernays, Suszko
- lata 50-te: powstanie systemów tablicowych – Beth, Hintikka

Trochę historii i systematyzacji

Można prowizorycznie wyróżnić kilka dat i etapów w rozwoju problematyki RS:

- 1929 – wprowadzenie sekwentów i T-dowodów przez Hertza
- 1934 – publikacje Gentzena poświęcone dedukcji naturalnej, w których wprowadza rachunki sekwentowe LJ i LK i dowodzi twierdzenia o eliminacji cięcia
- 1936 – sekwentowy system DN Gentzena
- lata 40-te i 50-te: pierwsze modyfikacje RS – Ketonen, Kleene, Bernays, Suszko
- lata 50-te: powstanie systemów tablicowych – Beth, Hintikka
- lata 60-te: konstrukcje praktycznych form RS – Hasenjaeger, Hermes, Rieger, Leblanc

Trochę historii i systematyzacji

Można prowizorycznie wyróżnić kilka dat i etapów w rozwoju problematyki RS:

- 1929 – wprowadzenie sekwentów i T-dowodów przez Hertza
- 1934 – publikacje Gentzena poświęcone dedukcji naturalnej, w których wprowadza rachunki sekwentowe LJ i LK i dowodzi twierdzenia o eliminacji cięcia
- 1936 – sekwentowy system DN Gentzena
- lata 40-te i 50-te: pierwsze modyfikacje RS – Ketonen, Kleene, Bernays, Suszko
- lata 50-te: powstanie systemów tablicowych – Beth, Hintikka
- lata 60-te: konstrukcje praktycznych form RS – Hasenjaeger, Hermes, Rieger, Leblanc

Trochę historii i systematyzacji

Można prowizorycznie wyróżnić kilka dat i etapów w rozwoju problematyki RS:

Trochę historii i systematyzacji

Można prowizorycznie wyróżnić kilka dat i etapów w rozwoju problematyki RS:

- teoretyczne badania nad problematyką entailment (Scott, Shoesmith i Smiley – lata 70-te, Zygmunt, Czelakowski – lata 80-te) i prostych relacji konsekwencji (lata 90-te – Avron)

Trochę historii i systematyzacji

Można prowizorycznie wyróżnić kilka dat i etapów w rozwoju problematyki RS:

- teoretyczne badania nad problematyką entailment (Scott, Shoesmith i Smiley – lata 70-te, Zygmunt, Czelakowski – lata 80-te) i prostych relacji konsekwencji (lata 90-te – Avron)
- rozwój uogólnionych form RS: od lat 70-tych, m.in: Display Calculi Belnapa, Linear Logic Girarda, Hypersequent Calculi Avrona

Trochę historii i systematyzacji

Można prowizorycznie wyróżnić kilka dat i etapów w rozwoju problematyki RS:

- teoretyczne badania nad problematyką entailment (Scott, Shoesmith i Smiley – lata 70-te, Zygmunt, Czelakowski – lata 80-te) i prostych relacji konsekwencji (lata 90-te – Avron)
- rozwój uogólnionych form RS: od lat 70-tych, m.in: Display Calculi Belnapa, Linear Logic Girarda, Hypersequent Calculi Avrona
- rozwój strukturalnej teorii dowodu: od lat 70-tych – Takeuti, Schütte, Troelstra, von Plato, Negri

Trochę historii i systematyzacji

Można prowizorycznie wyróżnić kilka dat i etapów w rozwoju problematyki RS:

- teoretyczne badania nad problematyką entailment (Scott, Shoesmith i Smiley – lata 70-te, Zygmunt, Czelakowski – lata 80-te) i prostych relacji konsekwencji (lata 90-te – Avron)
- rozwój uogólnionych form RS: od lat 70-tych, m.in: Display Calculi Belnapa, Linear Logic Girarda, Hypersequent Calculi Avrona
- rozwój strukturalnej teorii dowodu: od lat 70-tych – Takeuti, Schütte, Troelstra, von Plato, Negri
- badania nad automatyzacją dowodzenia (Gallier)

Trochę historii i systematyzacji

Można prowizorycznie wyróżnić kilka dat i etapów w rozwoju problematyki RS:

- teoretyczne badania nad problematyką entailment (Scott, Shoesmith i Smiley – lata 70-te, Zygmunt, Czelakowski – lata 80-te) i prostych relacji konsekwencji (lata 90-te – Avron)
- rozwój uogólnionych form RS: od lat 70-tych, m.in: Display Calculi Belnapa, Linear Logic Girarda, Hypersequent Calculi Avrona
- rozwój strukturalnej teorii dowodu: od lat 70-tych – Takeuti, Schütte, Troelstra, von Plato, Negri
- badania nad automatyzacją dowodzenia (Gallier)
- antyrealistyczna filozofia znaczenia (stałych logicznych) (Dummett, Hacking, Dosen, Avron)

Ogólne pojęcie rachunku sekwentowego:

Rachunek sekwentów to dowolna kolekcja reguł sekwentowych postaci:

$S_1, ..., S_n \; / \; S, \;\; n \geq 0$, gdzie S oznacza sekwent.

Ogólne pojęcie rachunku sekwentowego:

Rachunek sekwentów to dowolna kolekcja reguł sekwentowych postaci:

$S_1, \ldots., S_n \ / \ S, \ \ n \geq 0$, gdzie S oznacza sekwent.
Ponieważ sekwenty można rozmaicie definiować więc prowadzi to do pierwszej klasyfikacji form RS, która odwołuje się jedynie do kryteriów strukturalnych:

Ogólne pojęcie rachunku sekwentowego:

Rachunek sekwentów to dowolna kolekcja reguł sekwentowych postaci:

$S_1, ..., S_n \ / \ S, \ \ n \geq 0$, gdzie S oznacza sekwent.
Ponieważ sekwenty można rozmaicie definiować więc prowadzi to do pierwszej klasyfikacji form RS, która odwołuje się jedynie do kryteriów strukturalnych:

1. wg. ilości argumentów sekwentu:

Ogólne pojęcie rachunku sekwentowego:

Rachunek sekwentów to dowolna kolekcja reguł sekwentowych postaci:

$S_1, \dots, S_n \ / \ S, \ \ n \geq 0$, gdzie S oznacza sekwent.
Ponieważ sekwenty można rozmaicie definiować więc prowadzi to do pierwszej klasyfikacji form RS, która odwołuje się jedynie do kryteriów strukturalnych:

1. wg. ilości argumentów sekwentu:
2. wg. typu obiektów tworzących argumenty sekwentu:

Ogólne pojęcie rachunku sekwentowego:

Rachunek sekwentów to dowolna kolekcja reguł sekwentowych postaci:

$S_1, ..., S_n \;/\; S, \;\; n \geq 0$, gdzie S oznacza sekwent.
Ponieważ sekwenty można rozmaicie definiować więc prowadzi to do pierwszej klasyfikacji form RS, która odwołuje się jedynie do kryteriów strukturalnych:

1. wg. ilości argumentów sekwentu:
2. wg. typu obiektów tworzących argumenty sekwentu:
3. wg. ilości formuł (struktur danych) w argumentach sekwentu:

Ogólne pojęcie sekwentu:

podział wg. ilości argumentów sekwentu:

Ogólne pojęcie sekwentu:

podział wg. ilości argumentów sekwentu:

- standardowe – para

Ogólne pojęcie sekwentu:

podział wg. ilości argumentów sekwentu:

- standardowe – para
- niestandardowe, w tym m.in. sekwenty jako:

Ogólne pojęcie sekwentu:

podział wg. ilości argumentów sekwentu:

- standardowe – para
- niestandardowe, w tym m.in. sekwenty jako:
  - n-tki (≥ 1) (zbiorów, multizbiorów,...) obiektów

Ogólne pojęcie sekwentu:

podział wg. ilości argumentów sekwentu:

- standardowe – para
- niestandardowe, w tym m.in. sekwenty jako:
  - n-tki (≥ 1) (zbiorów, multizbiorów,...) obiektów
  - hipersekwenty ((multi)zbiory sekwentów)

Ogólne pojęcie sekwentu:

podział wg. ilości argumentów sekwentu:

- standardowe – para
- niestandardowe, w tym m.in. sekwenty jako:
  - n-tki (≥ 1) (zbiorów, multizbiorów,...) obiektów
  - hipersekwenty ((multi)zbiory sekwentów)
  - sekwenty zagnieżdżone

Ogólne pojęcie sekwentu:

podział wg. ilości argumentów sekwentu:

- standardowe – para
- niestandardowe, w tym m.in. sekwenty jako:
  - n-tki (≥ 1) (zbiorów, multizbiorów,...) obiektów
  - hipersekwenty ((multi)zbiory sekwentów)
  - sekwenty zagnieżdżone
  - wielosekwentowe

Standardowe pojęcie sekwentu

Sekwenty w sensie Gentzena to obiekty postaci:

Standardowe pojęcie sekwentu

Sekwenty w sensie Gentzena to obiekty postaci:

$$\Gamma \Rightarrow \Delta,$$

lub

$$\varphi_1, ..., \varphi_k \Rightarrow \psi_1, ..., \psi_n, \text{ z } k \geq 0, n \geq 0$$

Standardowe pojęcie sekwentu

Sekwenty w sensie Gentzena to obiekty postaci:

$$\Gamma \Rightarrow \Delta,$$

lub

$$\varphi_1, ..., \varphi_k \Rightarrow \psi_1, ..., \psi_n, \text{ z } k \geq 0, n \geq 0$$

gdzie Γ to poprzednik a Δ to następnik sekwentu.

Ogólne pojęcie sekwentu:

podział wg. typu obiektów tworzących argumenty sekwentu:

Ogólne pojęcie sekwentu:

podział wg. typu obiektów tworzących argumenty sekwentu:

U Gentzena argumenty sekwentu to skończone ciągi formuł ale możliwe inne rozwiązania

Ogólne pojęcie sekwentu:

podział wg. typu obiektów tworzących argumenty sekwentu:

U Gentzena argumenty sekwentu to skończone ciągi formuł ale możliwe inne rozwiązania

- zbiory (formuł)

Ogólne pojęcie sekwentu:

podział wg. typu obiektów tworzących argumenty sekwentu:

U Gentzena argumenty sekwentu to skończone ciągi formuł ale możliwe inne rozwiązania

- zbiory (formuł)
- multizbiory

Ogólne pojęcie sekwentu:

podział wg. typu obiektów tworzących argumenty sekwentu:

U Gentzena argumenty sekwentu to skończone ciągi formuł ale możliwe inne rozwiązania

- zbiory (formuł)
- multizbiory
- inne struktury danych, np. formuły, formuły etykietowane itp.

Ogólne pojęcie sekwentu:

podział wg. typu obiektów tworzących argumenty sekwentu:

U Gentzena argumenty sekwentu to skończone ciągi formuł ale możliwe inne rozwiązania

- zbiory (formuł)
- multizbiory
- inne struktury danych, np. formuły, formuły etykietowane itp.

Ogólne pojęcie sekwentu:

podział wg. typu obiektów tworzących argumenty sekwentu:

Ogólne pojęcie sekwentu:

podział wg. typu obiektów tworzących argumenty sekwentu:

Wyróżnimy 3 alternatywy RS wg. rodzaju argumentów sekwentu:

Ogólne pojęcie sekwentu:

podział wg. typu obiektów tworzących argumenty sekwentu:

Wyróżnimy 3 alternatywy RS wg. rodzaju argumentów sekwentu:

- c-systemy (ciągi)

Ogólne pojęcie sekwentu:

podział wg. typu obiektów tworzących argumenty sekwentu:

Wyróżnimy 3 alternatywy RS wg. rodzaju argumentów sekwentu:

- c-systemy (ciągi)
- m-systemy (multizbiory)

Ogólne pojęcie sekwentu:

podział wg. typu obiektów tworzących argumenty sekwentu:

Wyróżnimy 3 alternatywy RS wg. rodzaju argumentów sekwentu:

- c-systemy (ciągi)
- m-systemy (multizbiory)
- z-systemy (zbiory)

Ogólne pojęcie sekwentu:

podział wg. typu obiektów tworzących argumenty sekwentu:

Wyróżnimy 3 alternatywy RS wg. rodzaju argumentów sekwentu:

- c-systemy (ciągi)
- m-systemy (multizbiory)
- z-systemy (zbiory)

Uwaga1: dla ujęcia wielu logik nieklasycznych niezbędne multizbiory (ciągi raczej rzadko potrzebne)

Ogólne pojęcie sekwentu:

podział wg. typu obiektów tworzących argumenty sekwentu:

Wyróżnimy 3 alternatywy RS wg. rodzaju argumentów sekwentu:

- c-systemy (ciągi)
- m-systemy (multizbiory)
- z-systemy (zbiory)

Uwaga1: dla ujęcia wielu logik nieklasycznych niezbędne multizbiory (ciągi raczej rzadko potrzebne)
Uwaga2: Nawet w przypadku operowania zbiorami można uzyskać narzędzie potencjalnie silniejsze niż operacja konsekwencji Tarskiego.

Ogólne pojęcie sekwentu:

Sekwenty – przypadki szczególne

Ogólne pojęcie sekwentu:

Sekwenty – przypadki szczególne

Zarówno Γ jaki i Δ w sekwencie postaci $\Gamma \Rightarrow \Delta$ mogą być ciągami pustymi, wtedy:

Ogólne pojęcie sekwentu:

Sekwenty – przypadki szczególne

Zarówno Γ jaki i Δ w sekwencie postaci $\Gamma \Rightarrow \Delta$ mogą być ciągami pustymi, wtedy:

- Γ interpretujemy jako $\top$

Ogólne pojęcie sekwentu:

Sekwenty – przypadki szczególne

Zarówno Γ jaki i Δ w sekwencie postaci $\Gamma \Rightarrow \Delta$ mogą być ciągami pustymi, wtedy:

- Γ interpretujemy jako $\top$
- Δ interpretujemy jako $\bot$

Ogólne pojęcie sekwentu:

Sekwenty – przypadki szczególne

Zarówno Γ jaki i Δ w sekwencie postaci $\Gamma \Rightarrow \Delta$ mogą być ciągami pustymi, wtedy:

- Γ interpretujemy jako $\top$
- Δ interpretujemy jako $\bot$

Konsekwencje:

Ogólne pojęcie sekwentu:

Sekwenty – przypadki szczególne

Zarówno Γ jaki i Δ w sekwencie postaci $\Gamma \Rightarrow \Delta$ mogą być ciągami pustymi, wtedy:

- Γ interpretujemy jako $\top$
- Δ interpretujemy jako $\bot$

Konsekwencje:

- sekwent z pustym Γ i Δ jest wyrażeniem wewnętrznie sprzecznym: $\Rightarrow \; := \; \bot$

Ogólne pojęcie sekwentu:

Sekwenty – przypadki szczególne

Zarówno Γ jaki i Δ w sekwencie postaci $\Gamma \Rightarrow \Delta$ mogą być ciągami pustymi, wtedy:

- Γ interpretujemy jako $\top$
- Δ interpretujemy jako $\bot$

Konsekwencje:

- sekwent z pustym Γ i Δ jest wyrażeniem wewnętrznie sprzecznym: $\Rightarrow \; := \; \bot$
- $\Gamma \Rightarrow$ oznacza, że elementy Γ tworzą zbiór sprzeczny

Ogólne pojęcie sekwentu:

podział wg. ilości formuł (struktur danych) w argumentach sekwentu:

Ogólne pojęcie sekwentu:

podział wg. ilości formuł (struktur danych) w argumentach sekwentu:

- tzw. intuicjonistyczny (many-one, single-conclusioned)

Ogólne pojęcie sekwentu:

podział wg. ilości formuł (struktur danych) w argumentach sekwentu:

- tzw. intuicjonistyczny (many-one, single-conclusioned)
- tzw. klasyczny (many-many, multi-conclusioned)

Ogólne pojęcie sekwentu:

podział wg. ilości formuł (struktur danych) w argumentach sekwentu:

- tzw. intuicjonistyczny (many-one, single-conclusioned)
- tzw. klasyczny (many-many, multi-conclusioned)
- inne, np. one-one (Rieger, Belnap)

Ogólne pojęcie sekwentu:

podział wg. ilości formuł (struktur danych) w argumentach sekwentu:

- tzw. intuicjonistyczny (many-one, single-conclusioned)
- tzw. klasyczny (many-many, multi-conclusioned)
- inne, np. one-one (Rieger, Belnap)

Uwaga1: rozróżnienie intuicjonistyczny/klasyczny ma charakter jedynie umowny – istnieją np. RS dla INT typu many-many, dla wielu logik charakter mieszany itp.

Typy reguł sekwentowych:

Reguły rachunków sekwentowych zwykło dzielić się na:

Typy reguł sekwentowych:

Reguły rachunków sekwentowych zwykło dzielić się na:

- strukturalne – dotyczą wyłącznie manipulacji elementami sekwentów, w ich schematach nie wysępują żadne stałe logiczne

Typy reguł sekwentowych:

Reguły rachunków sekwentowych zwykło dzielić się na:

- strukturalne – dotyczą wyłącznie manipulacji elementami sekwentów, w ich schematach nie wysępują żadne stałe logiczne
- logiczne – zawierają w schemacie reguły konkretne stałe logiczne określając zazwyczaj warunki wprowadzenia do (poprzednika, następnika) sekwentu lub eliminacji dla formuł z tą stałą logiczną.

Typy reguł sekwentowych:

Reguły rachunków sekwentowych zwykło dzielić się na:

- strukturalne – dotyczą wyłącznie manipulacji elementami sekwentów, w ich schematach nie wysępują żadne stałe logiczne
- logiczne – zawierają w schemacie reguły konkretne stałe logiczne określając zazwyczaj warunki wprowadzenia do (poprzednika, następnika) sekwentu lub eliminacji dla formuł z tą stałą logiczną.

Uwaga: Pogłębione badania nad formami takich reguł wiążą się ściśle z badaniami nad rozmaitymi antyrealistycznymi teoriami znaczenia stałych logicznych rozwijanymi m.in. przez Dummetta, Hackinga, Prawitza.

Typy rachunków sekwentowych:

Podziały oparte na analizie reguł:

Typy rachunków sekwentowych:

Podziały oparte na analizie reguł:

- wg. dopuszczalnego kształtu reguł logicznych

Typy rachunków sekwentowych:

Podziały oparte na analizie reguł:

- wg. dopuszczalnego kształtu reguł logicznych
- wg. rodzaju reguł logicznych:

Typy rachunków sekwentowych:

Podziały oparte na analizie reguł:

- wg. dopuszczalnego kształtu reguł logicznych
- wg. rodzaju reguł logicznych:
  - multiplikatywne (context-free, intensional, internal)

Typy rachunków sekwentowych:

Podziały oparte na analizie reguł:

- wg. dopuszczalnego kształtu reguł logicznych
- wg. rodzaju reguł logicznych:
  - multiplikatywne (context-free, intensional, internal)
  - addytywne (context-sharing, extensional, combining)

Typy rachunków sekwentowych:

Podziały oparte na analizie reguł:

- wg. dopuszczalnego kształtu reguł logicznych
- wg. rodzaju reguł logicznych:
  - multiplikatywne (context-free, intensional, internal)
  - addytywne (context-sharing, extensional, combining)
- wg. udziału reguł strukturalnych (eliminowalne/nieeliminowalne)

Typy rachunków sekwentowych:

Podziały oparte na analizie reguł:

- wg. dopuszczalnego kształtu reguł logicznych
- wg. rodzaju reguł logicznych:
  - multiplikatywne (context-free, intensional, internal)
  - addytywne (context-sharing, extensional, combining)
- wg. udziału reguł strukturalnych (eliminowalne/nieeliminowalne)
- wg. proporcji sekwenty/reguły sekwentowe (typy skrajne: RS w stylu Hertza/RS w stylu Gentzena)

Typy rachunków sekwentowych:

Dopuszczalne kształty reguł logicznych:

Typy rachunków sekwentowych:

Dopuszczalne kształty reguł logicznych:

Uwaga: ograniczamy się tylko do reguł z jednym wystąpieniem stałej $*$ i pomijamy kontekst.

Typy rachunków sekwentowych:

Dopuszczalne kształty reguł logicznych:

Uwaga: ograniczamy się tylko do reguł z jednym wystąpieniem stałej $*$ i pomijamy kontekst.

1. przypadek $n = 0$ (sekwenty)

Typy rachunków sekwentowych:

Dopuszczalne kształty reguł logicznych:

Uwaga: ograniczamy się tylko do reguł z jednym wystąpieniem stałej $*$ i pomijamy kontekst.

1. przypadek $n = 0$ (sekwenty)

(a) $\vdash *$ (wprowadzanie) lub (b) $* \vdash$ (eliminacja)

Typy rachunków sekwentowych:

Dopuszczalne kształty reguł logicznych:

Uwaga: ograniczamy się tylko do reguł z jednym wystąpieniem stałej $*$ i pomijamy kontekst.

1. przypadek $n = 0$ (sekwenty)

(a) $\vdash *$ (wprowadzanie) lub (b) $* \vdash$ (eliminacja)

2. przypadek $n > 0$ (reguły sekwentowe)

Typy rachunków sekwentowych:

Dopuszczalne kształty reguł logicznych:

Uwaga: ograniczamy się tylko do reguł z jednym wystąpieniem stałej $*$ i pomijamy kontekst.

1. przypadek $n = 0$ (sekwenty)

(a) $\vdash *$ (wprowadzanie) lub (b) $* \vdash$ (eliminacja)

2. przypadek $n > 0$ (reguły sekwentowe)

(c) $\vdash, ..., \vdash \;\; / \;\; \vdash *$ (wprowadzanie do następnika)

Typy rachunków sekwentowych:

Dopuszczalne kształty reguł logicznych:

Uwaga: ograniczamy się tylko do reguł z jednym wystąpieniem stałej $*$ i pomijamy kontekst.

1. przypadek $n = 0$ (sekwenty)

(a) $\vdash *$ (wprowadzanie) lub (b) $* \vdash$ (eliminacja)

2. przypadek $n > 0$ (reguły sekwentowe)

(c) $\vdash, \ldots, \vdash \;\; / \;\; \vdash *$ (wprowadzanie do następnika)

(d) $\vdash, \ldots, \vdash \;\; / \; * \vdash$ (wprowadzanie do poprzednika)

Typy rachunków sekwentowych:

Dopuszczalne kształty reguł logicznych:

Uwaga: ograniczamy się tylko do reguł z jednym wystąpieniem stałej $*$ i pomijamy kontekst.

