Rachunki Sekwentów 2

Andrzej Indrzejczak

Katedra Logiki i Metodologii Nauk UŁ

Łódź, semestr letni 2011/2012

Twierdzenie o eliminacji cięcia:

Eliminowalność czy dopuszczalność?

Twierdzenie o eliminacji cięcia:

Eliminowalność czy dopuszczalność?

Twierdzenie o eliminacji cięcia występuje też często jako twierdzenie o dopuszczalności cięcia

Twierdzenie o eliminacji cięcia:

Eliminowalność czy dopuszczalność?

Twierdzenie o eliminacji cięcia występuje też często jako twierdzenie o dopuszczalności cięcia
Dopuszczalność jest konwersem eliminowalności, w tym sensie, że jeżeli **S** oznacza dowolny system RS z (cut) jako regułą pierwotną a **S'** ten sam system bez reguły cięcia, to (cut) jest eliminowalne w **S** wtw (cut) jest dopuszczalne w **S'**. W obu przypadkach jednak zazwyczaj inaczej formułuje się samo twierdzenie:

Twierdzenie o eliminacji cięcia:

Eliminowalność czy dopuszczalność?

Twierdzenie o eliminacji cięcia występuje też często jako twierdzenie o dopuszczalności cięcia

Dopuszczalność jest konwersem eliminowalności, w tym sensie, że jeżeli **S** oznacza dowolny system RS z (cut) jako regułą pierwotną a **S'** ten sam system bez reguły cięcia, to (cut) jest eliminowalne w **S** wtw (cut) jest dopuszczalne w **S'**. W obu przypadkach jednak zazwyczaj inaczej formułuje się samo twierdzenie:

Twierdzenie o eliminacji: Jeżeli $\vdash_S S$, to $\vdash_{S'} S$

Twierdzenie o eliminacji cięcia:

Eliminowalność czy dopuszczalność?

Twierdzenie o eliminacji cięcia występuje też często jako twierdzenie o dopuszczalności cięcia
Dopuszczalność jest konwersem eliminowalności, w tym sensie, że jeżeli **S** oznacza dowolny system RS z (cut) jako regułą pierwotną a **S'** ten sam system bez reguły cięcia, to (cut) jest eliminowalne w **S** wtw (cut) jest dopuszczalne w **S'**. W obu przypadkach jednak zazwyczaj inaczej formułuje się samo twierdzenie:
Twierdzenie o eliminacji: Jeżeli $\vdash_S S$, to $\vdash_{S'} S$
Twierdzenie o dopuszczalności: Jeżeli $\vdash_{S'} \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ i $\vdash_{S'} \varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma$, to $\vdash_{S'} \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$

Twierdzenie o eliminacji cięcia:

Dowody eliminowalności (dopuszczalności):

Twierdzenie o eliminacji cięcia:

Dowody eliminowalności (dopuszczalności):

- Gentzena

Twierdzenie o eliminacji cięcia:

Dowody eliminowalności (dopuszczalności):

- Gentzena
- Dragalina

Twierdzenie o eliminacji cięcia:

Dowody eliminowalności (dopuszczalności):

- Gentzena
- Dragalina
- Curry'ego

Twierdzenie o eliminacji cięcia:

Dowody eliminowalności (dopuszczalności):

- Gentzena
- Dragalina
- Curry'ego
- Schütte'go-Taita

Twierdzenie o eliminacji cięcia:

Dowody eliminowalności (dopuszczalności):

- Gentzena
- Dragalina
- Curry'ego
- Schütte'go-Taita
- Smullyana

Twierdzenie o eliminacji cięcia:

Dowody eliminowalności (dopuszczalności):

- Gentzena
- Dragalina
- Curry'ego
- Schütte'go-Taita
- Smullyana
- Bussa

Twierdzenie o eliminacji cięcia:

Ogólna idea (konstruktywnego) dowodu eliminowalności (dopuszczalności):

Twierdzenie o eliminacji cięcia:

Ogólna idea (konstruktywnego) dowodu eliminowalności (dopuszczalności):

Staramy się zmodyfikować dany $\mathcal{D}$ tak by wszystkie zastosowania (Cut) zostały zastąpione przez kombinacje innych reguł.

Twierdzenie o eliminacji cięcia:

Ogólna idea (konstruktywnego) dowodu eliminowalności (dopuszczalności):

Staramy się zmodyfikować dany $\mathcal{D}$ tak by wszystkie zastosowania (Cut) zostały zastąpione przez kombinacje innych reguł.
Robimy to poprzez:

(a) bezpośrednią eliminację danego zastosowania (Cut) lub

Twierdzenie o eliminacji cięcia:

Ogólna idea (konstruktywnego) dowodu eliminowalności (dopuszczalności):

Staramy się zmodyfikować dany $\mathcal{D}$ tak by wszystkie zastosowania (Cut) zostały zastąpione przez kombinacje innych reguł.
Robimy to poprzez:

(a) bezpośrednią eliminację danego zastosowania (Cut) lub

(b) przez wykonanie odpowiednich kroków redukcyjnych, które zamieniają dane wystąpienie (Cut) na inne, w zdefiniowanym sensie "prostsze".