1. przypadek $n = 0$ (sekwenty)

(a) $\vdash *$ (wprowadzanie) lub (b) $* \vdash$ (eliminacja)

2. przypadek $n > 0$ (reguły sekwentowe)

(c) $\vdash, ..., \vdash \ / \ \vdash *$ (wprowadzanie do następnika)

(d) $\vdash, ..., \vdash \ / * \vdash$ (wprowadzanie do poprzednika)

(e) $\vdash * \ / \ \vdash$ (eliminacja z następnika)

Typy rachunków sekwentowych:

Dopuszczalne kształty reguł logicznych:

Uwaga: ograniczamy się tylko do reguł z jednym wystąpieniem stałej $*$ i pomijamy kontekst.

1. przypadek $n = 0$ (sekwenty)

(a) $\vdash *$ (wprowadzanie) lub (b) $* \vdash$ (eliminacja)

2. przypadek $n > 0$ (reguły sekwentowe)

(c) $\vdash, ..., \vdash \ / \ \vdash *$ (wprowadzanie do następnika)

(d) $\vdash, ..., \vdash \ / * \vdash$ (wprowadzanie do poprzednika)

(e) $\vdash * \ / \ \vdash$ (eliminacja z następnika)

(f) $* \vdash \ / \ \vdash$ (eliminacja z poprzednika)

Typy rachunków sekwentowych:

Dopuszczalne kształty reguł logicznych:

Uwaga: ograniczamy się tylko do reguł z jednym wystąpieniem stałej $*$ i pomijamy kontekst.

1. przypadek $n = 0$ (sekwenty)

(a) $\vdash *$ (wprowadzanie) lub (b) $* \vdash$ (eliminacja)

2. przypadek $n > 0$ (reguły sekwentowe)

(c) $\vdash, ..., \vdash \ / \ \vdash *$ (wprowadzanie do następnika)

(d) $\vdash, ..., \vdash \ / * \vdash$ (wprowadzanie do poprzednika)

(e) $\vdash * \ / \ \vdash$ (eliminacja z następnika)

(f) $* \vdash \ / \ \vdash$ (eliminacja z poprzednika)

np. RS oparty na regułach typu (c) i (d) to standardowy RS Gentzena, a oparty na (c) i (e) to sekwentowy ND.

Typy rachunków sekwentowych:

Dopuszczalne kształty reguł logicznych – przykład koniunkcji:

Typy rachunków sekwentowych:

Dopuszczalne kształty reguł logicznych – przykład koniunkcji:

1. przypadek $n = 0$ (sekwenty)

Typy rachunków sekwentowych:

Dopuszczalne kształty reguł logicznych – przykład koniunkcji:

1. przypadek $n = 0$ (sekwenty)

(a) $\varphi, \psi \vdash \varphi \wedge \psi$ (wprowadzanie)

Typy rachunków sekwentowych:

Dopuszczalne kształty reguł logicznych – przykład koniunkcji:

1. przypadek $n = 0$ (sekwenty)

(a) $\varphi, \psi \vdash \varphi \wedge \psi$ (wprowadzanie)

(b) $\varphi \wedge \psi \vdash \varphi(\psi)$ (eliminacja)

Typy rachunków sekwentowych:

Dopuszczalne kształty reguł logicznych – przykład koniunkcji:

1. przypadek $n = 0$ (sekwenty)

(a) $\varphi, \psi \vdash \varphi \wedge \psi$ (wprowadzanie)

(b) $\varphi \wedge \psi \vdash \varphi(\psi)$ (eliminacja)

2. przypadek $n > 0$ (reguły sekwentowe)

Typy rachunków sekwentowych:

Dopuszczalne kształty reguł logicznych – przykład koniunkcji:

1. przypadek $n = 0$ (sekwenty)

(a) $\varphi, \psi \vdash \varphi \wedge \psi$ (wprowadzanie)

(b) $\varphi \wedge \psi \vdash \varphi(\psi)$ (eliminacja)

2. przypadek $n > 0$ (reguły sekwentowe)

(c) $\vdash \varphi, \ \vdash \psi \ / \ \vdash \varphi \wedge \psi$ (wprowadzanie do następnika)

Typy rachunków sekwentowych:

Dopuszczalne kształty reguł logicznych – przykład koniunkcji:

1. przypadek $n = 0$ (sekwenty)

(a) $\varphi, \psi \vdash \varphi \wedge \psi$ (wprowadzanie)

(b) $\varphi \wedge \psi \vdash \varphi(\psi)$ (eliminacja)

2. przypadek $n > 0$ (reguły sekwentowe)

(c) $\vdash \varphi, \ \vdash \psi \ / \ \vdash \varphi \wedge \psi$ (wprowadzanie do następnika)

(d) $\varphi, \psi \vdash \ / \ \varphi \wedge \psi \vdash$ (wprowadzanie do poprzednika)

Typy rachunków sekwentowych:

Dopuszczalne kształty reguł logicznych – przykład koniunkcji:

1. przypadek $n = 0$ (sekwenty)

(a) $\varphi, \psi \vdash \varphi \wedge \psi$ (wprowadzanie)

(b) $\varphi \wedge \psi \vdash \varphi(\psi)$ (eliminacja)

2. przypadek $n > 0$ (reguły sekwentowe)

(c) $\vdash \varphi, \ \vdash \psi \ / \ \vdash \varphi \wedge \psi$ (wprowadzanie do następnika)

(d) $\varphi, \psi \vdash \ / \ \varphi \wedge \psi \vdash$ (wprowadzanie do poprzednika)

(e) $\vdash \varphi \wedge \psi \ / \ \vdash \varphi(\psi)$ (eliminacja z następnika)

Typy rachunków sekwentowych:

Dopuszczalne kształty reguł logicznych – przykład koniunkcji:

1. przypadek $n = 0$ (sekwenty)

(a) $\varphi, \psi \vdash \varphi \wedge \psi$ (wprowadzanie)

(b) $\varphi \wedge \psi \vdash \varphi(\psi)$ (eliminacja)

2. przypadek $n > 0$ (reguły sekwentowe)

(c) $\vdash \varphi, \ \vdash \psi \ / \ \vdash \varphi \wedge \psi$ (wprowadzanie do następnika)

(d) $\varphi, \psi \vdash \ / \ \varphi \wedge \psi \vdash$ (wprowadzanie do poprzednika)

(e) $\vdash \varphi \wedge \psi \ / \ \vdash \varphi(\psi)$ (eliminacja z następnika)

(f) $\varphi \wedge \psi \vdash \ / \ \varphi, \psi \vdash$ (eliminacja z poprzednika)

Typy rachunków sekwentowych:

Dopuszczalne kształty reguł logicznych – przykład koniunkcji:

1. przypadek $n = 0$ (sekwenty)

(a) $\varphi, \psi \vdash \varphi \wedge \psi$ (wprowadzanie)

(b) $\varphi \wedge \psi \vdash \varphi(\psi)$ (eliminacja)

2. przypadek $n > 0$ (reguły sekwentowe)

(c) $\vdash \varphi, \ \vdash \psi \ / \ \vdash \varphi \wedge \psi$ (wprowadzanie do następnika)

(d) $\varphi, \psi \vdash \ / \ \varphi \wedge \psi \vdash$ (wprowadzanie do poprzednika)

(e) $\vdash \varphi \wedge \psi \ / \ \vdash \varphi(\psi)$ (eliminacja z następnika)

(f) $\varphi \wedge \psi \vdash \ / \ \varphi, \psi \vdash$ (eliminacja z poprzednika)

Uwaga: (c) i (e) oraz (d) i (f) to wzajemne konwersy, ale możliwe też inne warianty.

Typy rachunków sekwentowych:

Podział wg. rodzaju reguł logicznych:

Typy rachunków sekwentowych:

Podział wg. rodzaju reguł logicznych:

- multiplikatywne (context-free, intensional, internal)

Typy rachunków sekwentowych:

Podział wg. rodzaju reguł logicznych:

- multiplikatywne (context-free, intensional, internal)
- addytywne (context-sharing, extensional, combining)

Typy rachunków sekwentowych:

Podział wg. rodzaju reguł logicznych:

- multiplikatywne (context-free, intensional, internal)
- addytywne (context-sharing, extensional, combining)

Uwaga: rozróżnienie tych reguł dla stałych nie jest możliwe na gruncie standardowych relacji konsekwencji (zatem również na gruncie teorii operacji konsekwencji)

Typy rachunków sekwentowych:

Przypadek koniunkcji:

Typy rachunków sekwentowych:

Przypadek koniunkcji:

1. warunek dla multiplikatywnej koniunkcji:

$$\Gamma, \varphi, \psi \vdash \Delta \text{ wtw } \Gamma, \varphi \land \psi \vdash \Delta$$

Typy rachunków sekwentowych:

Przypadek koniunkcji:

1. warunek dla multiplikatywnej koniunkcji:

$$\Gamma, \varphi, \psi \vdash \Delta \text{ wtw } \Gamma, \varphi \wedge \psi \vdash \Delta$$

2. warunek dla addytywnej koniunkcji:

$$\Gamma, \vdash \Delta, \varphi \wedge \psi \text{ wtw } \Gamma \vdash \Delta, \varphi \text{ i } \Gamma \vdash \Delta, \psi$$

Typy rachunków sekwentowych:

Przypadek koniunkcji:

1. warunek dla multiplikatywnej koniunkcji:

$$\Gamma, \varphi, \psi \vdash \Delta \text{ wtw } \Gamma, \varphi \wedge \psi \vdash \Delta$$

2. warunek dla addytywnej koniunkcji:

$$\Gamma, \vdash \Delta, \varphi \wedge \psi \text{ wtw } \Gamma \vdash \Delta, \varphi \text{ i } \Gamma \vdash \Delta, \psi$$

3. reguły Gentzenowskie dla multiplikatywnej koniunkcji:

Typy rachunków sekwentowych:

Przypadek koniunkcji:

1. warunek dla multiplikatywnej koniunkcji:

$$\Gamma, \varphi, \psi \vdash \Delta \text{ wtw } \Gamma, \varphi \wedge \psi \vdash \Delta$$

2. warunek dla addytywnej koniunkcji:

$$\Gamma, \vdash \Delta, \varphi \wedge \psi \text{ wtw } \Gamma \vdash \Delta, \varphi \text{ i } \Gamma \vdash \Delta, \psi$$

3. reguły Gentzenowskie dla multiplikatywnej koniunkcji:
($L\wedge$) z warunku;

Typy rachunków sekwentowych:

Przypadek koniunkcji:

1. warunek dla multiplikatywnej koniunkcji:

$$\Gamma, \varphi, \psi \vdash \Delta \text{ wtw } \Gamma, \varphi \wedge \psi \vdash \Delta$$

2. warunek dla addytywnej koniunkcji:

$$\Gamma, \vdash \Delta, \varphi \wedge \psi \text{ wtw } \Gamma \vdash \Delta, \varphi \text{ i } \Gamma \vdash \Delta, \psi$$

3. reguły Gentzenowskie dla multiplikatywnej koniunkcji:

$(L\wedge)$ z warunku;
$(R\wedge)$ $\Gamma \vdash \Delta, \varphi; \Pi \vdash \Sigma, \psi \;/\; \Gamma, \Pi \vdash \Delta, \Sigma, \varphi \wedge \psi$

Typy rachunków sekwentowych:

Przypadek koniunkcji:

1. warunek dla multiplikatywnej koniunkcji:

$$\Gamma, \varphi, \psi \vdash \Delta \text{ wtw } \Gamma, \varphi \wedge \psi \vdash \Delta$$

2. warunek dla addytywnej koniunkcji:

$$\Gamma, \vdash \Delta, \varphi \wedge \psi \text{ wtw } \Gamma \vdash \Delta, \varphi \text{ i } \Gamma \vdash \Delta, \psi$$

3. reguły Gentzenowskie dla multiplikatywnej koniunkcji:
$(L\wedge)$ z warunku;
$(R\wedge)$ $\Gamma \vdash \Delta, \varphi; \Pi \vdash \Sigma, \psi \;/\; \Gamma, \Pi \vdash \Delta, \Sigma, \varphi \wedge \psi$
4. reguły Gentzenowskie dla addytywnej koniunkcji:

Typy rachunków sekwentowych:

Przypadek koniunkcji:

1. warunek dla multiplikatywnej koniunkcji:

$$\Gamma, \varphi, \psi \vdash \Delta \text{ wtw } \Gamma, \varphi \wedge \psi \vdash \Delta$$

2. warunek dla addytywnej koniunkcji:

$$\Gamma, \vdash \Delta, \varphi \wedge \psi \text{ wtw } \Gamma \vdash \Delta, \varphi \text{ i } \Gamma \vdash \Delta, \psi$$

3. reguły Gentzenowskie dla multiplikatywnej koniunkcji:
$(L\wedge)$ z warunku;
$(R\wedge)$ $\Gamma \vdash \Delta, \varphi; \Pi \vdash \Sigma, \psi$ / $\Gamma, \Pi \vdash \Delta, \Sigma, \varphi \wedge \psi$
4. reguły Gentzenowskie dla addytywnej koniunkcji:
$(R\wedge)$ z warunku;

Typy rachunków sekwentowych:

Przypadek koniunkcji:

1. warunek dla multiplikatywnej koniunkcji:

$$\Gamma, \varphi, \psi \vdash \Delta \text{ wtw } \Gamma, \varphi \wedge \psi \vdash \Delta$$

2. warunek dla addytywnej koniunkcji:

$$\Gamma, \vdash \Delta, \varphi \wedge \psi \text{ wtw } \Gamma \vdash \Delta, \varphi \text{ i } \Gamma \vdash \Delta, \psi$$

3. reguły Gentzenowskie dla multiplikatywnej koniunkcji:
$(L\wedge)$ z warunku;
$(R\wedge)$ $\Gamma \vdash \Delta, \varphi; \Pi \vdash \Sigma, \psi$ / $\Gamma, \Pi \vdash \Delta, \Sigma, \varphi \wedge \psi$
4. reguły Gentzenowskie dla addytywnej koniunkcji:
$(R\wedge)$ z warunku; $(L\wedge)$ to para reguł:

Typy rachunków sekwentowych:

Przypadek koniunkcji:

1. warunek dla multiplikatywnej koniunkcji:

$$\Gamma, \varphi, \psi \vdash \Delta \text{ wtw } \Gamma, \varphi \wedge \psi \vdash \Delta$$

2. warunek dla addytywnej koniunkcji:

$$\Gamma, \vdash \Delta, \varphi \wedge \psi \text{ wtw } \Gamma \vdash \Delta, \varphi \text{ i } \Gamma \vdash \Delta, \psi$$

3. reguły Gentzenowskie dla multiplikatywnej koniunkcji:
$(L\wedge)$ z warunku;
$(R\wedge)$ $\Gamma \vdash \Delta, \varphi; \Pi \vdash \Sigma, \psi$ / $\Gamma, \Pi \vdash \Delta, \Sigma, \varphi \wedge \psi$
4. reguły Gentzenowskie dla addytywnej koniunkcji:
$(R\wedge)$ z warunku; $(L\wedge)$ to para reguł:
$\Gamma, \varphi \vdash \Delta,$ / $\Gamma, \varphi \wedge \psi \vdash \Delta$ i
$\Gamma, \psi \vdash \Delta,$ / $\Gamma, \varphi \wedge \psi \vdash \Delta$

Typy rachunków sekwentowych:

Podział wg. udziału reguł strukturalnych (eliminowalne/nieeliminowalne)

Typy rachunków sekwentowych:

Podział wg. udziału reguł strukturalnych (eliminowalne/nieeliminowalne)

W obrębie standardowego typu RS rozróżnimy 3 najważniejsze warianty:

Typy rachunków sekwentowych:

Podział wg. udziału reguł strukturalnych (eliminowalne/nieeliminowalne)

W obrębie standardowego typu RS rozróżnimy 3 najważniejsze warianty:

- ogólny, w którym występują zarówno reguły strukturalne jak i logiczne

Typy rachunków sekwentowych:

Podział wg. udziału reguł strukturalnych (eliminowalne/nieeliminowalne)

W obrębie standardowego typu RS rozróżnimy 3 najważniejsze warianty:

- ogólny, w którym występują zarówno reguły strukturalne jak i logiczne
- logiczny, w którym reguły strukturalne są wyeliminowane na rzecz logicznych

Typy rachunków sekwentowych:

Podział wg. udziału reguł strukturalnych (eliminowalne/nieeliminowalne)

W obrębie standardowego typu RS rozróżnimy 3 najważniejsze warianty:

- ogólny, w którym występują zarówno reguły strukturalne jak i logiczne
- logiczny, w którym reguły strukturalne są wyeliminowane na rzecz logicznych
- strukturalny, w którym zmniejszony jest udział reguł logicznych na rzecz strukturalnych

Typy rachunków sekwentowych:

Podział wg. udziału reguł strukturalnych (eliminowalne/nieeliminowalne)

W obrębie standardowego typu RS rozróżnimy 3 najważniejsze warianty:

- ogólny, w którym występują zarówno reguły strukturalne jak i logiczne
- logiczny, w którym reguły strukturalne są wyeliminowane na rzecz logicznych
- strukturalny, w którym zmniejszony jest udział reguł logicznych na rzecz strukturalnych

Uwaga: istnieje zależność między alternatywą RS a udziałem reguł strukturalnych; z-system z natury rzeczy minimalizuje udział reguł strukturalnych.

Typy rachunków sekwentowych:

Podział wg. proporcji sekwenty/reguły sekwentowe pozwala wyróżnić typy RS:

Typy rachunków sekwentowych:

Podział wg. proporcji sekwenty/reguły sekwentowe pozwala wyróżnić typy RS:

- przewaga reguł; w szczególności typ jeden sekwent/wiele reguł (RS w stylu Gentzena):

Typy rachunków sekwentowych:

Podział wg. proporcji sekwenty/reguły sekwentowe pozwala wyróżnić typy RS:

- przewaga reguł; w szczególności typ jeden sekwent/wiele reguł (RS w stylu Gentzena):
  - standardowe RS

Typy rachunków sekwentowych:

Podział wg. proporcji sekwenty/reguły sekwentowe pozwala wyróżnić typy RS:

- przewaga reguł; w szczególności typ jeden sekwent/wiele reguł (RS w stylu Gentzena):
  - standardowe RS
  - sekwentowe ND

Typy rachunków sekwentowych:

Podział wg. proporcji sekwenty/reguły sekwentowe pozwala wyróżnić typy RS:

- przewaga reguł; w szczególności typ jeden sekwent/wiele reguł (RS w stylu Gentzena):
  - standardowe RS
  - sekwentowe ND
- przewaga sekwentów; w szczególności typ z regułami tylko strukturalnymi (RS w stylu Hertza i Suszki)

Typy rachunków sekwentowych:

Podział wg. proporcji sekwenty/reguły sekwentowe pozwala wyróżnić typy RS:

- przewaga reguł; w szczególności typ jeden sekwent/wiele reguł (RS w stylu Gentzena):
  - standardowe RS
  - sekwentowe ND
- przewaga sekwentów; w szczególności typ z regułami tylko strukturalnymi (RS w stylu Hertza i Suszki)
- typ mieszany (Bernays, Hermes)

Typy rachunków sekwentowych:

Podsumowując rozróżniamy:

Typy rachunków sekwentowych:

Podsumowując rozróżniamy:

1. alternatywy RS – wg. rodzaju argumentów sekwentów

Typy rachunków sekwentowych:

Podsumowując rozróżniamy:

1. alternatywy RS – wg. rodzaju argumentów sekwentów
2. warianty RS – wg. udziału reguł strukturalnych

Typy rachunków sekwentowych:

Podsumowując rozróżniamy:

1. alternatywy RS – wg. rodzaju argumentów sekwentów
2. warianty RS – wg. udziału reguł strukturalnych
3. typy RS – wg. stosunku sekwentów do reguł sekwentowych

Typy rachunków sekwentowych:

Podsumowując rozróżniamy:

1. alternatywy RS – wg. rodzaju argumentów sekwentów
2. warianty RS – wg. udziału reguł strukturalnych
3. typy RS – wg. stosunku sekwentów do reguł sekwentowych
4. Uogólnione RS – budowane na niestandardowych sekwentach (hipersekwenty itp.)

Dlaczego RS jest tak uniwersalnym sposobem formalizacji logik?

Możliwe interpretacje sekwentu:

Dlaczego RS jest tak uniwersalnym sposobem formalizacji logik?

Możliwe interpretacje sekwentu:

1. interpretacja sekwentu jako implikacji użyta przez Gentzena dla wykazania równoważności z systemem aksjomatycznym

Dlaczego RS jest tak uniwersalnym sposobem formalizacji logik?

Możliwe interpretacje sekwentu:

1. interpretacja sekwentu jako implikacji użyta przez Gentzena dla wykazania równoważności z systemem aksjomatycznym
2. interpretacja $\Rightarrow$ jako zależności Δ od założeń; prowadzi do skonstruowania S-systemu DN na bazie RS (Gentzen 1936)

Dlaczego RS jest tak uniwersalnym sposobem formalizacji logik?

Możliwe interpretacje sekwentu:

1. interpretacja sekwentu jako implikacji użyta przez Gentzena dla wykazania równoważności z systemem aksjomatycznym
2. interpretacja $\Rightarrow$ jako zależności Δ od założeń; prowadzi do skonstruowania S-systemu DN na bazie RS (Gentzen 1936)
3. interpretacja $\Rightarrow$ jako symbolu relacji inferencji; prowadzi do skonstruowania F-systemu DN na bazie RS (Gentzen 1934)

Dlaczego RS jest tak uniwersalnym sposobem formalizacji logik?

Możliwe interpretacje sekwentu:

1. interpretacja sekwentu jako implikacji użyta przez Gentzena dla wykazania równoważności z systemem aksjomatycznym
2. interpretacja $\Rightarrow$ jako zależności Δ od założeń; prowadzi do skonstruowania S-systemu DN na bazie RS (Gentzen 1936)
3. interpretacja $\Rightarrow$ jako symbolu relacji inferencji; prowadzi do skonstruowania F-systemu DN na bazie RS (Gentzen 1934)
4. interpretacja sekwentu jako koniunkcji z pustym następnikiem; reguły czytane odwrotnie (w terminach falsyfikowalności); drzewo dowodowe staje się formalnym zapisem sprawdzania niewprost

Dlaczego RS jest tak uniwersalnym sposobem formalizacji logik?

Możliwe interpretacje sekwentu:

1. interpretacja sekwentu jako implikacji użyta przez Gentzena dla wykazania równoważności z systemem aksjomatycznym
2. interpretacja $\Rightarrow$ jako zależności Δ od założeń; prowadzi do skonstruowania S-systemu DN na bazie RS (Gentzen 1936)
3. interpretacja $\Rightarrow$ jako symbolu relacji inferencji; prowadzi do skonstruowania F-systemu DN na bazie RS (Gentzen 1934)
4. interpretacja sekwentu jako koniunkcji z pustym następnikiem; reguły czytane odwrotnie (w terminach falsyfikowalności); drzewo dowodowe staje się formalnym zapisem sprawdzania niewprost
5. interpretacja sekwentu jako alternatywy z pustym poprzednikiem; reguły czytane odwrotnie (w terminach weryfikowalności); drzewo dowodowe staje się formalnym

Dlaczego RS jest tak uniwersalnym sposobem formalizacji logik?

Możliwe interpretacje sekwentu:

1. interpretacja sekwentu jako implikacji użyta przez Gentzena dla wykazania równoważności z systemem aksjomatycznym
2. interpretacja $\Rightarrow$ jako zależności Δ od założeń; prowadzi do skonstruowania S-systemu DN na bazie RS (Gentzen 1936)
3. interpretacja $\Rightarrow$ jako symbolu relacji inferencji; prowadzi do skonstruowania F-systemu DN na bazie RS (Gentzen 1934)
4. interpretacja sekwentu jako koniunkcji z pustym następnikiem; reguły czytane odwrotnie (w terminach falsyfikowalności); drzewo dowodowe staje się formalnym zapisem sprawdzania niewprost
5. interpretacja sekwentu jako alternatywy z pustym poprzednikiem; reguły czytane odwrotnie (w terminach weryfikowalności); drzewo dowodowe staje się formalnym

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

LK Gentzena (1934) – reguły strukturalne

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

LK Gentzena (1934) – reguły strukturalne

$(AX)\quad \varphi \Rightarrow \varphi$

$$(Cut)\quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}$$

$$(W\Rightarrow)\quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow W)\quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}$$

$$(C\Rightarrow)\quad \frac{\varphi, \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow C)\quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \varphi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}$$

$$(P\Rightarrow)\quad \frac{\Pi, \varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Pi, \psi, \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow P)\quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi, \varphi, \Pi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi, \Pi}$$

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

LK Gentzena (1934) – reguły strukturalne

$(AX)\quad \varphi \Rightarrow \varphi$

$(Cut)\quad \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}$

$(W\Rightarrow)\quad \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ $\qquad (\Rightarrow W)\quad \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}$

$(C\Rightarrow)\quad \dfrac{\varphi, \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ $\qquad (\Rightarrow C)\quad \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \varphi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}$

$(P\Rightarrow)\quad \dfrac{\Pi, \varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Pi, \psi, \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ $\qquad (\Rightarrow P)\quad \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi, \varphi, \Pi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi, \Pi}$

Uwaga: nazwy reguł: W – weakening, C – contraction, P – permutation.

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

LK Gentzena (1934) – reguły logiczne

RACHUNEK SEKWENTÓW GENTZENA

LK Gentzena (1934) – reguły logiczne

$(\neg\Rightarrow)\ \dfrac{\Gamma\Rightarrow\Delta,\varphi}{\neg\varphi,\Gamma\Rightarrow\Delta}$ $(\Rightarrow\neg)\ \dfrac{\varphi,\Gamma\Rightarrow\Delta}{\Gamma\Rightarrow\Delta,\neg\varphi}$

$(\wedge\Rightarrow)\ \dfrac{\varphi,\Gamma\Rightarrow\Delta}{\varphi\wedge\psi,\Gamma\Rightarrow\Delta}$ $(\wedge\Rightarrow)\ \dfrac{\psi,\Gamma\Rightarrow\Delta}{\varphi\wedge\psi,\Gamma\Rightarrow\Delta}$

$(\Rightarrow\wedge)\ \dfrac{\Gamma\Rightarrow\Delta,\varphi \quad \Gamma\Rightarrow\Delta,\psi}{\Gamma\Rightarrow\Delta,\varphi\wedge\psi}$ $(\vee\Rightarrow)\ \dfrac{\varphi,\Gamma\Rightarrow\Delta \quad \psi,\Gamma\Rightarrow\Delta}{\varphi\vee\psi,\Gamma\Rightarrow\Delta}$

$(\Rightarrow\vee)\ \dfrac{\Gamma\Rightarrow\Delta,\varphi}{\Gamma\Rightarrow\Delta,\varphi\vee\psi}$ $(\Rightarrow\vee)\ \dfrac{\Gamma\Rightarrow\Delta,\psi}{\Gamma\Rightarrow\Delta,\varphi\vee\psi}$

$(\rightarrow\Rightarrow)\ \dfrac{\Gamma\Rightarrow\Delta,\varphi \quad \psi,\Pi\Rightarrow\Sigma}{\varphi\rightarrow\psi,\Gamma,\Pi\Rightarrow\Delta,\Sigma}$ $(\Rightarrow\rightarrow)\ \dfrac{\varphi,\Gamma\Rightarrow\Delta,\psi}{\Gamma\Rightarrow\Delta,\varphi\rightarrow\psi}$

Rachunek LK Gentzena – reguły:

Przykłady zastosowania reguł:

Rachunek LK Gentzena – reguły:

Przykłady zastosowania reguł:

$$\frac{p \wedge q, q \to r \Rightarrow \neg q, p \to r \qquad p \wedge q, q \to r \Rightarrow \neg q, \neg s}{p \wedge q, q \to r \Rightarrow \neg q, (p \to r) \wedge \neg s}$$

daje nam przykład zastosowania $(\Rightarrow \wedge)$,

Rachunek LK Gentzena – reguły:

Przykłady zastosowania reguł:

$$\frac{p \wedge q, q \rightarrow r \Rightarrow \neg q, p \rightarrow r \qquad p \wedge q, q \rightarrow r \Rightarrow \neg q, \neg s}{p \wedge q, q \rightarrow r \Rightarrow \neg q, (p \rightarrow r) \wedge \neg s}$$

daje nam przykład zastosowania $(\Rightarrow \wedge)$,
natomiast:

$$\frac{p \wedge q, q \rightarrow r \Rightarrow \neg q, p \rightarrow r, \neg r \qquad p \vee q, q \rightarrow r, q \wedge r \Rightarrow \neg(p \vee r), \neg s}{\neg r \rightarrow p \vee q, p \wedge q, q \rightarrow r, q \rightarrow r, q \wedge r \Rightarrow \neg q, p \rightarrow r, \neg(p \vee r), \neg s}$$

daje przykład zastosowania $(\rightarrow\Rightarrow)$.

Rachunek LK Gentzena – reguły:

Elementy reguł sekwentowych:

Rachunek LK Gentzena – reguły:

Elementy reguł sekwentowych:

Formuła, która powstaje w wyniku zastosowania danej reguły logicznej to *formuła zasadnicza* tego sekwentu.

Rachunek LK Gentzena – reguły:

Elementy reguł sekwentowych:

Formuła, która powstaje w wyniku zastosowania danej reguły logicznej to *formuła zasadnicza* tego sekwentu.
Formuła bądź formuły, które posłużyły do jej uzyskania, to *formuły poboczne* sekwentów-przesłanek.

Rachunek LK Gentzena – reguły:

Elementy reguł sekwentowych:

Formuła, która powstaje w wyniku zastosowania danej reguły logicznej to *formuła zasadnicza* tego sekwentu.
Formuła bądź formuły, które posłużyły do jej uzyskania, to *formuły poboczne* sekwentów-przesłanek.
Wszystkie pozostałe elementy zbiorów Γ i Δ, to *formuły parametryczne* (krótko parametry) w zastosowaniu danej reguły.

Rachunek LK Gentzena – reguły:

Elementy reguł sekwentowych:

Formuła, która powstaje w wyniku zastosowania danej reguły logicznej to *formuła zasadnicza* tego sekwentu.
Formuła bądź formuły, które posłużyły do jej uzyskania, to *formuły poboczne* sekwentów-przesłanek.
Wszystkie pozostałe elementy zbiorów Γ i Δ, to *formuły parametryczne* (krótko parametry) w zastosowaniu danej reguły.
W regułach strukturalnych wszystkie wyróżnione w schematach reguł formuły φ, ψ to formuły zasadnicze w zastosowaniu tych reguł.

Rachunek LK Gentzena – dowody:

Dowód sekwentu

Rachunek LK Gentzena – dowody:

Dowód sekwentu

1. Każde jednoelementowe drzewo, którego węzeł jest sekwentem aksjomatycznym S jest *dowodem sekwentu* S.

Rachunek LK Gentzena – dowody:

Dowód sekwentu

1. Każde jednoelementowe drzewo, którego węzeł jest sekwentem aksjomatycznym S jest *dowodem sekwentu* S.
2. Jeżeli $\mathcal{D}$ jest dowodem sekwentu S, to drzewo uzyskane przez dopisanie sekwentu S' poniżej sekwentu S jest dowodem sekwentu S', pod warunkiem, że S jest podstawieniem przesłanki a S' jest podstawieniem wniosku jednej z reguł jednoprzesłankowych.

Rachunek LK Gentzena – dowody:

Dowód sekwentu

1. Każde jednoelementowe drzewo, którego węzeł jest sekwentem aksjomatycznym S jest *dowodem sekwentu* S.
2. Jeżeli $\mathcal{D}$ jest dowodem sekwentu S, to drzewo uzyskane przez dopisanie sekwentu S' poniżej sekwentu S jest dowodem sekwentu S', pod warunkiem, że S jest podstawieniem przesłanki a S' jest podstawieniem wniosku jednej z reguł jednoprzesłankowych.
3. Jeżeli $\mathcal{D}$ jest dowodem sekwentu S a $\mathcal{D}'$ jest dowodem S', to drzewo uzyskane przez dopisanie sekwentu S" poniżej sekwentów S i S' jest dowodem sekwentu S", pod warunkiem, że S jest podstawieniem lewej przesłanki, S' jest podstawieniem prawej przesłanki, a S" jest podstawieniem wniosku jednej z reguł dwuprzesłankowych.

Rachunek LK Gentzena – dowody:

Dowód sekwentu

1. Każde jednoelementowe drzewo, którego węzeł jest sekwentem aksjomatycznym S jest *dowodem sekwentu* S.
2. Jeżeli $\mathcal{D}$ jest dowodem sekwentu S, to drzewo uzyskane przez dopisanie sekwentu S' poniżej sekwentu S jest dowodem sekwentu S', pod warunkiem, że S jest podstawieniem przesłanki a S' jest podstawieniem wniosku jednej z reguł jednoprzesłankowych.
3. Jeżeli $\mathcal{D}$ jest dowodem sekwentu S a $\mathcal{D}'$ jest dowodem S', to drzewo uzyskane przez dopisanie sekwentu S" poniżej sekwentów S i S' jest dowodem sekwentu S", pod warunkiem, że S jest podstawieniem lewej przesłanki, S' jest podstawieniem prawej przesłanki, a S" jest podstawieniem wniosku jednej z reguł dwuprzesłankowych.
4. Nic więcej nie jest dowodem sekwentu w RS.

Rachunek LK Gentzena – dowody:

Dowód sekwentu

Rachunek LK Gentzena – dowody:

Dowód sekwentu

To, że sekwent $\Gamma \Rightarrow \Delta$ ma dowód będziemy zaznaczać pisząc $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$.

Rachunek LK Gentzena – dowody:

Dowód sekwentu

To, że sekwent $\Gamma \Rightarrow \Delta$ ma dowód będziemy zaznaczać pisząc $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$.

W szczególności dowód sekwentu $\Rightarrow \varphi$, to dowód tezy φ.

Rachunek LK Gentzena – dowody:

Dowód sekwentu

To, że sekwent $\Gamma \Rightarrow \Delta$ ma dowód będziemy zaznaczać pisząc $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$.

W szczególności dowód sekwentu $\Rightarrow \varphi$, to dowód tezy φ.

Uwaga: Podana definicja dowodu jest indukcyjna, co umożliwia dowody przez indukcję po rozmiarach dowodu.

Rachunek LK Gentzena – dowody:

Sposoby mierzenia rozmiarów dowodu sekwentu:

Rachunek LK Gentzena – dowody:

Sposoby mierzenia rozmiarów dowodu sekwentu:

- długość dowodu

Rachunek LK Gentzena – dowody:

Sposoby mierzenia rozmiarów dowodu sekwentu:

- długość dowodu
- wysokość dowodu (height)

Rachunek LK Gentzena – dowody:

Sposoby mierzenia rozmiarów dowodu sekwentu:

- długość dowodu
- wysokość dowodu (height)
- wielkość dowodu

Rachunek LK Gentzena – dowody:

długość dowodu:

Rachunek LK Gentzena – dowody:

długość dowodu:

- Dowód aksjomatu ma długość 0

Rachunek LK Gentzena – dowody:

długość dowodu:

- Dowód aksjomatu ma długość 0
- jeżeli S został wydedukowany z S' za pomocą reguły 1-przesłankowej, to jeżeli dowód S' ma długość n, to dowód S ma długość $n + 1$

Rachunek LK Gentzena – dowody:

długość dowodu:

- Dowód aksjomatu ma długość 0
- jeżeli S został wydedukowany z S' za pomocą reguły 1-przesłankowej, to jeżeli dowód S' ma długość n, to dowód S ma długość $n+1$
- jeżeli S został wydedukowany z S'i S" za pomocą reguły 2-przesłankowej, to jeżeli dowód S' ma długość n a dowód S" ma długość m, to dowód S ma długość $Max(n, m) + 1$

Rachunek LK Gentzena – dowody:

długość dowodu:

- Dowód aksjomatu ma długość 0
- jeżeli S został wydedukowany z S' za pomocą reguły 1-przesłankowej, to jeżeli dowód S' ma długość n, to dowód S ma długość $n + 1$
- jeżeli S został wydedukowany z S'i S" za pomocą reguły 2-przesłankowej, to jeżeli dowód S' ma długość n a dowód S" ma długość m, to dowód S ma długość $Max(n, m) + 1$

Niech $\mathcal{D}$ oznacza dowód wtedy długość dowodu oznaczymy przez $\mid \mathcal{D} \mid$.

Rachunek LK Gentzena – dowody:

wysokość dowodu

Rachunek LK Gentzena – dowody:

wysokość dowodu

- Dowód aksjomatu ma wysokość 0

Rachunek LK Gentzena – dowody:

wysokość dowodu

- Dowód aksjomatu ma wysokość 0
- jeżeli S został wydedukowany z S' za pomocą logicznej reguły 1-przesłankowej, to jeżeli dowód S' ma wysokość n, to dowód S ma wysokość $n+1$

Rachunek LK Gentzena – dowody:

wysokość dowodu

- Dowód aksjomatu ma wysokość 0
- jeżeli S został wydedukowany z S' za pomocą logicznej reguły 1-przesłankowej, to jeżeli dowód S' ma wysokość n, to dowód S ma wysokość $n+1$
- jeżeli S został wydedukowany z S'i S" za pomocą reguły 2-przesłankowej, to jeżeli dowód S' ma wysokość n a dowód S" ma wysokość m, to dowód S ma wysokość $Max(n, m) + 1$

Rachunek LK Gentzena – dowody:

wysokość dowodu

- Dowód aksjomatu ma wysokość 0
- jeżeli S został wydedukowany z S' za pomocą logicznej reguły 1-przesłankowej, to jeżeli dowód S' ma wysokość n, to dowód S ma wysokość $n + 1$
- jeżeli S został wydedukowany z S'i S" za pomocą reguły 2-przesłankowej, to jeżeli dowód S' ma wysokość n a dowód S" ma wysokość m, to dowód S ma wysokość $Max(n, m) + 1$

Jeżeli $\Gamma \Rightarrow \Delta$ ma dowód wysokości n, to będziemy to czasami zaznaczać pisząc $\Gamma \Rightarrow_n \Delta$.

Rachunek LK Gentzena – dowody:

wielkość dowodu

Rachunek LK Gentzena – dowody:

wielkość dowodu

- Dowód aksjomatu ma wielkość 0

Rachunek LK Gentzena – dowody:

wielkość dowodu

- Dowód aksjomatu ma wielkość 0
- jeżeli S został wydedukowany z S' za pomocą logicznej reguły 1-przesłankowej, to jeżeli dowód S' ma wielkość n, to dowód S ma wielkość $n + 1$

Rachunek LK Gentzena – dowody:

wielkość dowodu

- Dowód aksjomatu ma wielkość 0
- jeżeli S został wydedukowany z S' za pomocą logicznej reguły 1-przesłankowej, to jeżeli dowód S' ma wielkość n, to dowód S ma wielkość $n + 1$
- jeżeli S został wydedukowany z S'i S" za pomocą reguły 2-przesłankowej, to jeżeli dowód S' ma wielkość n a dowód S" ma wielkość m, to dowód S ma wielkość $n + m + 1$

Rachunek LK Gentzena – dowody:

wielkość dowodu

- Dowód aksjomatu ma wielkość 0
- jeżeli S został wydedukowany z S' za pomocą logicznej reguły 1-przesłankowej, to jeżeli dowód S' ma wielkość n, to dowód S ma wielkość $n + 1$
- jeżeli S został wydedukowany z S'i S" za pomocą reguły 2-przesłankowej, to jeżeli dowód S' ma wielkość n a dowód S" ma wielkość m, to dowód S ma wielkość $n + m + 1$

Niech $\mathcal{D}$ oznacza dowód wtedy wielkość dowodu oznaczymy przez $\parallel \mathcal{D} \parallel$.

Rachunek LK Gentzena – dowody:

Dowód sekwentu – przykład:

Rachunek LK Gentzena – dowody:

Dowód sekwentu – przykład:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \Rightarrow p \qquad \dfrac{(\to\Rightarrow)\ \dfrac{p \Rightarrow p \qquad q \Rightarrow q}{p \to q, p \Rightarrow q} \qquad r \Rightarrow r}{q \to r, p \to q, p \Rightarrow r}\ (\to\Rightarrow)}{p \to (q \to r), p, p \to q, p \Rightarrow r}\ (\to\Rightarrow)}{p, p \to (q \to r), p \to q, p \Rightarrow r}\ (P\Rightarrow)}{p, p \to (q \to r), p, p \to q \Rightarrow r}\ (P\Rightarrow)}{p, p, p \to (q \to r), p \to q \Rightarrow r}\ (P\Rightarrow)}{p, p \to (q \to r), p \to q \Rightarrow r}\ (C\Rightarrow)}{p \to (q \to r), p \to q \Rightarrow p \to r}\ (\Rightarrow\to)}{p \to q, p \to (q \to r) \Rightarrow p \to r}\ (P\Rightarrow)}{p \to (q \to r) \Rightarrow (p \to q) \to (p \to r)}\ (\Rightarrow\to)}{\Rightarrow (p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))}\ (\Rightarrow\to)
$$

Rachunek LK Gentzena – dowody:

Dowód sekwentu – przykład z uproszczeniami:

Rachunek LK Gentzena – dowody:

Dowód sekwentu – przykład z uproszczeniami:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \Rightarrow p \qquad \dfrac{\dfrac{p \Rightarrow p \qquad q \Rightarrow q}{p \to q, p \Rightarrow q}\,(\to\Rightarrow) \qquad r \Rightarrow r}{q \to r, p \to q, p \Rightarrow r}\,(\to\Rightarrow)}{p \to (q \to r), p, p \to q, p \Rightarrow r}\,(\to\Rightarrow)}{p \to (q \to r), p \to q \Rightarrow p \to r}\,(\Rightarrow\to)}{\dfrac{p \to (q \to r) \Rightarrow (p \to q) \to (p \to r)}{\Rightarrow (p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))}\,(\Rightarrow\to)}\,(\Rightarrow\to)
$$

Rachunek LK Gentzena

Adekwatność LK-KRZ

Gentzen udowodnił adekwatność LK syntaktycznie wykazując jego równoważność z H-**KRZ**

Rachunek LK Gentzena

Adekwatność LK-KRZ

Gentzen udowodnił adekwatność LK syntaktycznie wykazując jego równoważność z H-**KRZ**

Twierdzenie1: $\vdash_H \varphi$ wtw $\vdash \Rightarrow \varphi$

Rachunek LK Gentzena

Adekwatność LK-KRZ

Gentzen udowodnił adekwatność LK syntaktycznie wykazując jego równoważność z H-**KRZ**

Twierdzenie1: $\vdash_H \varphi$ wtw $\vdash \Rightarrow \varphi$

Udowodnimy jedną z implikacji składających się na powyższe twierdzenie:

Rachunek LK Gentzena

Adekwatność LK-KRZ

Gentzen udowodnił adekwatność LK syntaktycznie wykazując jego równoważność z H-**KRZ**

Twierdzenie1: $\vdash_H \varphi$ wtw $\vdash \Rightarrow \varphi$

Udowodnimy jedną z implikacji składających się na powyższe twierdzenie:

Lemat2: Jeżeli $\vdash_H \varphi$, to $\vdash \Rightarrow \varphi$

Rachunek LK Gentzena

Adekwatność LK-KRZ

Gentzen udowodnił adekwatność LK syntaktycznie wykazując jego równoważność z H-**KRZ**

Twierdzenie1: $\vdash_H \varphi$ wtw $\vdash \Rightarrow \varphi$

Udowodnimy jedną z implikacji składających się na powyższe twierdzenie:

Lemat2: Jeżeli $\vdash_H \varphi$, to $\vdash \Rightarrow \varphi$

Dowód lematu2 wymaga skonstruowania w LK schematów dowodów wszystkich aksjomatów oraz wykazania, że każde zastosowanie MP w dowodzie w H daje się odtworzyć w LK.

Adekwatność LK-KRZ

Adekwatność LK-KRZ

Przypomnijmy inwariantną aksjomatykę **KRZ** z regułą MP jako jedyną regułą inferencji:

Adekwatność LK-KRZ

Adekwatność LK-KRZ

Przypomnijmy inwariantną aksjomatykę **KRZ** z regułą MP jako jedyną regułą inferencji:

1. $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
2. $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$
3. $\varphi \wedge \psi \rightarrow \varphi$
4. $\varphi \wedge \psi \rightarrow \psi$
5. $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi \wedge \psi)$
6. $\varphi \rightarrow \varphi \vee \psi$
7. $\psi \rightarrow \varphi \vee \psi$
8. $(\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \vee \psi \rightarrow \chi))$
9. $(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$

Adekwatność LK-KRZ

Schemat dowodu dla aksjomatu 8.

Adekwatność LK-KRZ

Schemat dowodu dla aksjomatu 8.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\varphi \Rightarrow \varphi$}
\AxiomC{$\chi \Rightarrow \chi$}
\LeftLabel{$(\to\Rightarrow)$}
\BinaryInfC{$\varphi \to \chi, \varphi \Rightarrow \chi$}
\doubleLine
\LeftLabel{$(W \Rightarrow)$}
\UnaryInfC{$\varphi, \psi \to \chi, \varphi \to \chi \Rightarrow \chi$}
\AxiomC{$\psi \Rightarrow \psi$}
\AxiomC{$\chi \Rightarrow \chi$}
\RightLabel{$(\to\Rightarrow)$}
\BinaryInfC{$\psi \to \chi, \psi \Rightarrow \chi$}
\doubleLine
\RightLabel{$(\Rightarrow W)$}
\UnaryInfC{$\psi, \psi \to \chi, \varphi \to \chi \Rightarrow \chi$}
\LeftLabel{$(\vee \Rightarrow)$}
\BinaryInfC{$\varphi \vee \psi, \psi \to \chi, \varphi \to \chi \Rightarrow \chi$}
\LeftLabel{$(\Rightarrow\to)$}
\UnaryInfC{$\psi \to \chi, \varphi \to \chi \Rightarrow \varphi \vee \psi \to \chi$}
\LeftLabel{$(\Rightarrow\to)$}
\UnaryInfC{$\varphi \to \chi \Rightarrow (\psi \to \chi) \to (\varphi \vee \psi \to \chi)$}
\LeftLabel{$(\Rightarrow\to)$}
\UnaryInfC{$\Rightarrow (\varphi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \vee \psi \to \chi))$}
\end{prooftree}
$$

Adekwatność LK-KRZ

Schemat zastosowania MP w LK.

Adekwatność LK-KRZ

Schemat zastosowania MP w LK.

$$
\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_2\\ \Rightarrow \varphi\end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1\\ \Rightarrow \varphi \to \psi\end{matrix} \qquad \dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi \qquad \psi \Rightarrow \psi}{\varphi \to \psi, \varphi \Rightarrow \psi}\,(\to\Rightarrow)}{\varphi \Rightarrow \psi}\,(Cut)}{\Rightarrow \psi}\,(Cut)
$$

gdzie $\mathcal{D}_1$ i $\mathcal{D}_2$ to symulacje (w LK) dowodów w H obu tez stanowiących przesłanki zastosowania MP.

Adekwatność LK-KRZ

Przekładalność sekwentów

Adekwatność LK-KRZ

Przekładalność sekwentów

Aby udowodnić implikację w drugą stronę musiał jednak Gentzen dokonać jakiejś formy przekładu sekwentów na uboższy język aksjomatycznej formalizacji.

Adekwatność LK-KRZ

Przekładalność sekwentów

Aby udowodnić implikację w drugą stronę musiał jednak Gentzen dokonać jakiejś formy przekładu sekwentów na uboższy język aksjomatycznej formalizacji.

- Dowolny sekwent o postaci $\varphi_1, ..., \varphi_i \Rightarrow \psi_1, ..., \psi_k$ z $i > 0, k > 0$ należy zinterpretować jako formułę postaci $\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_i \rightarrow \psi_1 \vee ... \vee \psi_k$.

Adekwatność LK-KRZ

Przekładalność sekwentów

Aby udowodnić implikację w drugą stronę musiał jednak Gentzen dokonać jakiejś formy przekładu sekwentów na uboższy język aksjomatycznej formalizacji.

- Dowolny sekwent o postaci $\varphi_1, ..., \varphi_i \Rightarrow \psi_1, ..., \psi_k$ z $i > 0, k > 0$ należy zinterpretować jako formułę postaci $\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_i \rightarrow \psi_1 \vee ... \vee \psi_k$.
- W przypadku $i = 1$ lub $k = 1$ mamy do czynienia ze zredukowaną (jednoelementową) koniunkcją lub alternatywą.

Adekwatność LK-KRZ

Przekładalność sekwentów

Aby udowodnić implikację w drugą stronę musiał jednak Gentzen dokonać jakiejś formy przekładu sekwentów na uboższy język aksjomatycznej formalizacji.

- Dowolny sekwent o postaci $\varphi_1, ..., \varphi_i \Rightarrow \psi_1, ..., \psi_k$ z $i > 0, k > 0$ należy zinterpretować jako formułę postaci $\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_i \rightarrow \psi_1 \vee ... \vee \psi_k$.
- W przypadku $i = 1$ lub $k = 1$ mamy do czynienia ze zredukowaną (jednoelementową) koniunkcją lub alternatywą.
- Pusty poprzednik sekwentu interpretujemy jako $\top$ natomiast pusty następnik jako $\bot$.

Adekwatność LK-KRZ

Przykłady interpretacji sekwentów:

Adekwatność LK-KRZ

Przykłady interpretacji sekwentów:

- $\Rightarrow \psi_1, \ldots, \psi_k$ interpretujemy jako $\top \rightarrow \psi_1 \vee \ldots \vee \psi_k$ (lub – prościej – jako $\psi_1 \vee \ldots \vee \psi_k$)

Adekwatność LK-KRZ

Przykłady interpretacji sekwentów:

- $\Rightarrow \psi_1, \ldots, \psi_k$ interpretujemy jako $\top \to \psi_1 \vee \ldots \vee \psi_k$ (lub – prościej – jako $\psi_1 \vee \ldots \vee \psi_k$)
- $\varphi_1, \ldots, \varphi_i \Rightarrow$ jako $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_i \to \bot$ (lub – w myśl definicji negacji – jako $\neg(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_i)$).

Adekwatność LK-KRZ

Przykłady interpretacji sekwentów:

- $\Rightarrow \psi_1, \ldots, \psi_k$ interpretujemy jako $\top \to \psi_1 \vee \ldots \vee \psi_k$ (lub – prościej – jako $\psi_1 \vee \ldots \vee \psi_k$)
- $\varphi_1, \ldots, \varphi_i \Rightarrow$ jako $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_i \to \bot$ (lub – w myśl definicji negacji – jako $\neg(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_i)$).
- Sekwent z pustym poprzednikiem i następnikiem oznacza po prostu $\bot$, gdyż $\top \to \bot \leftrightarrow \neg\top \vee \bot \leftrightarrow \bot \vee \bot \leftrightarrow \bot$.

Adekwatność LK-KRZ

Przykłady interpretacji sekwentów:

- $\Rightarrow \psi_1, \ldots, \psi_k$ interpretujemy jako $\top \rightarrow \psi_1 \vee \ldots \vee \psi_k$ (lub – prościej – jako $\psi_1 \vee \ldots \vee \psi_k$)
- $\varphi_1, \ldots, \varphi_i \Rightarrow$ jako $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_i \rightarrow \perp$ (lub – w myśl definicji negacji – jako $\neg(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_i)$).
- Sekwent z pustym poprzednikiem i następnikiem oznacza po prostu $\perp$, gdyż $\top \rightarrow \perp \leftrightarrow \neg\top \vee \perp \leftrightarrow \perp \vee \perp \leftrightarrow \perp$.

Dla wykazania, że $\vdash \Rightarrow \varphi$ implikuje $\vdash_H \varphi$ Gentzen udowodnił, że przekład każdej reguły LK daje nam regułę dowiedlną w systemie aksjomatycznym. – dla chętnych.

Adekwatność LK-KRZ

Semantyczne przystosowanie:

Poszerzenie semantyki na sekwenty:

Adekwatność LK-KRZ

Semantyczne przystosowanie:

Poszerzenie semantyki na sekwenty:
Spełnianie:
$\mathfrak{M} \models \Gamma \Rightarrow \Delta$ wtw przynajmniej jedna formuła w poprzedniku jest fałszywa lub przynajmniej jedna w następniku jest prawdziwa.

Adekwatność LK-KRZ

Semantyczne przystosowanie:

Poszerzenie semantyki na sekwenty:
Spełnianie:
$\mathfrak{M} \vDash \Gamma \Rightarrow \Delta$ wtw przynajmniej jedna formuła w poprzedniku jest fałszywa lub przynajmniej jedna w następniku jest prawdziwa.
Falsyfikacja:
$\mathfrak{M} \nvDash \Gamma \Rightarrow \Delta$ wtw każda formuła w poprzedniku jest prawdziwa a każda w następniku jest fałszywa.

Adekwatność LK-KRZ

Semantyczne przystosowanie:

Poszerzenie semantyki na sekwenty:
Spełnianie:
$\mathfrak{M} \vDash \Gamma \Rightarrow \Delta$ wtw przynajmniej jedna formuła w poprzedniku jest fałszywa lub przynajmniej jedna w następniku jest prawdziwa.
Falsyfikacja:
$\mathfrak{M} \nvDash \Gamma \Rightarrow \Delta$ wtw każda formuła w poprzedniku jest prawdziwa a każda w następniku jest fałszywa.
Tautologiczność:
$\models \Gamma \Rightarrow \Delta$ wtw $\forall_{\mathfrak{M}}, \mathfrak{M} \vDash \Gamma \Rightarrow \Delta$

Adekwatność LK-KRZ

Semantyczne przystosowanie:

Przy zadanej wyżej interpretacji możemy wykazać:
Lemat3: Każda reguła LK jest niezawodna

Adekwatność LK-KRZ

Semantyczne przystosowanie:

Przy zadanej wyżej interpretacji możemy wykazać:
Lemat3: Każda reguła LK jest niezawodna
Należy pokazać, że jeżeli przesłanki reguły są tautologiczne, to wniosek też.

Adekwatność LK-KRZ

Semantyczne przystosowanie – przykład:

Przypadek ($\rightarrow\Rightarrow$):

Adekwatność LK-KRZ

Semantyczne przystosowanie – przykład:

Przypadek ($\rightarrow\Rightarrow$):
Załóżmy, że $\models \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ i $\models \psi, \Pi \Rightarrow \Sigma$ ale
$\not\models \varphi \rightarrow \psi, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$.

Adekwatność LK-KRZ

Semantyczne przystosowanie – przykład:

Przypadek ($\rightarrow\Rightarrow$):
Załóżmy, że $\models \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ i $\models \psi, \Pi \Rightarrow \Sigma$ ale $\not\models \varphi \rightarrow \psi, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$.
Zatem w pewnym modelu $\mathfrak{M}$ zarówno $\varphi \rightarrow \psi$ jak i wszystkie elementy Γ i Π są spełnione natomiast wszystkie elementy Δ i Σ są tam fałszywe.

Adekwatność LK-KRZ

Semantyczne przystosowanie – przykład:

Przypadek ($\rightarrow\Rightarrow$):
Załóżmy, że $\models \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ i $\models \psi, \Pi \Rightarrow \Sigma$ ale
$\not\models \varphi \rightarrow \psi, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$.
Zatem w pewnym modelu $\mathfrak{M}$ zarówno $\varphi \rightarrow \psi$ jak i wszystkie elementy Γ i Π są spełnione natomiast wszystkie elementy Δ i Σ są tam fałszywe.
Skoro $\mathfrak{M} \vDash \varphi \rightarrow \psi$, to $\mathfrak{M} \nvDash \varphi$ lub $\mathfrak{M} \vDash \psi$. Oba przypadki prowadzą do sprzeczności; przy pierwszym lewa, a przy drugim prawa przesłanka byłaby sfalsyfikowana w $\mathfrak{M}$.

Adekwatność LK-KRZ

Semantyczne przystosowanie:

Twierdzenie4: Jeżeli $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$, to $\models \Gamma \Rightarrow \Delta$

Adekwatność LK-KRZ

Semantyczne przystosowanie:

Twierdzenie4: Jeżeli $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$, to $\models \Gamma \Rightarrow \Delta$
Dowód przez indukcję po długości dowodu $\Gamma \Rightarrow \Delta$. Dowód bazy jest oczywisty, gdyż każdy jednoelementowy dowód to sekwent aksjomatyczny, który jest tautologią. Pokazujemy, że dowód sekwentu $\Gamma \Rightarrow \Delta$ o długości n jest dowodem tautologii przy założeniu, że każdy dowód krótszy spełnia ten warunek. Ponieważ dowód każdej z przesłanek sekwentu $\Gamma \Rightarrow \Delta$ ma długość mniejszą od n, więc przesłanki podpadają pod założenie indukcyjne i są sekwentami tautologicznymi. Zgodnie z poprzednim lematem każda reguła LK jest niezawodna, więc wydedukowany sekwent też jest tautologiczny.

Rachunek LK Gentzena

Dwa Lematy pomocnicze:

Lemat5: Dla dowolnego sekwentu $\Gamma \Rightarrow \Delta$, z $\Gamma = \varphi_1, ..., \varphi_i, \Delta = \psi_1, ..., \psi_k, i, k > 0$ podane niżej 4 formy są równoważne:

Rachunek LK Gentzena

Dwa Lematy pomocnicze:

Lemat5: Dla dowolnego sekwentu $\Gamma \Rightarrow \Delta$, z $\Gamma = \varphi_1, ..., \varphi_i, \Delta = \psi_1, ..., \psi_k, i, k > 0$ podane niżej 4 formy są równoważne:

1. $\vdash \varphi_1, ..., \varphi_i \Rightarrow \psi_1, ..., \psi_k$
2. $\vdash \varphi_1, ..., \varphi_i, \neg\psi_1, ..., \neg\psi_k \Rightarrow$
3. $\vdash \Rightarrow \neg\varphi_1, ..., \neg\varphi_i, \psi_1, ..., \psi_k$
4. $\vdash \varphi_1 \wedge .... \wedge \varphi_i \Rightarrow \psi_1 \vee ... \vee \psi_k$

Rachunek LK Gentzena

Dwa Lematy pomocnicze:

Lemat5: Dla dowolnego sekwentu $\Gamma \Rightarrow \Delta$, z $\Gamma = \varphi_1, ..., \varphi_i, \Delta = \psi_1, ..., \psi_k, i, k > 0$ podane niżej 4 formy są równoważne:

1. $\vdash \varphi_1, ..., \varphi_i \Rightarrow \psi_1, ..., \psi_k$
2. $\vdash \varphi_1, ..., \varphi_i, \neg\psi_1, ..., \neg\psi_k \Rightarrow$
3. $\vdash \Rightarrow \neg\varphi_1, ..., \neg\varphi_i, \psi_1, ..., \psi_k$
4. $\vdash \varphi_1 \wedge .... \wedge \varphi_i \Rightarrow \psi_1 \vee ... \vee \psi_k$

Lemat6: Dla dowolnego sekwentu $\varphi_1, ..., \varphi_i \Rightarrow \psi, i > 0$ podane niżej 3 formy są równoważne:

Rachunek LK Gentzena

Dwa Lematy pomocnicze:

Lemat5: Dla dowolnego sekwentu $\Gamma \Rightarrow \Delta$, z $\Gamma = \varphi_1, ..., \varphi_i, \Delta = \psi_1, ..., \psi_k, i, k > 0$ podane niżej 4 formy są równoważne:

1. $\vdash \varphi_1, ..., \varphi_i \Rightarrow \psi_1, ..., \psi_k$
2. $\vdash \varphi_1, ..., \varphi_i, \neg\psi_1, ..., \neg\psi_k \Rightarrow$
3. $\vdash \Rightarrow \neg\varphi_1, ..., \neg\varphi_i, \psi_1, ..., \psi_k$
4. $\vdash \varphi_1 \wedge .... \wedge \varphi_i \Rightarrow \psi_1 \vee ... \vee \psi_k$

Lemat6: Dla dowolnego sekwentu $\varphi_1, ..., \varphi_i \Rightarrow \psi, i > 0$ podane niżej 3 formy są równoważne:

1. $\vdash \varphi_1, ..., \varphi_i \Rightarrow \psi$
2. $\vdash \Rightarrow \varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \rightarrow ..., (\varphi_i \rightarrow \psi)...)$
3. $\vdash \Rightarrow \varphi_1 \wedge .... \wedge \varphi_i \rightarrow \psi$

Dwa Lematy pomocnicze:

Dowód Lematu 5:

Dwa Lematy pomocnicze:

Dowód Lematu 5:

1. $\Longrightarrow$ 2. Z 1. przez k zastosowań $(\neg \Rightarrow)$ otrzymujemy $\vdash \neg\psi_1, \ldots, \neg\psi_k, \varphi_1, \ldots, \varphi_i, \Rightarrow$, skąd przez wielokrotną permutację mamy 2.

Dwa Lematy pomocnicze:

Dowód Lematu 5:

1. $\Longrightarrow$ 2. Z 1. przez k zastosowań $(\neg \Rightarrow)$ otrzymujemy $\vdash \neg\psi_1, ..., \neg\psi_k, \varphi_1, ..., \varphi_i, \Rightarrow$, skąd przez wielokrotną permutację mamy 2.
2. $\Longrightarrow$ 1. Po pierwsze zauważ, że dla każdego $i \leq k$ przez obie reguły dla $\neg$ otrzymujemy $\vdash \neg\neg\psi_i \Rightarrow \psi_i$. Z 2. przez wielokrotną permutację mamy $\vdash \neg\psi_1, ..., \neg\psi_k, \varphi_1, ..., \varphi_i, \Rightarrow$, skąd przez $(\Rightarrow \neg)$ otrzymujemy $\vdash \neg\psi_2, ..., \neg\psi_k, \varphi_1, ..., \varphi_i, \Rightarrow \neg\neg\psi_1$. Stosując (Cut) na $\vdash \neg\neg\psi_1 \Rightarrow \psi_1$ otrzymujemy $\vdash \neg\psi_2, ..., \neg\psi_k, \varphi_1, ..., \varphi_i, \Rightarrow \psi_1$. Powtarzamy tę dedukcję $k-1$ razy aż do otrzymania 1.

Dwa Lematy pomocnicze:

Dowód Lematu 5:

1. $\Longrightarrow$ 2. Z 1. przez k zastosowań $(\neg \Rightarrow)$ otrzymujemy $\vdash \neg\psi_1, ..., \neg\psi_k, \varphi_1, ..., \varphi_i, \Rightarrow$, skąd przez wielokrotną permutację mamy 2.

2. $\Longrightarrow$ 1. Po pierwsze zauważ, że dla każdego $i \leq k$ przez obie reguły dla $\neg$ otrzymujemy $\vdash \neg\neg\psi_i \Rightarrow \psi_i$. Z 2. przez wielokrotną permutację mamy $\vdash \neg\psi_1, ..., \neg\psi_k, \varphi_1, ..., \varphi_i, \Rightarrow$, skąd przez $(\Rightarrow \neg)$ otrzymujemy $\vdash \neg\psi_2, ..., \neg\psi_k, \varphi_1, ..., \varphi_i, \Rightarrow \neg\neg\psi_1$. Stosując (Cut) na $\vdash \neg\neg\psi_1 \Rightarrow \psi_1$ otrzymujemy $\vdash \neg\psi_2, ..., \neg\psi_k, \varphi_1, ..., \varphi_i, \Rightarrow \psi_1$. Powtarzamy tę dedukcję $k-1$ razy aż do otrzymania 1.

1. $\Longleftrightarrow$ 3. analogicznie

Dwa Lematy pomocnicze:

Dowód Lematu 5:

Dwa Lematy pomocnicze:

Dowód Lematu 5:

1. $\Longrightarrow$ 4. Wykonujemy następującą dedukcję:

Dwa Lematy pomocnicze:

Dowód Lematu 5:

1. $\Longrightarrow$ 4. Wykonujemy następującą dedukcję:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi_1, \dots, \varphi_i \Rightarrow \psi_1, \dots, \psi_k}{\varphi_1 \wedge \varphi_2, \varphi_2, \dots, \varphi_i \Rightarrow \psi_1, \dots, \psi_k}(\wedge \Rightarrow)}{\varphi_2, \varphi_1 \wedge \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_i \Rightarrow \psi_1, \dots, \psi_k}(P \Rightarrow)}{\varphi_1 \wedge \varphi_2, \varphi_1 \wedge \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_i \Rightarrow \psi_1, \dots, \psi_k}(\wedge \Rightarrow)}{\varphi_1 \wedge \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_i \Rightarrow \psi_1, \dots, \psi_k}(C \Rightarrow\rightarrow)$$

Dwa Lematy pomocnicze:

Dowód Lematu 5:

1. $\Longrightarrow$ 4. Wykonujemy następującą dedukcję:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi_1, \ldots, \varphi_i \Rightarrow \psi_1, \ldots, \psi_k}{\varphi_1 \wedge \varphi_2, \varphi_2, \ldots, \varphi_i \Rightarrow \psi_1, \ldots, \psi_k}(\wedge\Rightarrow)}{\varphi_2, \varphi_1 \wedge \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_i \Rightarrow \psi_1, \ldots, \psi_k}(P\Rightarrow)}{\varphi_1 \wedge \varphi_2, \varphi_1 \wedge \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_i \Rightarrow \psi_1, \ldots, \psi_k}(\wedge\Rightarrow)}{\varphi_1 \wedge \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_i \Rightarrow \psi_1, \ldots, \psi_k}(C\Rightarrow\rightarrow)$$

Powtarzamy tę dedukcję tak długo aż otrzymamy $\varphi_1 \wedge, \ldots, \wedge\varphi_i \Rightarrow \psi_1, \ldots, \psi_k$, następnie przeprowadzamy analogiczną dedukcję z wykorzystaniem $(\Rightarrow \vee), (\Rightarrow P)$ i $(\Rightarrow C)$ na następniku aż otrzymamy 4.

Dwa Lematy pomocnicze:

Dowód Lematu 5:

Dwa Lematy pomocnicze:

Dowód Lematu 5:

4. $\Longrightarrow$ 1. Odnotujmy wpierw, że dla $k \geq 2$ zachodzi $\vdash \psi_1 \vee ... \vee \psi_k \Rightarrow \psi_1, ..., \psi_k$, oto początek dowodu:

Dwa Lematy pomocnicze:

Dowód Lematu 5:

4. $\Longrightarrow$ 1. Odnotujmy wpierw, że dla $k \geq 2$ zachodzi $\vdash \psi_1 \vee \ldots \vee \psi_k \Rightarrow \psi_1, \ldots, \psi_k$, oto początek dowodu:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\psi_1 \Rightarrow \psi_1$}
\LeftLabel{$(\Rightarrow W)$}
\UnaryInfC{$\psi_1 \Rightarrow \psi_1, \psi_2$}
\AxiomC{$\psi_2 \Rightarrow \psi_2$}
\doubleLine
\UnaryInfC{$\psi_2 \Rightarrow \psi_1, \psi_2$}
\LeftLabel{$(\vee \Rightarrow)$}
\BinaryInfC{$\psi_1 \vee \psi_2 \Rightarrow \psi_1, \psi_2$}
\LeftLabel{$(\Rightarrow W)$}
\UnaryInfC{$\psi_1 \vee \psi_2 \Rightarrow \psi_1, \psi_2, \psi_3$}
\AxiomC{$\psi_3 \Rightarrow \psi_3$}
\doubleLine
\RightLabel{$(\Rightarrow W), (\Rightarrow P)$}
\UnaryInfC{$\psi_3 \Rightarrow \psi_1, \psi_2, \psi_3$}
\LeftLabel{$(\vee \Rightarrow)$}
\BinaryInfC{$\psi_1 \vee \psi_2 \vee \psi_3 \Rightarrow \psi_1, \psi_2, \psi_3$}
\end{prooftree}
$$

Dwa Lematy pomocnicze:

Dowód Lematu 5:

4. $\Longrightarrow$ 1. Odnotujmy wpierw, że dla $k \geq 2$ zachodzi $\vdash \psi_1 \vee ... \vee \psi_k \Rightarrow \psi_1, ..., \psi_k$, oto początek dowodu:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\psi_1 \Rightarrow \psi_1$}
\LeftLabel{$(\Rightarrow W)$}
\UnaryInfC{$\psi_1 \Rightarrow \psi_1, \psi_2$}
\AxiomC{$\psi_2 \Rightarrow \psi_2$}
\doubleLine
\UnaryInfC{$\psi_2 \Rightarrow \psi_1, \psi_2$}
\LeftLabel{$(\vee \Rightarrow)$}
\BinaryInfC{$\psi_1 \vee \psi_2 \Rightarrow \psi_1, \psi_2$}
\LeftLabel{$(\Rightarrow W)$}
\UnaryInfC{$\psi_1 \vee \psi_2 \Rightarrow \psi_1, \psi_2, \psi_3$}
\AxiomC{$\psi_3 \Rightarrow \psi_3$}
\doubleLine
\RightLabel{$(\Rightarrow W), (\Rightarrow P)$}
\UnaryInfC{$\psi_3 \Rightarrow \psi_1, \psi_2, \psi_3$}
\LeftLabel{$(\vee \Rightarrow)$}
\BinaryInfC{$\psi_1 \vee \psi_2 \vee \psi_3 \Rightarrow \psi_1, \psi_2, \psi_3$}
\end{prooftree}
$$

Analogicznie, dla $i \geq 2$ udowadniamy, że zachodzi $\vdash \varphi_1, ..., \varphi_i \Rightarrow \varphi_1 \wedge .... \wedge \varphi_i$. stosując dwa razy (Cut) do 4. i do otrzymanych sekwentów otrzymujemy 1.

Dwa Lematy pomocnicze:

Dowód Lematu 6:

Dwa Lematy pomocnicze:

Dowód Lematu 6:

1. $\Longrightarrow$ 2. Z 1. za pomocą $(P \Rightarrow)$ otrzymujemy $\vdash \varphi_i, \ldots, \varphi_1 \Rightarrow \psi$, skąd przez i-krotne zastosowanie $(\Rightarrow\rightarrow)$ otrzymujemy 2.

Dwa Lematy pomocnicze:

Dowód Lematu 6:

1. $\Longrightarrow$ 2. Z 1. za pomocą $(P \Rightarrow)$ otrzymujemy $\vdash \varphi_i, ..., \varphi_1 \Rightarrow \psi$, skąd przez i-krotne zastosowanie $(\Rightarrow\rightarrow)$ otrzymujemy 2.
2. $\Longrightarrow$ Zauważ, że dla dowolnych φ, ψ zachodzi $\vdash \varphi \rightarrow \psi, \varphi \Rightarrow \psi$, w szczególności $\vdash \varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \rightarrow ..., (\varphi_i \rightarrow \psi)...), \varphi_1 \Rightarrow \psi$. Stąd przez 2. i (Cut) o trzymujemy
$\vdash \varphi_1 \Rightarrow \varphi_2 \rightarrow (\varphi_3 \rightarrow ..., (\varphi_i \rightarrow \psi)...)$. Powtarzamy tę dedukcję $i-1$ razy (z kolejnymi podstawieniami $\vdash \varphi_k \rightarrow \psi, \varphi_k \Rightarrow \psi$, $k \leq i$) aż uzyskamy 1.

Dwa Lematy pomocnicze:

Dowód Lematu 6:

1. $\Longrightarrow$ 2. Z 1. za pomocą $(P \Rightarrow)$ otrzymujemy $\vdash \varphi_i, ..., \varphi_1 \Rightarrow \psi$, skąd przez i-krotne zastosowanie $(\Rightarrow\rightarrow)$ otrzymujemy 2.
2. $\Longrightarrow$ Zauważ, że dla dowolnych φ, ψ zachodzi $\vdash \varphi \rightarrow \psi, \varphi \Rightarrow \psi$, w szczególności $\vdash \varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \rightarrow ..., (\varphi_i \rightarrow \psi)...), \varphi_1 \Rightarrow \psi$. Stąd przez 2. i (Cut) o trzymujemy
$\vdash \varphi_1 \Rightarrow \varphi_2 \rightarrow (\varphi_3 \rightarrow ..., (\varphi_i \rightarrow \psi)...)$. Powtarzamy tę dedukcję $i-1$ razy (z kolejnymi podstawieniami $\vdash \varphi_k \rightarrow \psi, \varphi_k \Rightarrow \psi$, $k \leq i$) aż uzyskamy 1.
1. $\Longrightarrow$ 3. Przez lemat 5. 1. $\Longrightarrow$ 4. i $(\Rightarrow\rightarrow)$

Dwa Lematy pomocnicze:

Dowód Lematu 6:

1. $\Longrightarrow$ 2. Z 1. za pomocą $(P \Rightarrow)$ otrzymujemy $\vdash \varphi_i, ..., \varphi_1 \Rightarrow \psi$, skąd przez i-krotne zastosowanie $(\Rightarrow\rightarrow)$ otrzymujemy 2.
2. $\Longrightarrow$ Zauważ, że dla dowolnych φ, ψ zachodzi $\vdash \varphi \rightarrow \psi, \varphi \Rightarrow \psi$, w szczególności $\vdash \varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \rightarrow ..., (\varphi_i \rightarrow \psi)...), \varphi_1 \Rightarrow \psi$. Stąd przez 2. i (Cut) o trzymujemy
$\vdash \varphi_1 \Rightarrow \varphi_2 \rightarrow (\varphi_3 \rightarrow ..., (\varphi_i \rightarrow \psi)...)$. Powtarzamy tę dedukcję $i-1$ razy (z kolejnymi podstawieniami $\vdash \varphi_k \rightarrow \psi, \varphi_k \Rightarrow \psi$, $k \leq i$) aż uzyskamy 1.
1. $\Longrightarrow$ 3. Przez lemat 5. 1. $\Longrightarrow$ 4. i $(\Rightarrow\rightarrow)$
3. $\Rightarrow$ 1. Ponieważ $\vdash \varphi_1 \wedge .... \wedge \varphi_i \rightarrow \psi, \varphi_1 \wedge .... \wedge \varphi_i \Rightarrow \psi$ więc przez (Cut) na 3. mamy $\vdash \varphi_1 \wedge .... \wedge \varphi_i \Rightarrow \psi$, skąd przez lemat 5 mamy 1.

Rachunek LK Gentzena

Dodatkowe terminy techniczne:

Rachunek LK Gentzena

Dodatkowe terminy techniczne:

1. Ciag sekwentów tworzy gałąź w dowodzie S wtw jego pierwszym elementem jest sekwent aksjomatyczny, a ostatnim jest S oraz każdy sekwent w tym ciągu oprócz ostatniego jest (jedną) przesłanką pewnej reguły, której wnioskiem jest kolejny sekwent z tego ciągu.

Rachunek LK Gentzena

Dodatkowe terminy techniczne:

1. Ciag sekwentów tworzy gałąź w dowodzie S wtw jego pierwszym elementem jest sekwent aksjomatyczny, a ostatnim jest S oraz każdy sekwent w tym ciągu oprócz ostatniego jest (jedną) przesłanką pewnej reguły, której wnioskiem jest kolejny sekwent z tego ciągu.
2. Sekwent S_1 jest nad sekwentem S_2 lub poprzedza S_2 (a S_2 jest pod S_1 lub następuje po S_1) w dowodzie wtw istnieje gałąź w tym dowodzie, która zawiera S_1 jako wcześniejszy a S_2 jako późniejszy element. Jeżeli między S_1 a S_2 nie ma żadnego innego sekwentu, to mówimy o *bezpośrednim* poprzedzaniu (następowaniu po).

Rachunek LK Gentzena

Dodatkowe terminy techniczne:

Rachunek LK Gentzena

Dodatkowe terminy techniczne:

1. Zastosowanie reguły R poprzedza lub jest nad zastosowaniem reguły R' (R' następuje po R lub jest pod R) w dowodzie wtw wniosek R jest nad wnioskiem R'. Jeżeli dodatkowo wniosek R jest przesłanką zastosowania R' to mamy bezpośrednie poprzedzanie (następowanie po).

Rachunek LK Gentzena

Dodatkowe terminy techniczne:

1. Zastosowanie reguły R poprzedza lub jest nad zastosowaniem reguły R' (R' następuje po R lub jest pod R) w dowodzie wtw wniosek R jest nad wnioskiem R'. Jeżeli dodatkowo wniosek R jest przesłanką zastosowania R' to mamy bezpośrednie poprzedzanie (następowanie po).
2. Jeżeli S wystepuje w dowodzie $\mathcal{D}$, to zbiór zawierający S oraz wszystkie sekwenty, które są nad S w $\mathcal{D}$ jest poddowodem $\mathcal{D}$ (i dowodem S). Jeżeli $\mathcal{D}'$ jest poddowodem $\mathcal{D}$, to $\mathcal{D}$ jest jego dowodem nadrzędnym (naddowodem).

Rachunek LK Gentzena

Dodatkowe terminy techniczne:

Rachunek LK Gentzena

Dodatkowe terminy techniczne:

1. Jeżeli S_1 bezpośrednio poprzedza S_2, to $\varphi \in S_2$ jest jedynym <u>bezpośrednim potomkiem</u> ψ wtw (a) ψ jest formułą parametryczną w S_1 a $\varphi := \psi$ i występuje w tej samej pozycji w $_2$ co ψ w S_1, albo (b) ψ jest formułą poboczną w S_1 a φ formułą zasadniczą S_2. φ jest <u>potomkiem</u> ψ wtw istnieje ciąg 0 lub więcej bezpośrednich potomków od ψ do φ (relacja potomstwa jest zwrotnym, tranzytywnym domknięciem relacji bezpośredniego potomstwa).

Rachunek LK Gentzena

Dodatkowe terminy techniczne:

1. Jeżeli S_1 bezpośrednio poprzedza S_2, to $\varphi \in S_2$ jest jedynym bezpośrednim potomkiem ψ wtw (a) ψ jest formułą parametryczną w S_1 a $\varphi := \psi$ i występuje w tej samej pozycji w $_2$ co ψ w S_1, albo (b) ψ jest formułą poboczną w S_1 a φ formułą zasadniczą S_2. φ jest potomkiem ψ wtw istnieje ciąg 0 lub więcej bezpośrednich potomków od ψ do φ (relacja potomstwa jest zwrotnym, tranzytywnym domknięciem relacji bezpośredniego potomstwa).
2. φ jest bezpośrednim przodkiem ψ wtw ψ jest bezpośrednim potomkiem φ. φ jest przodkiem ψ wtw ψ jest potomkiem φ.

Rachunek LK Gentzena

Dodatkowe terminy techniczne:

1. Jeżeli S_1 bezpośrednio poprzedza S_2, to $\varphi \in S_2$ jest jedynym bezpośrednim potomkiem ψ wtw (a) ψ jest formułą parametryczną w S_1 a $\varphi := \psi$ i występuje w tej samej pozycji w $_2$ co ψ w S_1, albo (b) ψ jest formułą poboczną w S_1 a φ formułą zasadniczą S_2. φ jest potomkiem ψ wtw istnieje ciąg 0 lub więcej bezpośrednich potomków od ψ do φ (relacja potomstwa jest zwrotnym, tranzytywnym domknięciem relacji bezpośredniego potomstwa).
2. φ jest bezpośrednim przodkiem ψ wtw ψ jest bezpośrednim potomkiem φ. φ jest przodkiem ψ wtw ψ jest potomkiem φ.

Uwaga: Warto odnotować, że: (a) formuła zasadnicza (Cut) oraz wszystkie formuły sekwentu dowodzonego nie mają bezpośredniego potomka (b) formuły w (Ax) oraz formuły zasadnicze (W) nie mają bezpośrednich przodków. (c) w przypadku (P) bezpośrednimi przodkami (potomkami) formuł zasadniczych są ich przestawione

Rachunek LK Gentzena

Uogólnienie pojecia dowodu sekwentu S – Dedukcja S

Rachunek LK Gentzena

Uogólnienie pojecia dowodu sekwentu S – Dedukcja S

Drzewo, w którym niekoniecznie każdy liść jest sekwentem aksjomatycznym, ale które spełnia pozostałe dwa warunki definicji dowodu, to *dedukcja sekwentu* S.

Rachunek LK Gentzena

Uogólnienie pojecia dowodu sekwentu S – Dedukcja S

Drzewo, w którym niekoniecznie każdy liść jest sekwentem aksjomatycznym, ale które spełnia pozostałe dwa warunki definicji dowodu, to *dedukcja sekwentu* S.
Niech $\mathcal{D}$ będzie dedukcją S, a X oznacza zbiór wszystkich liści drzewa $\mathcal{D}$, które nie są sekwentami aksjomatycznymi, wtedy $\mathcal{D}$ jest dedukcją S z X, co zaznaczamy $X \vdash$ S.

Rachunek LK Gentzena

Uogólnienie pojecia dowodu sekwentu S – Dedukcja S

Drzewo, w którym niekoniecznie każdy liść jest sekwentem aksjomatycznym, ale które spełnia pozostałe dwa warunki definicji dowodu, to *dedukcja sekwentu* S.
Niech $\mathcal{D}$ będzie dedukcją S, a X oznacza zbiór wszystkich liści drzewa $\mathcal{D}$, które nie są sekwentami aksjomatycznymi, wtedy $\mathcal{D}$ jest dedukcją S z X, co zaznaczamy $X \vdash$ S.
Uwaga1: W szczególności dedukcja z pustym X jest dowodem S.

Rachunek LK Gentzena

Uogólnienie pojecia dowodu sekwentu S – Dedukcja S

Drzewo, w którym niekoniecznie każdy liść jest sekwentem aksjomatycznym, ale które spełnia pozostałe dwa warunki definicji dowodu, to *dedukcja sekwentu* S.
Niech $\mathcal{D}$ będzie dedukcją S, a X oznacza zbiór wszystkich liści drzewa $\mathcal{D}$, które nie są sekwentami aksjomatycznymi, wtedy $\mathcal{D}$ jest dedukcją S z X, co zaznaczamy $X \vdash$ S.
Uwaga1: W szczególności dedukcja z pustym X jest dowodem S.
Uwaga2: Z punktu widzenia zastosowania RS jako metody rozstrzygalnej szczególne znaczenie będą miały dedukcje z (nieaksjomatycznych) sekwentów atomowych.

Rachunek LK Gentzena

Uogólnienie pojecia dowodu sekwentu S – Dedukcja S

Drzewo, w którym niekoniecznie każdy liść jest sekwentem aksjomatycznym, ale które spełnia pozostałe dwa warunki definicji dowodu, to *dedukcja sekwentu* S.
Niech $\mathcal{D}$ będzie dedukcją S, a X oznacza zbiór wszystkich liści drzewa $\mathcal{D}$, które nie są sekwentami aksjomatycznymi, wtedy $\mathcal{D}$ jest dedukcją S z X, co zaznaczamy $X \vdash$ S.
Uwaga1: W szczególności dedukcja z pustym X jest dowodem S.
Uwaga2: Z punktu widzenia zastosowania RS jako metody rozstrzygalnej szczególne znaczenie będą miały dedukcje z (nieaksjomatycznych) sekwentów atomowych.
Uwaga3: terminologia z poprzedniej definicji stosuje się też do dedukcji, z tym, że gałąź w dedukcji nie musi się zaczynać od sekwentu aksjomatycznego. W przypadku dedukcji mówimy też o poddedukcji, chociaż w szczególnych wypadkach poddedukcja może być poddowodem nawet jeżeli nadrzędna dedukcja nie jest

Warianty reguł:

Reguły wtórne:

Warianty reguł:

Reguły wtórne:

- Reguła $\dfrac{S_1, \ldots, S_n}{S}$ jest wyprowadzalna w RS wtedy, gdy w RS mamy dedukcję S z $S_1, \ldots, S_n$.

Warianty reguł:

Reguły wtórne:

- Reguła $\dfrac{S_1, \dots, S_n}{S}$ jest wyprowadzalna w RS wtedy, gdy w RS mamy dedukcję S z $S_1, \dots, S_n$.
- Reguła $\dfrac{S_1, \dots, S_n}{S}$ jest dopuszczalna w RS wtedy, gdy jeżeli w RS mamy dowody sekwentów $S_1, \dots, S_n$, to mamy też dowód S.

Warianty reguł:

Reguły wtórne:

- Reguła $\frac{S_1, ..., S_n}{S}$ jest wyprowadzalna w RS wtedy, gdy w RS mamy dedukcję S z $S_1, ..., S_n$.
- Reguła $\frac{S_1, ..., S_n}{S}$ jest dopuszczalna w RS wtedy, gdy jeżeli w RS mamy dowody sekwentów $S_1, ..., S_n$, to mamy też dowód S.

Oczywiście każda reguła wyprowadzalna jest regułą dopuszczalną, gdyż do dedukcji S z $S_1, ..., S_n$ wystarczy dodać dowód każdej z przesłanek (tj. dopisać go nad odpowiednim sekwentem S_i) i uzyskujemy w ten sposób dowód S. Zależność w drugą stronę nie zachodzi.

Warianty reguł:

Reguły wtórne:

Warianty reguł:

Reguły wtórne:

Wykazywanie wyprowadzalności reguł jest zadaniem stosunkowo prostym – wymaga skonstruowania schematu dedukcji sekwentu wniosku z przesłanek przy użyciu reguł pierwotnych.

Warianty reguł:

Reguły wtórne:

Wykazywanie wyprowadzalności reguł jest zadaniem stosunkowo prostym – wymaga skonstruowania schematu dedukcji sekwentu wniosku z przesłanek przy użyciu reguł pierwotnych.
Wykazywanie w sposób syntaktyczny dopuszczalności reguły, która nie jest w danym systemie wyprowadzalna wymaga zazwyczaj sporo wysiłku i pomysłowości. Zazwyczaj sprowadza się to do wykazania, że każde zastosowanie takiej reguły w danym systemie można z dowodu wyeliminować.

Warianty reguł:

Kryterium semantyczne identyfikacji reguł dopuszczalnych:

Warianty reguł:

Kryterium semantyczne identyfikacji reguł dopuszczalnych:

Lemat7:

Jeżeli RS jest adekwatne względem semantyki SEM i reguła (r) jest niezawodna w SEM, to jest dopuszczalna w RS.

Warianty reguł:

Kryterium semantyczne identyfikacji reguł dopuszczalnych:

Lemat7:

Jeżeli RS jest adekwatne względem semantyki SEM i reguła (r) jest niezawodna w SEM, to jest dopuszczalna w RS.

DOWÓD: Załóżmy, że każda przesłanka (r) ma dowód w RS. Z racji przystosowania RS do SEM są one tautologiczne a ponieważ (r) jest niezawodna w SEM, to wniosek (r) też jest tautologiczny. Z racji pełności RS wniosek ten musi mieć dowód w RS. □

Warianty reguł:

Uogólnione aksjomaty:

Twierdzenie7: Wersje LK z następującymi formami sekwentów aksjomatycznych są równoważne:

Warianty reguł:

Uogólnione aksjomaty:

Twierdzenie7: Wersje LK z następującymi formami sekwentów aksjomatycznych są równoważne:

1. $\varphi \Rightarrow \varphi$, dla dowolnej zmiennej φ
2. $\varphi \Rightarrow \varphi$, dla dowolnej formuły φ
3. $\Gamma, \varphi \Rightarrow \varphi, \Delta$, dla dowolnej zmiennej φ
4. $\Gamma, \varphi \Rightarrow \varphi, \Delta$, dla dowolnej formuły φ

Warianty reguł:

Uogólnione aksjomaty:

Aby dowieść Tw.7 odwołamy się do 2 lematów:

Warianty reguł:

Uogólnione aksjomaty:

Aby dowieść Tw.7 odwołamy się do 2 lematów:
Lemat 8: Jeżeli w RS jedyne sekwenty aksjomatyczne są sekwentami atomowymi, to $\vdash \varphi \Rightarrow \varphi$ dla dowolnego φ

Warianty reguł:

Uogólnione aksjomaty:

Aby dowieść Tw.7 odwołamy się do 2 lematów:
Lemat 8: Jeżeli w RS jedyne sekwenty aksjomatyczne są sekwentami atomowymi, to $\vdash \varphi \Rightarrow \varphi$ dla dowolnego φ
Lemat 9: Jeżeli ciągi Γ i Δ mają przynajmniej po jednym wystąpieniu takiej samej formuły, to $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$

Warianty reguł:

Uogólnione aksjomaty:

Aby dowieść Tw.7 odwołamy się do 2 lematów:
Lemat 8: Jeżeli w RS jedyne sekwenty aksjomatyczne są sekwentami atomowymi, to $\vdash \varphi \Rightarrow \varphi$ dla dowolnego φ
Lemat 9: Jeżeli ciągi Γ i Δ mają przynajmniej po jednym wystąpieniu takiej samej formuły, to $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$

Uwaga: Dowód Lematu9 jest trywialny (przez reguły osłabiania, ew. permutacji).

Warianty reguł:

Uogólnione aksjomaty:

Warianty reguł:

Uogólnione aksjomaty:

Dowód Lematu8 przeprowadzimy przez indukcję po długości φ. Wystarczy zbudować schematy dowodów pokazujące, że $\varphi \Rightarrow \varphi$ dla φ o dowolnej strukturze można wydedukować z sekwentów $\psi \Rightarrow \psi$, gdzie ψ jest formułą krótszą od φ. Jeżeli $\varphi := \varphi \wedge \psi$, to można zbudować następujący schemat dowodu:

Warianty reguł:

Uogólnione aksjomaty:

Dowód Lematu8 przeprowadzimy przez indukcję po długości φ. Wystarczy zbudować schematy dowodów pokazujące, że $\varphi \Rightarrow \varphi$ dla φ o dowolnej strukturze można wydedukować z sekwentów $\psi \Rightarrow \psi$, gdzie ψ jest formułą krótszą od φ. Jeżeli $\varphi := \varphi \wedge \psi$, to można zbudować następujący schemat dowodu:

$$\dfrac{(\wedge\Rightarrow)\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi} \qquad \dfrac{\psi \Rightarrow \psi}{\varphi \wedge \psi \Rightarrow \psi}(\wedge\Rightarrow)}{\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi \wedge \psi}(\Rightarrow\wedge)$$

Warianty reguł:

Uogólnione aksjomaty:

Dowód Lematu8 przeprowadzimy przez indukcję po długości φ. Wystarczy zbudować schematy dowodów pokazujące, że $\varphi \Rightarrow \varphi$ dla φ o dowolnej strukturze można wydedukować z sekwentów $\psi \Rightarrow \psi$, gdzie ψ jest formułą krótszą od φ. Jeżeli $\varphi := \varphi \wedge \psi$, to można zbudować następujący schemat dowodu:

$$\dfrac{(\wedge \Rightarrow)\,\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi} \qquad \dfrac{\psi \Rightarrow \psi}{\varphi \wedge \psi \Rightarrow \psi}\,(\wedge \Rightarrow)}{\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi \wedge \psi}\,(\Rightarrow \wedge)$$

Zadanie: wykazać to dla $\neg, \vee, \rightarrow$

Warianty reguł:

Warianty reguł dwuprzesłankowych:

W LK występuje zarówno reguły k-jednolite (context-sharing): $(\Rightarrow \wedge)$ i $(\vee \Rightarrow)$

Warianty reguł:

Warianty reguł dwuprzesłankowych:

W LK występuje zarówno reguły k-jednolite (context-sharing): $(\Rightarrow \wedge)$ i $(\vee \Rightarrow)$

jak i *k-niezależne* (context-free, context-independent): (Cut) i $(\rightarrow\Rightarrow)$

Warianty reguł:

Warianty reguł dwuprzesłankowych:

W LK występuje zarówno reguły k-jednolite (context-sharing): $(\Rightarrow \wedge)$ i $(\vee \Rightarrow)$

jak i *k-niezależne* (context-free, context-independent): (Cut) i $(\rightarrow\Rightarrow)$

Można otrzymać wariant LK z regułami tylko k-niezależnymi wprowadzając dla $\wedge$ i $\vee$:

Warianty reguł:

Warianty reguł dwuprzesłankowych:

W LK występuje zarówno reguły k-jednolite (context-sharing): $(\Rightarrow \wedge)$ i $(\vee \Rightarrow)$

jak i *k-niezależne* (context-free, context-independent): (Cut) i $(\rightarrow\Rightarrow)$

Można otrzymać wariant LK z regułami tylko k-niezależnymi wprowadzając dla $\wedge$ i $\vee$:

$$(\Rightarrow\wedge') \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \Pi \Rightarrow \Sigma, \psi}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma \varphi \wedge \psi} \qquad\qquad (\vee\Rightarrow') \quad \frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \psi, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\varphi \vee \psi, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}$$

Warianty reguł:

Warianty reguł dwuprzesłankowych:

Można otrzymać wariant LK z regułami tylko k-jednolitymi wprowadzając:

Warianty reguł:

Warianty reguł dwuprzesłankowych:

Można otrzymać wariant LK z regułami tylko k-jednolitymi wprowadzając:

$$(Cut') \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad\qquad (\rightarrow\Rightarrow') \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \rightarrow \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

Warianty reguł:

Warianty reguł dwuprzesłankowych:

Można otrzymać wariant LK z regułami tylko k-jednolitymi wprowadzając:

$$(Cut') \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad (\rightarrow\Rightarrow') \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \rightarrow \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

Zadanie: wykaż, że reguły k-niezależne są wyprowadzalne z reguł k-jednolitych, przy użyciu osłabiania i permutacji, a reguły k-jednolite są wyprowadzalne z reguł k-niezależnych przy użyciu kontrakcji.

Warianty reguł:

Warianty reguł jednoprzesłankowych:

Występowanie dwóch reguł $(\Rightarrow \vee)$ i $(\wedge \Rightarrow)$ ujawnia pewne trudności:

Warianty reguł:

Warianty reguł jednoprzesłankowych:

Występowanie dwóch reguł $(\Rightarrow \vee)$ i $(\wedge \Rightarrow)$ ujawnia pewne trudności:

- w wielu dowodach nie można uniknąć zastosowań kontrakcji.

Warianty reguł:

Warianty reguł jednoprzesłankowych:

Występowanie dwóch reguł $(\Rightarrow \vee)$ i $(\wedge \Rightarrow)$ ujawnia pewne trudności:

- w wielu dowodach nie można uniknąć zastosowań kontrakcji.
- prowadzi do komplikacji w przypadku zastosowań LK jako procedury rozstrzygalnej

Warianty reguł:

Warianty reguł jednoprzesłankowych:

Występowanie dwóch reguł ($\Rightarrow \vee$) i ($\wedge \Rightarrow$) ujawnia pewne trudności:

- w wielu dowodach nie można uniknąć zastosowań kontrakcji.
- prowadzi do komplikacji w przypadku zastosowań LK jako procedury rozstrzygalnej
- reguły te nie są odwracalne

Warianty reguł:

Warianty reguł jednoprzesłankowych:

Przykład komplikacji dowodu:

Warianty reguł:

Warianty reguł jednoprzesłankowych:

Przykład komplikacji dowodu:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \Rightarrow p}{q, p \Rightarrow p}\,(W\Rightarrow)}{p \Rightarrow q \rightarrow p}\,(\Rightarrow\rightarrow)}{p \Rightarrow (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)}\,(\Rightarrow \vee)}{p \Rightarrow (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p), q}\,(\Rightarrow W)}{\Rightarrow (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p), p \rightarrow q}\,(\Rightarrow\rightarrow)}{\Rightarrow (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p), (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)}\,(\Rightarrow \vee)}{\Rightarrow (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)}\,(\Rightarrow C)
$$

Warianty reguł:

Warianty reguł jednoprzesłankowych:

Reguły Ketonena:

Warianty reguł:

Warianty reguł jednoprzesłankowych:

Reguły Ketonena:

$(\wedge\Rightarrow')\ \dfrac{\varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ $\qquad$ $(\Rightarrow\vee')\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}$

Warianty reguł:

Warianty reguł jednoprzesłankowych:

Reguły Ketonena:

$(\wedge\Rightarrow')\ \dfrac{\varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow\vee')\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}$

Lemat10: W dowolnym systemie sekwentowym z kontrakcją i osłabianiem reguły Gentzena i Ketonena są równoważne.

Warianty reguł:

Warianty reguł jednoprzesłankowych:

Reguły Ketonena:

$$(\wedge\Rightarrow')\ \frac{\varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow\vee')\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}$$

Lemat10: W dowolnym systemie sekwentowym z kontrakcją i osłabianiem reguły Gentzena i Ketonena są równoważne.
Szkic dowodu: Aby dowieść wyprowadzalność wariantu Ketonena wystarczy do przesłanki dwukrotnie zastosować wariant Gentzena a następnie kontrakcję. Aby dowieść wyprowadzalność wariantu Gentzena wystarczy do przesłanki zastosować osłabianie aby uzyskać brakującą formułę poboczną, a następnie użyć reguły Ketonena.

Warianty reguł:

Warianty reguł jednoprzesłankowych:

Dowód powyższego sekwentu z użyciem wariantu Ketonena wygląda następująco:

Warianty reguł:

Warianty reguł jednoprzesłankowych:

Dowód powyższego sekwentu z użyciem wariantu Ketonena wygląda następująco:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{q \Rightarrow q}{p, q \Rightarrow q}\,(W\Rightarrow)}{q \Rightarrow p \to q}\,(\Rightarrow\to)}{q \Rightarrow p \to q, p}\,(\Rightarrow W)}{\Rightarrow p \to q, q \to p}\,(\Rightarrow\to)}{\Rightarrow (p \to q) \vee (q \to p)}\,(\Rightarrow\vee)$$

System LK-K:

Reguły strukturalne:

System LK-K:

Reguły strukturalne:

$(AX)\quad \varphi \Rightarrow \varphi$

$(Cut)\quad \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$

$(W\Rightarrow)\quad \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ $\qquad (\Rightarrow W)\quad \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}$

$(C\Rightarrow)\quad \dfrac{\varphi, \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ $\qquad (\Rightarrow C)\quad \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \varphi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}$

$(P\Rightarrow)\quad \dfrac{\Pi, \varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Pi, \psi, \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ $\qquad (\Rightarrow P)\quad \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi, \varphi, \Pi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi, \Pi}$

System LK-K:

Reguły strukturalne:

$(AX)\quad \varphi \Rightarrow \varphi$

$(Cut)\quad \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$

$(W\Rightarrow)\quad \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ $\qquad (\Rightarrow W)\quad \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}$

$(C\Rightarrow)\quad \dfrac{\varphi, \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ $\qquad (\Rightarrow C)\quad \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \varphi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}$

$(P\Rightarrow)\quad \dfrac{\Pi, \varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Pi, \psi, \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ $\qquad (\Rightarrow P)\quad \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi, \varphi, \Pi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi, \Pi}$

Uwaga: (Cut) jest w wersji k-jednolitej

System LK-K:

Reguły logiczne:

System LK-K:

Reguły logiczne:

$(\neg\Rightarrow)\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}{\neg\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ $(\Rightarrow\neg)\ \dfrac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\varphi}$

$(\wedge\Rightarrow)\ \dfrac{\varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi\wedge\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ $(\Rightarrow\wedge)\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi\wedge\psi}$

$(\Rightarrow\vee)\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi\vee\psi}$ $(\vee\Rightarrow)\ \dfrac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi\vee\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$

$(\Rightarrow\rightarrow)\ \dfrac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi\rightarrow\psi}$ $(\rightarrow\Rightarrow)\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi\rightarrow\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$

System LK-K:

Reguły logiczne:

$$(\neg\Rightarrow)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}{\neg\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow\neg)\ \frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\varphi}$$

$$(\wedge\Rightarrow)\ \frac{\varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow\wedge)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi}$$

$$(\Rightarrow\vee)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi} \qquad (\vee\Rightarrow)\ \frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \vee \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow\rightarrow)\ \frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi} \qquad (\rightarrow\Rightarrow)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \rightarrow \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

Uwaga1: reguły $(\Rightarrow \vee)$ i $(\wedge \Rightarrow)$ są w wersji Ketonena

System LK-K:

Reguły logiczne:

$(\neg\Rightarrow)\ \dfrac{\Gamma\Rightarrow\Delta,\varphi}{\neg\varphi,\Gamma\Rightarrow\Delta}$ $\qquad(\Rightarrow\neg)\ \dfrac{\varphi,\Gamma\Rightarrow\Delta}{\Gamma\Rightarrow\Delta,\neg\varphi}$

$(\wedge\Rightarrow)\ \dfrac{\varphi,\psi,\Gamma\Rightarrow\Delta}{\varphi\wedge\psi,\Gamma\Rightarrow\Delta}$ $\qquad(\Rightarrow\wedge)\ \dfrac{\Gamma\Rightarrow\Delta,\varphi\quad\Gamma\Rightarrow\Delta,\psi}{\Gamma\Rightarrow\Delta,\varphi\wedge\psi}$

$(\Rightarrow\vee)\ \dfrac{\Gamma\Rightarrow\Delta,\varphi,\psi}{\Gamma\Rightarrow\Delta,\varphi\vee\psi}$ $\qquad(\vee\Rightarrow)\ \dfrac{\varphi,\Gamma\Rightarrow\Delta\quad\psi,\Gamma\Rightarrow\Delta}{\varphi\vee\psi,\Gamma\Rightarrow\Delta}$

$(\Rightarrow\to)\ \dfrac{\varphi,\Gamma\Rightarrow\Delta,\psi}{\Gamma\Rightarrow\Delta,\varphi\to\psi}$ $\qquad(\to\Rightarrow)\ \dfrac{\Gamma\Rightarrow\Delta,\varphi\quad\psi,\Gamma\Rightarrow\Delta}{\varphi\to\psi,\Gamma\Rightarrow\Delta}$

Uwaga1: reguły $(\Rightarrow\vee)$ i $(\wedge\Rightarrow)$ są w wersji Ketonena
Uwaga2: $(\to\Rightarrow)$ jest w wersji k-jednolitej

System LK-K:

Odwracalność reguł:

System LK-K:

Odwracalność reguł:

- W wersji semantycznej: jeżeli wniosek jest tautologiczny, to przesłanki też są tautologiczne (reguła odwrotna jest niezawodna)

System LK-K:

Odwracalność reguł:

- W wersji semantycznej: jeżeli wniosek jest tautologiczny, to przesłanki też są tautologiczne (reguła odwrotna jest niezawodna)
- W wersji syntaktycznej: przesłanki sa dedukowalne z wniosku reguły.

System LK-K:

Odwracalność reguł:

- W wersji semantycznej: jeżeli wniosek jest tautologiczny, to przesłanki też są tautologiczne (reguła odwrotna jest niezawodna)
- W wersji syntaktycznej: przesłanki sa dedukowalne z wniosku reguły.

Uwaga: Oczywiście w przypadku adekwatności rachunku względem semantyki, na gruncie której definiujemy niezawodność reguł, obie własności są równoważne.

System LK-K:

Odwracalność reguł:

System LK-K:

Odwracalność reguł:

Fakt: W LK własność odwracalności nie zachodzi dla reguł: $(W \Rightarrow), (\Rightarrow W), (Cut), (\rightarrow\Rightarrow), (\wedge \Rightarrow), (\Rightarrow \vee)$

System LK-K:

Odwracalność reguł:

Fakt: W LK własność odwracalności nie zachodzi dla reguł:
$(W \Rightarrow), (\Rightarrow W), (Cut), (\rightarrow\Rightarrow), (\wedge \Rightarrow), (\Rightarrow \vee)$

Dowód: Podamy dwa przypadki.

System LK-K:

Odwracalność reguł:

Fakt: W LK własność odwracalności nie zachodzi dla reguł:
$(W \Rightarrow), (\Rightarrow W), (Cut), (\rightarrow\Rightarrow), (\wedge \Rightarrow), (\Rightarrow \vee)$
DOWÓD: Podamy dwa przypadki.
Przypadek $(\wedge \Rightarrow)$: Aby pokazać, że choć $\models \varphi \wedge \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$, to $\not\models \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$, wystarczy skonstruować $\mathfrak{M}$ falsyfikujący $\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ i przyjąć, że $\mathfrak{M} \not\models \psi$, wtedy $\mathfrak{M} \not\models \varphi \wedge \psi$ i $\mathfrak{M} \models \varphi \wedge \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$.
Analogicznie dla $\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$.

System LK-K:

Odwracalność reguł:

System LK-K:

Odwracalność reguł:

Fakt: W LK własność odwracalności nie zachodzi dla reguł: $(W \Rightarrow), (\Rightarrow W), (Cut), (\rightarrow\Rightarrow), (\wedge \Rightarrow), (\Rightarrow \vee)$

System LK-K:

Odwracalność reguł:

Fakt: W LK własność odwracalności nie zachodzi dla reguł: $(W \Rightarrow), (\Rightarrow W), (Cut), (\rightarrow\Rightarrow), (\wedge \Rightarrow), (\Rightarrow \vee)$

Przypadek $(\rightarrow\Rightarrow)$: Podobnie, niech $\mathfrak{M} \not\models \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$, czyli $\mathfrak{M} \models \Gamma$ i $\mathfrak{M} \not\models \Delta, \varphi$. Wystarczy przyjąć, że jakiś element Π jest w $\mathfrak{M}$ fałszywy lub jakiś element Σ prawdziwy aby $\mathfrak{M} \models \varphi \rightarrow \psi, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$. Analogicznie dla drugiej przesłanki $\psi, \Pi \Rightarrow \Sigma$. $\square$

System LK-K:

Odwracalność reguł– semantyczna:

System LK-K:

Odwracalność reguł– semantyczna:

Lemat 11: W LK-K dla każdej reguły oprócz osłabiania, jeżeli wniosek jest tautologiczny, to przesłanki też.

System LK-K:

Odwracalność reguł– semantyczna:

Lemat 11: W LK-K dla każdej reguły oprócz osłabiania, jeżeli wniosek jest tautologiczny, to przesłanki też.
DOWÓD: Podamy dla porównania dwa przypadki reguł, które zastąpiły w LK-K analizowane powyżej reguły Gentzena.

System LK-K:

Odwracalność reguł– semantyczna:

Lemat 11: W LK-K dla każdej reguły oprócz osłabiania, jeżeli wniosek jest tautologiczny, to przesłanki też.
DOWÓD: Podamy dla porównania dwa przypadki reguł, które zastąpiły w LK-K analizowane powyżej reguły Gentzena.
Przypadek ($\wedge \Rightarrow$) w wersji Ketonena: Załóżmy, że $\models \varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ ale $\not\models \varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$. Wtedy istnieje $\mathfrak{M}$ falsyfikujący $\varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ ale falsyfikuje on również $\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ gdyż $\mathfrak{M} \models \varphi \wedge \psi$ skoro $\mathfrak{M} \models \varphi$ i $\mathfrak{M} \models \psi$. Sprzeczność.

System LK-K:

Odwracalność reguł– semantyczna:

System LK-K:

Odwracalność reguł– semantyczna:

Lemat 11: W LK-K dla każdej reguły oprócz osłabiania, jeżeli wniosek jest tautologiczny, to przesłanki też.

System LK-K:

Odwracalność reguł– semantyczna:

Lemat 11: W LK-K dla każdej reguły oprócz osłabiania, jeżeli wniosek jest tautologiczny, to przesłanki też.
Przypadek ($\rightarrow\Rightarrow$) w wersji k-jednolitej: Załóżmy, że $\models \varphi \rightarrow \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ ale $\not\models \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ lub $\not\models \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$. W pierwszym przypadku pewien $\mathfrak{M} \models \Gamma$ i $\mathfrak{M} \not\models \Delta, \varphi$. Wtedy jednak $\mathfrak{M} \models \varphi \rightarrow \psi$ a to powoduje, że $\mathfrak{M} \not\models \varphi \rightarrow \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ – sprzeczność.
Analogicznie dla drugiej przesłanki $\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$. $\square$

System LK-K:

Odwracalność reguł– syntaktyczna:

Lemat 12: o odwracalności reguł w LK-K:

System LK-K:

Odwracalność reguł– syntaktyczna:

Lemat 12: o odwracalności reguł w LK-K:
W LK-K dla każdej reguły oprócz osłabiania, jeżeli wniosek ma dowód, to przesłanki też

System LK-K:

Odwracalność reguł– syntaktyczna:

Lemat 12: o odwracalności reguł w LK-K:
W LK-K dla każdej reguły oprócz osłabiania, jeżeli wniosek ma dowód, to przesłanki też
Pokażemy dowód dla obu reguł z $\wedge$:

System LK-K:

Odwracalność reguł– syntaktyczna:

Lemat 12: o odwracalności reguł w LK-K:
W LK-K dla każdej reguły oprócz osłabiania, jeżeli wniosek ma dowód, to przesłanki też
Pokażemy dowód dla obu reguł z $\wedge$:
przypadek ($\wedge \Rightarrow$)

System LK-K:

Odwracalność reguł– syntaktyczna:

Lemat 12: o odwracalności reguł w LK-K:
W LK-K dla każdej reguły oprócz osłabiania, jeżeli wniosek ma dowód, to przesłanki też
Pokażemy dowód dla obu reguł z $\wedge$:
przypadek $(\wedge \Rightarrow)$

$$\dfrac{\dfrac{(\Rightarrow \wedge)\ \dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi \qquad \psi \Rightarrow \psi}{\varphi, \psi \Rightarrow \varphi \wedge \psi}}{\varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi} \qquad \dfrac{\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \wedge \psi, \varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}}{\varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (Cut)$$

System LK-K:

Odwracalność reguł:

przypadek $(\Rightarrow \wedge)$

System LK-K:

Odwracalność reguł:

przypadek $(\Rightarrow \wedge)$

$$\dfrac{(\Rightarrow P)\;\dfrac{(\Rightarrow W)\;\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi, \varphi}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \varphi \wedge \psi} \qquad \cfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\psi, \varphi \Rightarrow \varphi}\,(W \Rightarrow)}{\varphi, \psi \Rightarrow \varphi}\,(P \Rightarrow)}{\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi}\,(\wedge \Rightarrow)}{\overline{\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}\,(Cut)$$

System LK-K:

Odwracalność reguł:

przypadek $(\Rightarrow \wedge)$

$$
\dfrac{
  (\Rightarrow P)\,\dfrac{(\Rightarrow W)\,\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi, \varphi}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \varphi \wedge \psi}
  \qquad
  \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\psi, \varphi \Rightarrow \varphi}\,(W \Rightarrow)}{\varphi, \psi \Rightarrow \varphi}\,(P \Rightarrow)}{\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi}\,(\wedge \Rightarrow)}{\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}
}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}\,(Cut)
$$

Analogicznie dla drugiej przesłanki $(\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi)$ w $(\Rightarrow \wedge)$.

System LK-K:

Odwracalność reguł:

przypadek $(\Rightarrow \wedge)$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi$}
\LeftLabel{$(\Rightarrow W)$}
\UnaryInfC{$\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi, \varphi$}
\LeftLabel{$(\Rightarrow P)$}
\UnaryInfC{$\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \varphi \wedge \psi$}
\AxiomC{$\varphi \Rightarrow \varphi$}
\RightLabel{$(W \Rightarrow)$}
\UnaryInfC{$\psi, \varphi \Rightarrow \varphi$}
\RightLabel{$(P \Rightarrow)$}
\UnaryInfC{$\varphi, \psi \Rightarrow \varphi$}
\RightLabel{$(\wedge \Rightarrow)$}
\UnaryInfC{$\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi$}
\doubleLine
\UnaryInfC{$\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$}
\RightLabel{(Cut)}
\BinaryInfC{$\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$}
\end{prooftree}
$$

Analogicznie dla drugiej przesłanki $(\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi)$ w $(\Rightarrow \wedge)$.
Zadanie: dowiedź dla innych reguł w podobny sposób.

System LK-K:

Lemat13: Dowiedlne sekwenty:

W LK (LK-K) dowiedlne są następujące sekwenty:

System LK-K:

Lemat13: Dowiedlne sekwenty:

W LK (LK-K) dowiedlne są następujące sekwenty:

- $\varphi \Rightarrow \neg\neg\varphi \qquad \neg\neg\varphi \Rightarrow \varphi$
- $\varphi \land \psi \Rightarrow \varphi \qquad \varphi \land \psi \Rightarrow \psi$
- $\varphi, \psi \Rightarrow \varphi \land \psi$
- $\varphi \Rightarrow \varphi \lor \psi \qquad \psi \Rightarrow \varphi \lor \psi$
- $\varphi \lor \psi \Rightarrow \varphi, \psi$
- $\varphi \rightarrow \psi, \varphi \Rightarrow \psi$
- $\neg\psi, \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \neg\varphi$
- $\Rightarrow \varphi, \varphi \rightarrow \psi$
- $\psi \Rightarrow \varphi \rightarrow \psi$

Analityczny System RS

Reguły:

$(AX)\quad \Gamma, \varphi \Rightarrow \varphi, \Delta$

$$(\neg\Rightarrow)\quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}{\neg\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow\neg)\quad \frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\varphi}$$

$$(\wedge\Rightarrow)\quad \frac{\varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi\wedge\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow\wedge)\quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi\wedge\psi}$$

$$(\Rightarrow\vee)\quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi\vee\psi} \qquad (\vee\Rightarrow)\quad \frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi\vee\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$(\Rightarrow\rightarrow)\quad \frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi\rightarrow\psi} \qquad (\rightarrow\Rightarrow)\quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi\rightarrow\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

Analityczny System RS

Reguły:

(AX) $\Gamma, \varphi \Rightarrow \varphi, \Delta$

$(\neg\Rightarrow)\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}{\neg\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ $\qquad (\Rightarrow\neg)\ \dfrac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\varphi}$

$(\wedge\Rightarrow)\ \dfrac{\varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi\wedge\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ $\qquad (\Rightarrow\wedge)\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi\wedge\psi}$

$(\Rightarrow\vee)\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi\vee\psi}$ $\qquad (\vee\Rightarrow)\ \dfrac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi\vee\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$

$(\Rightarrow\rightarrow)\ \dfrac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi\rightarrow\psi}$ $\qquad (\rightarrow\Rightarrow)\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi\rightarrow\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$

Uwaga1: brak jest reguł strukturalnych ale Γ, Δ oznaczają zbiory lub multizbiory.

Analityczny System RS

Reguły:

(AX) $\Gamma, \varphi \Rightarrow \varphi, \Delta$

$(\neg\Rightarrow)\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}{\neg\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ $(\Rightarrow\neg)\ \dfrac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\varphi}$

$(\wedge\Rightarrow)\ \dfrac{\varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi\wedge\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ $(\Rightarrow\wedge)\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi\wedge\psi}$

$(\Rightarrow\vee)\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi\vee\psi}$ $(\vee\Rightarrow)\ \dfrac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi\vee\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$

$(\Rightarrow\rightarrow)\ \dfrac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi\rightarrow\psi}$ $(\rightarrow\Rightarrow)\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi\rightarrow\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$

Uwaga1: brak jest reguł strukturalnych ale Γ, Δ oznaczają zbiory lub multizbiory.

Uwaga2: definicje dowodu, dedukcji itp. bez zmian.

Analityczny System RS

Wybrane własności ARS:

Analityczny System RS

Wybrane własności ARS:

Twierdzenie 14 (Adekwatność): $\vdash_{ARS} \Gamma \Rightarrow \Delta$ wtw $\models \Gamma \Rightarrow \Delta$.

Analityczny System RS

Wybrane własności ARS:

Twierdzenie 14 (Adekwatność): $\vdash_{ARS} \Gamma \Rightarrow \Delta$ wtw $\models \Gamma \Rightarrow \Delta$.

Lemat 15 (Dopuszczalność osłabiania): Jeżeli $\vdash_{ARS} \Gamma' \Rightarrow \Delta'$, to $\vdash_{ARS} \Gamma \Rightarrow \Delta$, dla $\Gamma' \subseteq \Gamma$, $\Delta' \subseteq \Delta$, ponadto długość dowodu nie jest większa.

Analityczny System RS

Wybrane własności ARS:

Twierdzenie 14 (Adekwatność): $\vdash_{ARS} \Gamma \Rightarrow \Delta$ wtw $\models \Gamma \Rightarrow \Delta$.

Lemat 15 (Dopuszczalność osłabiania): Jeżeli $\vdash_{ARS} \Gamma' \Rightarrow \Delta'$, to $\vdash_{ARS} \Gamma \Rightarrow \Delta$, dla $\Gamma' \subseteq \Gamma$, $\Delta' \subseteq \Delta$, ponadto długość dowodu nie jest większa.

Lemat 16 (Odwracalność reguł): Dla każdej reguły, jeżeli wniosek ma dowód (długości n), to przesłanki też mają dowody (długości $\leq n$).

Analityczny System RS

Wybrane własności ARS:

Twierdzenie 14 (Adekwatność): $\vdash_{ARS} \Gamma \Rightarrow \Delta$ wtw $\models \Gamma \Rightarrow \Delta$.

Lemat 15 (Dopuszczalność osłabiania): Jeżeli $\vdash_{ARS} \Gamma' \Rightarrow \Delta'$, to $\vdash_{ARS} \Gamma \Rightarrow \Delta$, dla $\Gamma' \subseteq \Gamma$, $\Delta' \subseteq \Delta$, ponadto długość dowodu nie jest większa.

Lemat 16 (Odwracalność reguł): Dla każdej reguły, jeżeli wniosek ma dowód (długości n), to przesłanki też mają dowody (długości $\leq n$).

Lemat 17 (Dopuszczalność kontrakcji): Jeżeli $\vdash_{ARS} \varphi, \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$, to $\vdash_{ARS} \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$, oraz jeżeli $\vdash_{ARS} \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \varphi$, to $\vdash_{ARS} \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$, ponadto długość dowodu nie jest większa.

Analityczny System RS

Wybrane własności ARS:

Twierdzenie 14 (Adekwatność): $\vdash_{ARS} \Gamma \Rightarrow \Delta$ wtw $\models \Gamma \Rightarrow \Delta$.

Lemat 15 (Dopuszczalność osłabiania): Jeżeli $\vdash_{ARS} \Gamma' \Rightarrow \Delta'$, to $\vdash_{ARS} \Gamma \Rightarrow \Delta$, dla $\Gamma' \subseteq \Gamma$, $\Delta' \subseteq \Delta$, ponadto długość dowodu nie jest większa.

Lemat 16 (Odwracalność reguł): Dla każdej reguły, jeżeli wniosek ma dowód (długości n), to przesłanki też mają dowody (długości $\leq n$).

Lemat 17 (Dopuszczalność kontrakcji): Jeżeli $\vdash_{ARS} \varphi, \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$, to $\vdash_{ARS} \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$, oraz jeżeli $\vdash_{ARS} \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \varphi$, to $\vdash_{ARS} \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$, ponadto długość dowodu nie jest większa.

Uwaga1: Nie możemy skorzystać z Lematu o odwracalności reguł dla LK-K, bo tamten był dowiedziony przy użyciu (Cut).

Analityczny System RS

Pełność ARS

Analityczny System RS

Pełność ARS

Jeżeli $\models \Gamma \Rightarrow \Delta$ i w $\Gamma \Rightarrow \Delta$ jest n wystąpień stałych logicznych, to $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ i istnieje dowód $\mathcal{D}$ dla $\Gamma \Rightarrow \Delta$ taki, że $\|\mathcal{D}\| < 2^n$.

Analityczny System RS

Pełność ARS

Jeżeli $\models \Gamma \Rightarrow \Delta$ i w $\Gamma \Rightarrow \Delta$ jest n wystąpień stałych logicznych, to $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ i istnieje dowód $\mathcal{D}$ dla $\Gamma \Rightarrow \Delta$ taki, że $\|\mathcal{D}\| < 2^n$.

DOWÓD: Przez indukcję po n.

Analityczny System RS

Pełność ARS

Jeżeli $\models \Gamma \Rightarrow \Delta$ i w $\Gamma \Rightarrow \Delta$ jest n wystąpień stałych logicznych, to $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ i istnieje dowód $\mathcal{D}$ dla $\Gamma \Rightarrow \Delta$ taki, że $\|\mathcal{D}\| < 2^n$.

Dowód: Przez indukcję po n.

Baza: $n = 0$ oznacza, że $\Gamma \Rightarrow \Delta$ jest sekwentem atomowym a skoro jest tautologią to jest aksjomatem z dowodem o wielkości 0.

Analityczny System RS

Pełność ARS

Jeżeli $\models \Gamma \Rightarrow \Delta$ i w $\Gamma \Rightarrow \Delta$ jest n wystąpień stałych logicznych, to $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ i istnieje dowód $\mathcal{D}$ dla $\Gamma \Rightarrow \Delta$ taki, że $\|\mathcal{D}\| < 2^n$.

DOWÓD: Przez indukcję po n.

Baza: $n = 0$ oznacza, że $\Gamma \Rightarrow \Delta$ jest sekwentem atomowym a skoro jest tautologią to jest aksjomatem z dowodem o wielkości 0.

Założenie indukcyjne mówi, że lemat zachodzi dla dowolnego $\Gamma' \Rightarrow \Delta'$ o ilości stałych $< n$. Pokazujemy, że zajdzie również dla sekwentu zawierającego n stałych.

Analityczny System RS

Pełność ARS

Jeżeli $\models \Gamma \Rightarrow \Delta$ i w $\Gamma \Rightarrow \Delta$ jest n wystąpień stałych logicznych, to $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ i istnieje dowód $\mathcal{D}$ dla $\Gamma \Rightarrow \Delta$ taki, że $\|\mathcal{D}\| < 2^n$.

DOWÓD: Przez indukcję po n.

Baza: $n = 0$ oznacza, że $\Gamma \Rightarrow \Delta$ jest sekwentem atomowym a skoro jest tautologią to jest aksjomatem z dowodem o wielkości 0.

Założenie indukcyjne mówi, że lemat zachodzi dla dowolnego $\Gamma' \Rightarrow \Delta'$ o ilości stałych $< n$. Pokazujemy, że zajdzie również dla sekwentu zawierającego n stałych.

Musimy rozważyć przypadki wszystkich formuł złożonych w $\Gamma \Rightarrow \Delta$. Rozważymy przypadek koniunkcji.

Analityczny System RS

Pełność ARS

Analityczny System RS

Pełność ARS

$\varphi \wedge \psi$ w poprzedniku. Zatem $\Gamma \Rightarrow \Delta := \varphi \wedge \psi, \Gamma' \Rightarrow \Delta$. Z odwracalności mamy, że $\models \varphi, \psi, \Gamma' \Rightarrow \Delta$ a ponieważ sekwent ten ma $n-1$ stałych więc podpada pod założenie indukcyjne, zatem $\vdash \varphi, \psi, \Gamma' \Rightarrow \Delta$ i $\|\mathcal{D}\| < 2^{n-1}$. Dodając do $\mathcal{D}$, $\varphi \wedge \psi, \Gamma' \Rightarrow \Delta$ jako kolejny sekwent uzyskany przez $(\wedge \Rightarrow)$ otrzymujemy dowód $\mathcal{D}'$ tegoż sekwentu taki, że $\|\mathcal{D}'\| < 2^{n-1} + 1 \leq 2^n$.

Analityczny System RS

Pełność ARS

$\varphi \wedge \psi$ w poprzedniku. Zatem $\Gamma \Rightarrow \Delta := \varphi \wedge \psi, \Gamma' \Rightarrow \Delta$. Z odwracalności mamy, że $\models \varphi, \psi, \Gamma' \Rightarrow \Delta$ a ponieważ sekwent ten ma $n-1$ stałych więc podpada pod założenie indukcyjne, zatem $\vdash \varphi, \psi, \Gamma' \Rightarrow \Delta$ i $\|\mathcal{D}\| < 2^{n-1}$. Dodając do $\mathcal{D}$, $\varphi \wedge \psi, \Gamma' \Rightarrow \Delta$ jako kolejny sekwent uzyskany przez $(\wedge \Rightarrow)$ otrzymujemy dowód $\mathcal{D}'$ tegoż sekwentu taki, że $\|\mathcal{D}'\| < 2^{n-1} + 1 \leq 2^n$.

$\varphi \wedge \psi$ w następniku. Zatem $\Gamma \Rightarrow \Delta := \Gamma \Rightarrow \Delta', \varphi \wedge \psi$. Z odwracalności mamy, że zarówno $\models \Gamma \Rightarrow \Delta'\varphi$ jak i $\models \Gamma \Rightarrow \Delta'\psi$. a ponieważ każdy z tych sekwentów ma $n-1$ stałych więc podpada pod założenie indukcyjne i ma dowód $\|\mathcal{D}\| < 2^{n-1}$. Do obu dowodów dodajemy $\Gamma \Rightarrow \Delta', \varphi \wedge \psi$ uzyskany przez $(\Rightarrow \wedge)$ i otrzymujemy dowód $\mathcal{D}'$ tegoż sekwentu taki, że $\|\mathcal{D}'\| < 2^n$, gdyż dla dowolnych $i, j < 2^{n-1}$, $i + j + 1 < 2^n$. □

Analityczny System RS

Dopuszczalność osłabiania w ARS:

Analityczny System RS

Dopuszczalność osłabiania w ARS:

Dowód indukcyjny po długości dowodu $\Gamma' \Rightarrow \Delta'$.

Analityczny System RS

Dopuszczalność osłabiania w ARS:

Dowód indukcyjny po długości dowodu $\Gamma' \Rightarrow \Delta'$.
Baza: Dowód $\Gamma' \Rightarrow \Delta'$ ma długość 0, zatem jest to aksjomat.
Więc $\Gamma \Rightarrow \Delta$ też jest aksjomatem o dowodzie długości 0.

Analityczny System RS

Dopuszczalność osłabiania w ARS:

Dowód indukcyjny po długości dowodu $\Gamma' \Rightarrow \Delta'$.
Baza: Dowód $\Gamma' \Rightarrow \Delta'$ ma długość 0, zatem jest to aksjomat.
Więc $\Gamma \Rightarrow \Delta$ też jest aksjomatem o dowodzie długości 0.
Założenie indukcyjne mówi, że lemat zachodzi dla dowolnego dowodu $\Gamma' \Rightarrow \Delta'$ o długości $< n$. Pokazujemy, że zajdzie również gdy dowód ma długość n.

Analityczny System RS

Dopuszczalność osłabiania w ARS:

Dowód indukcyjny po długości dowodu $\Gamma' \Rightarrow \Delta'$.
Baza: Dowód $\Gamma' \Rightarrow \Delta'$ ma długość 0, zatem jest to aksjomat.
Więc $\Gamma \Rightarrow \Delta$ też jest aksjomatem o dowodzie długości 0.
Założenie indukcyjne mówi, że lemat zachodzi dla dowolnego dowodu $\Gamma' \Rightarrow \Delta'$ o długości $< n$. Pokazujemy, że zajdzie również gdy dowód ma długość n.
Musimy rozważyć przypadki zastosowania wszystkich reguł do uzyskania $\Gamma' \Rightarrow \Delta'$.

Analityczny System RS

Dopuszczalność osłabiania w ARS:

Analityczny System RS

Dopuszczalność osłabiania w ARS:

Rozważmy przypadek ($\wedge \Rightarrow$).

Analityczny System RS

Dopuszczalność osłabiania w ARS:

Rozważmy przypadek ($\wedge \Rightarrow$).

Mamy zatem dowód $\mathcal{D}$ długości n zakończony sekwentem $\varphi \wedge \psi, \Gamma'' \Rightarrow \Delta' := \Gamma' \Rightarrow \Delta'$ ($\Gamma' = \Gamma'' \cup \{\varphi \wedge \psi\}$).

Analityczny System RS

Dopuszczalność osłabiania w ARS:

Rozważmy przypadek $(\wedge \Rightarrow)$.

Mamy zatem dowód $\mathcal{D}$ długości n zakończony sekwentem $\varphi \wedge \psi, \Gamma'' \Rightarrow \Delta' := \Gamma' \Rightarrow \Delta'$ $(\Gamma' = \Gamma'' \cup \{\varphi \wedge \psi\})$. Przesłanka $\varphi, \psi, \Gamma'' \Rightarrow \Delta'$ ma dowód długości $n-1$ zatem podpada pod założenie indukcyjne, czyli $\varphi, \psi, \Gamma'', \Pi \Rightarrow \Delta$, gdzie $\Pi = \Gamma - \Gamma'$, ma dowód tej samej długości, tj. $n-1$.

Analityczny System RS

Dopuszczalność osłabiania w ARS:

Rozważmy przypadek ($\wedge \Rightarrow$).

Mamy zatem dowód $\mathcal{D}$ długości n zakończony sekwentem $\varphi \wedge \psi, \Gamma'' \Rightarrow \Delta' := \Gamma' \Rightarrow \Delta'$ ($\Gamma' = \Gamma'' \cup \{\varphi \wedge \psi\}$).
Przesłanka $\varphi, \psi, \Gamma'' \Rightarrow \Delta'$ ma dowód długości $n-1$ zatem podpada pod założenie indukcyjne, czyli $\varphi, \psi, \Gamma'', \Pi \Rightarrow \Delta$, gdzie $\Pi = \Gamma - \Gamma'$, ma dowód tej samej długości, tj. $n-1$.
Przez ($\wedge \Rightarrow$) otrzymujemy $\varphi \wedge \psi, \Gamma'', \Pi \Rightarrow \Delta := \Gamma \Rightarrow \Delta$; dowód ma długość n.

Analityczny System RS

Dopuszczalność osłabiania w ARS:

Rozważmy przypadek $(\wedge \Rightarrow)$.

Mamy zatem dowód $\mathcal{D}$ długości *n* zakończony sekwentem $\varphi \wedge \psi, \Gamma'' \Rightarrow \Delta' := \Gamma' \Rightarrow \Delta'$ $(\Gamma' = \Gamma'' \cup \{\varphi \wedge \psi\})$.
Przesłanka $\varphi, \psi, \Gamma'' \Rightarrow \Delta'$ ma dowód długości $n-1$ zatem podpada pod założenie indukcyjne, czyli $\varphi, \psi, \Gamma'', \Pi \Rightarrow \Delta$, gdzie $\Pi = \Gamma - \Gamma'$, ma dowód tej samej długości, tj. $n-1$.
Przez $(\wedge \Rightarrow)$ otrzymujemy $\varphi \wedge \psi, \Gamma'', \Pi \Rightarrow \Delta := \Gamma \Rightarrow \Delta$; dowód ma długość *n*.

Zadanie: dowieść inne przypadki.

Analityczny System RS

Odwracalność reguł w ARS:

Analityczny System RS

Odwracalność reguł w ARS:

Lemat22: Dla każdej reguły, jeżeli wniosek ma dowód (długości n), to przesłanki też mają dowody (długości $\leq n$).

Analityczny System RS

Odwracalność reguł w ARS:

Lemat22: Dla każdej reguły, jeżeli wniosek ma dowód (długości n), to przesłanki też mają dowody (długości $\leq n$).

Przeprowadzimy dowód indukcyjny po długości dowodu sekwentu-wniosku.

Analityczny System RS

Odwracalność reguł w ARS:

Lemat22: Dla każdej reguły, jeżeli wniosek ma dowód (długości n), to przesłanki też mają dowody (długości $\leq n$).

Przeprowadzimy dowód indukcyjny po długości dowodu sekwentu-wniosku.
Baza: Dowód ma długość 0, zatem jest to aksjomat. Niech to będzie np. $\Gamma, p \Rightarrow p, \Delta, \varphi \wedge \psi$, wtedy obie przesłanki mają postać $\Gamma, p \Rightarrow p, \Delta, \varphi$ i $\Gamma, p \Rightarrow p, \Delta, \psi$ i obie są dowiedlne (jako aksjomaty).

Analityczny System RS

Odwracalność reguł w ARS:

Lemat22: Dla każdej reguły, jeżeli wniosek ma dowód (długości n), to przesłanki też mają dowody (długości $\leq n$).

Przeprowadzimy dowód indukcyjny po długości dowodu sekwentu-wniosku.
Baza: Dowód ma długość 0, zatem jest to aksjomat. Niech to będzie np. $\Gamma, p \Rightarrow p, \Delta, \varphi \wedge \psi$, wtedy obie przesłanki mają postać $\Gamma, p \Rightarrow p, \Delta, \varphi$ i $\Gamma, p \Rightarrow p, \Delta, \psi$ i obie są dowiedlne (jako aksjomaty).
Analogicznie dla innych przypadków.

Analityczny System RS

Odwracalność reguł w ARS:

Lemat22: Dla każdej reguły, jeżeli wniosek ma dowód (długości n), to przesłanki też mają dowody (długości $\leq n$).

Przeprowadzimy dowód indukcyjny po długości dowodu sekwentu-wniosku.
Baza: Dowód ma długość 0, zatem jest to aksjomat. Niech to będzie np. $\Gamma, p \Rightarrow p, \Delta, \varphi \wedge \psi$, wtedy obie przesłanki mają postać $\Gamma, p \Rightarrow p, \Delta, \varphi$ i $\Gamma, p \Rightarrow p, \Delta, \psi$ i obie są dowiedlne (jako aksjomaty).
Analogicznie dla innych przypadków.
Założenie indukcyjne mówi, że lemat zachodzi dla dowolnego dowodu wniosku o długości $< n$. Pokazujemy, że zajdzie również gdy dowód ma długość n.

Analityczny System RS

Odwracalność reguł w ARS:

Rozważmy przypadek $(\wedge \Rightarrow)$.

Analityczny System RS

Odwracalność reguł w ARS:

Rozważmy przypadek $(\wedge \Rightarrow)$.
Mamy zatem dowód $\mathcal{D}$ długości n zakończony sekwentem $S := \varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$.

Analityczny System RS

Odwracalność reguł w ARS:

Rozważmy przypadek $(\wedge \Rightarrow)$.
Mamy zatem dowód $\mathcal{D}$ długości n zakończony sekwentem $S := \varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$.
Należy rozważyć 2 podprzypadki:

Analityczny System RS

Odwracalność reguł w ARS:

Rozważmy przypadek $(\wedge \Rightarrow)$.
Mamy zatem dowód $\mathcal{D}$ długości n zakończony sekwentem
$S := \varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$.
Należy rozważyć 2 podprzypadki:

a. $\varphi \wedge \psi$ jest formułą zasadniczą S

Analityczny System RS

Odwracalność reguł w ARS:

Rozważmy przypadek $(\wedge \Rightarrow)$.
Mamy zatem dowód $\mathcal{D}$ długości n zakończony sekwentem $S := \varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$.
Należy rozważyć 2 podprzypadki:

a. $\varphi \wedge \psi$ jest formułą zasadniczą S

b. $\varphi \wedge \psi$ nie jest formułą zasadniczą S

Analityczny System RS

Odwracalność reguł w ARS:

Rozważmy przypadek $(\wedge \Rightarrow)$.
Mamy zatem dowód $\mathcal{D}$ długości n zakończony sekwentem $S := \varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$.
Należy rozważyć 2 podprzypadki:

a. $\varphi \wedge \psi$ jest formułą zasadniczą S
b. $\varphi \wedge \psi$ nie jest formułą zasadniczą S

Jeżeli ostatnia reguła to $(\wedge \Rightarrow)$ z $\varphi \wedge \psi$ jako formułą zasadniczą, to wtedy po obcięciu ostatniego sekwentu z $\mathcal{D}$ mamy dowód $\varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ (długości $n-1$).

Analityczny System RS

Odwracalność reguł w ARS:

Analityczny System RS

Odwracalność reguł w ARS:

Rozważmy przypadek ($\wedge \Rightarrow$), podprzypadek b.

Analityczny System RS

Odwracalność reguł w ARS:

Rozważmy przypadek $(\wedge \Rightarrow)$, podprzypadek b.
Jeżeli $\varphi \wedge \psi$ nie jest formułą zasadniczą S, to jest formułą parametryczną; przykładowo, jeżeli otatnio zastosowana reguła była 2-przesłankowa, to $\mathcal{D}$ kończy się następująco:

Analityczny System RS

Odwracalność reguł w ARS:

Rozważmy przypadek $(\wedge \Rightarrow)$, podprzypadek b.
Jeżeli $\varphi \wedge \psi$ nie jest formułą zasadniczą S, to jest formułą parametryczną; przykładowo, jeżeli otatnio zastosowana reguła była 2-przesłankowa, to $\mathcal{D}$ kończy się następująco:

$$\frac{\varphi \wedge \psi, \Gamma' \Rightarrow \Delta' \qquad \varphi \wedge \psi, \Gamma'' \Rightarrow \Delta''}{\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

Analityczny System RS

Odwracalność reguł w ARS:

Rozważmy przypadek ($\wedge \Rightarrow$), podprzypadek b.
Jeżeli $\varphi \wedge \psi$ nie jest formułą zasadniczą S, to jest formułą parametryczną; przykładowo, jeżeli otatnio zastosowana reguła była 2-przesłankowa, to $\mathcal{D}$ kończy się następująco:

$$\frac{\varphi \wedge \psi, \Gamma' \Rightarrow \Delta' \qquad \varphi \wedge \psi, \Gamma'' \Rightarrow \Delta''}{\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

Ponieważ dowody obu przesłanek mają długość $< n$, to podpadają pod założenie indukcyjne. Zatem mamy dowody sekwentów $\varphi, \psi, \Gamma' \Rightarrow \Delta'$ i $\varphi, \psi, \Gamma'' \Rightarrow \Delta''$. Ale wtedy za pomocą tej samej reguły 2-przesłankowej, która kończyła $\mathcal{D}$ wydedukujemy z nich sekwent $\varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$, czyli przesłankę rozważanego sekwentu.

Analityczny System RS

Dopuszczalność kontrakcji:

Analityczny System RS

Dopuszczalność kontrakcji:

Jeżeli $\vdash_{ARS} \varphi, \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$, to $\vdash_{ARS} \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$, oraz jeżeli $\vdash_{ARS} \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \varphi$, to $\vdash_{ARS} \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$, ponadto długość dowodu nie jest większa.

Analityczny System RS

Dopuszczalność kontrakcji:

Jeżeli $\vdash_{ARS} \varphi, \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$, to $\vdash_{ARS} \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$, oraz jeżeli $\vdash_{ARS} \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \varphi$, to $\vdash_{ARS} \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$, ponadto długość dowodu nie jest większa.

DOWÓD: Przeprowadzimy dowód indukcyjny po długości dowodu $\varphi, \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ (dla $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \varphi$ analogicznie)

Analityczny System RS

Dopuszczalność kontrakcji:

Jeżeli $\vdash_{ARS} \varphi, \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$, to $\vdash_{ARS} \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$, oraz jeżeli $\vdash_{ARS} \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \varphi$, to $\vdash_{ARS} \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$, ponadto długość dowodu nie jest większa.

Dowód: Przeprowadzimy dowód indukcyjny po długości dowodu $\varphi, \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ (dla $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \varphi$ analogicznie)

Baza: $\varphi, \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ ma dowód długości 0, zatem jest aksjomatem i bez względu na to czy $\psi \in \Gamma \cup \Delta \cup \{\varphi\}$ jest identyczne z φ czy nie, to $\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ też jest aksjomatem.

Analityczny System RS

Dopuszczalność kontrakcji:

Analityczny System RS

Dopuszczalność kontrakcji:

Założenie indukcyjne mówi, że lemat zachodzi dla dowolnego dowodu wniosku o długości $< n$. Pokazujemy, że zajdzie również gdy dowód ma długość n. Należy rozważyć 2 podprzypadki:

Analityczny System RS

Dopuszczalność kontrakcji:

Założenie indukcyjne mówi, że lemat zachodzi dla dowolnego dowodu wniosku o długości $< n$. Pokazujemy, że zajdzie również gdy dowód ma długość n. Należy rozważyć 2 podprzypadki:

a. φ nie jest formułą zasadniczą

b. φ jest formułą zasadniczą

Analityczny System RS

Dopuszczalność kontrakcji:

Założenie indukcyjne mówi, że lemat zachodzi dla dowolnego dowodu wniosku o długości $< n$. Pokazujemy, że zajdzie również gdy dowód ma długość n. Należy rozważyć 2 podprzypadki:

a. φ nie jest formułą zasadniczą
b. φ jest formułą zasadniczą

Jeżeli φ nie jest formułą zasadniczą w dowodzonym sekwencie, to $\varphi, \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ został wydedukowany z $\varphi, \varphi, \Gamma' \Rightarrow \Delta'$ przez regułę jednoprzesłankową lub dodatkowo z $\varphi, \varphi, \Gamma'' \Rightarrow \Delta''$ przez regułę dwuprzesłankową. W każdym przypadku przesłanki podpadają pod założenia indukcyjne, zatem $\varphi, \Gamma' \Rightarrow \Delta'$ (i $\varphi, \Gamma'' \Rightarrow \Delta''$ mają dowody długości mniejszej od n skąd przez zastosowanie tej samej reguły jedno (lub dwu) przesłankowej dostajemy dowód $\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ o długości co najwyżej n.

Analityczny System RS

Dopuszczalność kontrakcji:

Analityczny System RS

Dopuszczalność kontrakcji:

Jeżeli φ nie jest formułą zasadniczą w dowodzonym sekwencie, to musimy rozważyć wszystkie przypadki formy φ.

Analityczny System RS

Dopuszczalność kontrakcji:

Jeżeli φ nie jest formułą zasadniczą w dowodzonym sekwencie, to musimy rozważyć wszystkie przypadki formy φ.
Niech $\varphi := \psi \wedge \chi$, wtedy rozważany sekwent ma postać $\psi \wedge \chi, \psi \wedge \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ a przesłanka postać $\psi, \chi, \psi \wedge \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ i dowód długości $n-1$. Z lematu poprzedniego (o odwracalności) $\psi, \chi, \psi, \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ też ma dowód o długości nie większej od $n-1$.
Z założenia indukcyjnego zastosowanego dwukrotnie mamy dowód $\psi, \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ o długości nie większej od $n-1$, zatem przez $(\wedge \Rightarrow)$ otrzymujemy dowód $\psi \wedge \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ o długości nie większej od n.

Analityczny System RS

Dopuszczalność kontrakcji:

Jeżeli φ nie jest formułą zasadniczą w dowodzonym sekwencie, to musimy rozważyć wszystkie przypadki formy φ.
Niech $\varphi := \psi \wedge \chi$, wtedy rozważany sekwent ma postać $\psi \wedge \chi, \psi \wedge \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ a przesłanka postać $\psi, \chi, \psi \wedge \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ i dowód długości $n - 1$. Z lematu poprzedniego (o odwracalności) $\psi, \chi, \psi, \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ też ma dowód o długości nie większej od $n - 1$. Z założenia indukcyjnego zastosowanego dwukrotnie mamy dowód $\psi, \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ o długości nie większej od $n - 1$, zatem przez $(\wedge \Rightarrow)$ otrzymujemy dowód $\psi \wedge \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ o długości nie większej od n.
Analogicznie dla φ postaci $\neg\psi, \psi \vee \chi, \psi \to \chi$. $\square$

Równoważność reguł.

Podane niżej schematy sekwentów i reguł sekwentowych są wzajemnie wyprowadzalne:

Równoważność reguł.

Podane niżej schematy sekwentów i reguł sekwentowych są wzajemnie wyprowadzalne:

1. $\varphi \Rightarrow \psi$
2. $\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta \ / \ \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$
3. $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \ / \ \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi$
4. $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi; \ \psi, \Gamma' \Rightarrow \Delta' \ / \ \Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'$

Równoważność reguł.

Dowód:

Równoważność reguł.

Dowód:

1\. $\Longrightarrow$ 2.: Wystarczy zastosować (Cut) do 1. i przesłanki 2. by dostać wniosek.

Równoważność reguł.

Dowód:

1. $\Longrightarrow$ 2.: Wystarczy zastosować (Cut) do 1. i przesłanki 2. by dostać wniosek.
2. $\Longrightarrow$ 3.: Z aksjomatu $\psi \Rightarrow \psi$ przez 2. otrzymujemy $\varphi \Rightarrow \psi$, które przez (Cut) z przesłanką 3. daje wniosek.

Równoważność reguł.

Dowód:

1. $\Longrightarrow$ 2.: Wystarczy zastosować (Cut) do 1. i przesłanki 2. by dostać wniosek.
2. $\Longrightarrow$ 3.: Z aksjomatu $\psi \Rightarrow \psi$ przez 2. otrzymujemy $\varphi \Rightarrow \psi$, które przez (Cut) z przesłanką 3. daje wniosek.
3. $\Longrightarrow$ 4.: wyprowadzalność demonstruje poniższy schemat dowodu:

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \dfrac{(3.)\ \dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\varphi \Rightarrow \psi} \qquad \psi, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\varphi, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}\ (Cut)}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}\ (Cut)$$

Równoważność reguł.

Dowód:

1\. $\Longrightarrow$ 2.: Wystarczy zastosować (Cut) do 1. i przesłanki 2. by dostać wniosek.

2\. $\Longrightarrow$ 3.: Z aksjomatu $\psi \Rightarrow \psi$ przez 2. otrzymujemy $\varphi \Rightarrow \psi$, które przez (Cut) z przesłanką 3. daje wniosek.

3\. $\Longrightarrow$ 4.: wyprowadzalność demonstruje poniższy schemat dowodu:

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \dfrac{(3.)\,\dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi}{\varphi \Rightarrow \psi} \qquad \psi, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\varphi, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}\,(Cut)}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,(Cut)$$

4\. $\Longrightarrow$ 1.: Z $\varphi \Rightarrow \varphi$ i $\psi \Rightarrow \psi$ przez 4. otrzymujemy 1.

Równoważność reguł.

Podane niżej schematy sekwentów i reguł sekwentowych są wzajemnie wyprowadzalne:

Równoważność reguł.

Podane niżej schematy sekwentów i reguł sekwentowych są wzajemnie wyprowadzalne:

1. $\varphi, \psi \Rightarrow \chi$
2. $\chi, \Gamma \Rightarrow \Delta \ / \ \varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$
3. $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \ / \ \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \chi$
4. $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \ / \ \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \chi$
5. $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi; \ \Gamma' \Rightarrow \Delta', \psi \ / \ \Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta', \chi$
6. $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi; \ \chi, \Gamma' \Rightarrow \Delta' \ / \ \psi, \Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'$
7. $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi; \ \chi, \Gamma' \Rightarrow \Delta' \ / \ \varphi, \Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'$
8. $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi; \ \Gamma' \Rightarrow \Delta', \psi; \ \chi, \Pi \Rightarrow \Sigma \ / \ \Gamma, \Gamma', \Pi \Rightarrow \Delta, \Delta', \Sigma$

Równoważność reguł.

Dowód:

Równoważność reguł.

Dowód:

1. $\Longrightarrow$ 2.: Wystarczy zastosować (Cut) do 1. i przesłanki 2. by dostać wniosek.

Równoważność reguł.

Dowód:

1. $\Longrightarrow$ 2.: Wystarczy zastosować (Cut) do 1. i przesłanki 2. by dostać wniosek.
2. $\Longrightarrow$ 3.: Z aksjomatu $\chi \Rightarrow \chi$ przez 2. otrzymujemy $\varphi, \psi \Rightarrow \chi$, które przez (Cut) z przesłanką 3. daje wniosek.

Równoważność reguł.

Dowód:

1. $\Longrightarrow$ 2.: Wystarczy zastosować (Cut) do 1. i przesłanki 2. by dostać wniosek.
2. $\Longrightarrow$ 3.: Z aksjomatu $\chi \Rightarrow \chi$ przez 2. otrzymujemy $\varphi, \psi \Rightarrow \chi$, które przez (Cut) z przesłanką 3. daje wniosek.
3. $\Longrightarrow$ 4.: analogicznie do poprzedniego, z 3. zastosowanym do $\varphi \Rightarrow \varphi$.

Równoważność reguł.

Dowód:

1. $\Longrightarrow$ 2.: Wystarczy zastosować (Cut) do 1. i przesłanki 2. by dostać wniosek.
2. $\Longrightarrow$ 3.: Z aksjomatu $\chi \Rightarrow \chi$ przez 2. otrzymujemy $\varphi, \psi \Rightarrow \chi$, które przez (Cut) z przesłanką 3. daje wniosek.
3. $\Longrightarrow$ 4.: analogicznie do poprzedniego, z 3. zastosowanym do $\varphi \Rightarrow \varphi$.
4. $\Longrightarrow$ 5.: analogicznie do poprzedniego, z tym, że 4. zamiast do aksjomatu stosujemy do przesłanki 5. postaci $\Gamma' \Rightarrow \Delta', \psi$ by przez (Cut) na drugiej przesłance dostać wniosek.

Równoważność reguł.

Dowód:

1. $\Longrightarrow$ 2.: Wystarczy zastosować (Cut) do 1. i przesłanki 2. by dostać wniosek.
2. $\Longrightarrow$ 3.: Z aksjomatu $\chi \Rightarrow \chi$ przez 2. otrzymujemy $\varphi, \psi \Rightarrow \chi$, które przez (Cut) z przesłanką 3. daje wniosek.
3. $\Longrightarrow$ 4.: analogicznie do poprzedniego, z 3. zastosowanym do $\varphi \Rightarrow \varphi$.
4. $\Longrightarrow$ 5.: analogicznie do poprzedniego, z tym, że 4. zamiast do aksjomatu stosujemy do przesłanki 5. postaci $\Gamma' \Rightarrow \Delta', \psi$ by przez (Cut) na drugiej przesłance dostać wniosek.
5. $\Longrightarrow$ 6.: wyprowadzalność demonstruje poniższy schemat dowodu:

$$\dfrac{(5.)\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \psi \Rightarrow \psi}{\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \chi} \qquad \chi, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\psi, \Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}\ (Cut)$$

Równoważność reguł.

Dowód:

Równoważność reguł.

Dowód:

6. $\Longrightarrow$ 7.: wyprowadzalność demonstruje poniższy schemat dowodu:

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \qquad \dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi \qquad \chi, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\psi, \varphi, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}\,(6.)}{\varphi, \Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,(Cut)$$

Równoważność reguł.

Dowód:

6. $\Longrightarrow$ 7.: wyprowadzalność demonstruje poniższy schemat dowodu:

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \qquad \dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi \qquad \chi, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\psi, \varphi, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}\,(6.)}{\varphi, \Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,(Cut)$$

7. $\Longrightarrow$ 8.: wyprowadzalność demonstruje poniższy schemat dowodu:

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \dfrac{\Gamma' \Rightarrow \Delta', \psi \qquad \chi, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\varphi, \Gamma', \Pi \Rightarrow \Delta', \Sigma}\,(7.)}{\Gamma, \Gamma', \Pi \Rightarrow \Delta, \Delta', \Sigma}\,(Cut)$$

Równoważność reguł.

Dowód:

6. $\Longrightarrow$ 7.: wyprowadzalność demonstruje poniższy schemat dowodu:

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \qquad \dfrac{\varphi \Rightarrow \varphi \qquad \chi, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\psi, \varphi, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}\,(6.)}{\varphi, \Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}\,(Cut)$$

7. $\Longrightarrow$ 8.: wyprowadzalność demonstruje poniższy schemat dowodu:

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \dfrac{\Gamma' \Rightarrow \Delta', \psi \qquad \chi, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\varphi, \Gamma', \Pi \Rightarrow \Delta', \Sigma}\,(7.)}{\Gamma, \Gamma', \Pi \Rightarrow \Delta, \Delta', \Sigma}\,(Cut)$$

8. $\Longrightarrow$ 1.: Z $\varphi \Rightarrow \varphi$, $\psi \Rightarrow \psi$ i $\chi \Rightarrow \chi$ przez 8. otrzymujemy 1.

Równoważność reguł.

Podane niżej schematy sekwentów i reguł sekwentowych są wzajemnie wyprowadzalne:

Równoważność reguł.

Podane niżej schematy sekwentów i reguł sekwentowych są wzajemnie wyprowadzalne:

1. $\varphi \Rightarrow \psi, \chi$
2. $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \ / \ \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi, \chi$
3. $\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta \ / \ \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \chi$
4. $\chi, \Gamma \Rightarrow \Delta \ / \ \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi$
5. $\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta; \ \chi, \Gamma' \Rightarrow \Delta' \ / \ \varphi, \Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'$
6. $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi; \ \chi, \Gamma' \Rightarrow \Delta' \ / \ \Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta', \psi$
7. $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi; \ \chi, \Gamma' \Rightarrow \Delta' \ / \ \Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta', \chi$
8. $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi; \ \psi, \Gamma' \Rightarrow \Delta'; \ \chi, \Pi \Rightarrow \Sigma \ / \ \Gamma, \Gamma', \Pi \Rightarrow \Delta, \Delta', \Sigma$

Dowód C dualnie do części B.

Równoważność reguł.

Przykład $\vee$:

Równoważność reguł.

Przykład $\vee$:

Jedna z reguł ($\Rightarrow \vee$) dla (addytywnej) alternatywy podpada pod schemat A.3., zatem równoważnie można użyć:

Równoważność reguł.

Przykład $\vee$:

Jedna z reguł ($\Rightarrow \vee$) dla (addytywnej) alternatywy podpada pod schemat A.3., zatem równoważnie można użyć:

A.1. $\varphi \Rightarrow \varphi \vee \psi$

Równoważność reguł.

Przykład $\vee$:

Jedna z reguł ($\Rightarrow \vee$) dla (addytywnej) alternatywy podpada pod schemat A.3., zatem równoważnie można użyć:

A.1. $\varphi \Rightarrow \varphi \vee \psi$

A.2. $\varphi \vee \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta \ / \ \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$

Równoważność reguł.

Przykład $\vee$:

Jedna z reguł ($\Rightarrow \vee$) dla (addytywnej) alternatywy podpada pod schemat A.3., zatem równoważnie można użyć:

A.1. $\varphi \Rightarrow \varphi \vee \psi$

A.2. $\varphi \vee \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta \ / \ \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$

lub

A.4. $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi; \ \varphi \vee \psi, \Gamma' \Rightarrow \Delta' \ / \ \Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'$

Równoważność reguł.

Dla odmiany ($\vee \Rightarrow$) podpada pod schemat C.5. (z $\varphi := \psi \vee \chi$), generuje to następujące równoważniki:

Równoważność reguł.

Dla odmiany ($\vee \Rightarrow$) podpada pod schemat C.5. (z $\varphi := \psi \vee \chi$), generuje to następujące równoważniki:

C.1. $\psi \vee \chi \Rightarrow \psi, \chi$

Równoważność reguł.

Dla odmiany ($\vee \Rightarrow$) podpada pod schemat C.5. (z $\varphi := \psi \vee \chi$), generuje to następujące równoważniki:

C.1. $\psi \vee \chi \Rightarrow \psi, \chi$
C.2. $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \vee \chi \ / \ \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi, \chi$

Równoważność reguł.

Dla odmiany $(\vee \Rightarrow)$ podpada pod schemat C.5. (z $\varphi := \psi \vee \chi$), generuje to następujące równoważniki:

C.1. $\psi \vee \chi \Rightarrow \psi, \chi$
C.2. $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \vee \chi \ / \ \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi, \chi$
C.3. $\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta \ / \ \psi \vee \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \chi$

Równoważność reguł.

Dla odmiany $(\vee \Rightarrow)$ podpada pod schemat C.5. (z $\varphi := \psi \vee \chi$), generuje to następujące równoważniki:

C.1. $\psi \vee \chi \Rightarrow \psi, \chi$
C.2. $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \vee \chi \ / \ \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi, \chi$
C.3. $\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta \ / \ \psi \vee \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \chi$
C.4. $\chi, \Gamma \Rightarrow \Delta \ / \ \psi \vee \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi$

Równoważność reguł.

Dla odmiany ($\vee \Rightarrow$) podpada pod schemat C.5. (z $\varphi := \psi \vee \chi$), generuje to następujące równoważniki:

C.1. $\psi \vee \chi \Rightarrow \psi, \chi$
C.2. $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \vee \chi \;/\; \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi, \chi$
C.3. $\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta \;/\; \psi \vee \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \chi$
C.4. $\chi, \Gamma \Rightarrow \Delta \;/\; \psi \vee \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi$
C.6. $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \vee \chi;\; \chi, \Gamma' \Rightarrow \Delta' \;/\; \Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta', \psi$

Równoważność reguł.

Dla odmiany $(\vee \Rightarrow)$ podpada pod schemat C.5. (z $\varphi := \psi \vee \chi$), generuje to następujące równoważniki:

C.1. $\psi \vee \chi \Rightarrow \psi, \chi$
C.2. $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \vee \chi \ / \ \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi, \chi$
C.3. $\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta \ / \ \psi \vee \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \chi$
C.4. $\chi, \Gamma \Rightarrow \Delta \ / \ \psi \vee \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi$
C.6. $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \vee \chi; \ \chi, \Gamma' \Rightarrow \Delta' \ / \ \Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta', \psi$
C.7. $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \vee \chi; \ \chi, \Gamma' \Rightarrow \Delta' \ / \ \Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta', \chi$

Równoważność reguł.

Dla odmiany ($\vee \Rightarrow$) podpada pod schemat C.5. (z $\varphi := \psi \vee \chi$), generuje to następujące równoważniki:

C.1. $\psi \vee \chi \Rightarrow \psi, \chi$
C.2. $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \vee \chi \;/\; \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi, \chi$
C.3. $\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta \;/\; \psi \vee \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \chi$
C.4. $\chi, \Gamma \Rightarrow \Delta \;/\; \psi \vee \chi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi$
C.6. $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \vee \chi;\; \chi, \Gamma' \Rightarrow \Delta' \;/\; \Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta', \psi$
C.7. $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \vee \chi;\; \chi, \Gamma' \Rightarrow \Delta' \;/\; \Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta', \chi$
C.8. $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \vee \chi;\; \psi, \Gamma' \Rightarrow \Delta';\; \chi, \Pi \Rightarrow \Sigma \;/\; \Gamma, \Gamma', \Pi \Rightarrow \Delta, \Delta', \Sigma$