Twierdzenie o eliminacji cięcia:

Ogólna idea (konstruktywnego) dowodu eliminowalności (dopuszczalności):

Staramy się zmodyfikować dany $\mathcal{D}$ tak by wszystkie zastosowania (Cut) zostały zastąpione przez kombinacje innych reguł.
Robimy to poprzez:

(a) bezpośrednią eliminację danego zastosowania (Cut) lub

(b) przez wykonanie odpowiednich kroków redukcyjnych, które zamieniają dane wystąpienie (Cut) na inne, w zdefiniowanym sensie "prostsze".

Uwaga: Kroki redukcyjne wprawdzie nie eliminują zastosowań (Cut) ale ich systematyczne wykonywanie w efekcie końcowym pozwala całkiem pozbyć się (Cut) z dowodu, poprzez sprowadzenie do tych przypadków, które podpadają pod (a).

Twierdzenie o eliminacji cięcia:

Zastosowania (Cut) eliminowalne całkowicie z dowodu:

Twierdzenie o eliminacji cięcia:

Zastosowania (Cut) eliminowalne całkowicie z dowodu:

a) jeżeli przynajmiej jedna przesłanka (cut) jest aksjomatyczna, to eliminacja tego zastosowania jest trywialna gdyż fragment dowodu:

$$(Cut)\ \frac{\varphi \Rightarrow \varphi \qquad \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

Twierdzenie o eliminacji cięcia:

Zastosowania (Cut) eliminowalne całkowicie z dowodu:

a) jeżeli przynajmiej jedna przesłanka (cut) jest aksjomatyczna, to eliminacja tego zastosowania jest trywialna gdyż fragment dowodu:

$$(Cut)\ \frac{\varphi \Rightarrow \varphi \qquad \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

zamieniamy po prostu na dowód $\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$.

Twierdzenie o eliminacji cięcia:

Zastosowania (Cut) eliminowalne całkowicie z dowodu:

a) jeżeli przynajmiej jedna przesłanka (cut) jest aksjomatyczna, to eliminacja tego zastosowania jest trywialna gdyż fragment dowodu:

$$(Cut)\ \frac{\varphi \Rightarrow \varphi \qquad \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

zamieniamy po prostu na dowód $\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$.
Analogicznie, gdy aksjomatem jest prawa przesłanka (cut).

Twierdzenie o eliminacji cięcia:

Zastosowania (Cut) eliminowalne całkowicie z dowodu:

a) jeżeli przynajmiej jedna przesłanka (cut) jest aksjomatyczna, to eliminacja tego zastosowania jest trywialna gdyż fragment dowodu:

$$(Cut)\ \frac{\varphi \Rightarrow \varphi \qquad \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

zamieniamy po prostu na dowód $\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$.
Analogicznie, gdy aksjomatem jest prawa przesłanka (cut).
Uwaga: Powyższa sytuacja da się uogólnić na dowolne zastosowanie (Cut), w którym jedna z przesłanek zawiera pewną formułę zarówno w poprzedniku jak i w następniku (jest aksjomatem uogólnionym).

Twierdzenie o eliminacji cięcia:

Zastosowania (Cut) eliminowalne całkowicie z dowodu:

Twierdzenie o eliminacji cięcia:

Zastosowania (Cut) eliminowalne całkowicie z dowodu:

Zastosowania (Cut), w którym jedna z przesłanek zawiera pewną formułę zarówno w poprzedniku jak i w następniku (jest aksjomatem uogólnionym).
Zachodzą tu 2 możliwości:

Twierdzenie o eliminacji cięcia:

Zastosowania (Cut) eliminowalne całkowicie z dowodu:

Zastosowania (Cut), w którym jedna z przesłanek zawiera pewną formułę zarówno w poprzedniku jak i w następniku (jest aksjomatem uogólnionym).
Zachodzą tu 2 możliwości:

(i) cut-formuła występuje po obu stronach (jest formułą aksjomatyczną)

Twierdzenie o eliminacji cięcia:

Zastosowania (Cut) eliminowalne całkowicie z dowodu:

Zastosowania (Cut), w którym jedna z przesłanek zawiera pewną formułę zarówno w poprzedniku jak i w następniku (jest aksjomatem uogólnionym).
Zachodzą tu 2 możliwości:

(i) cut-formuła występuje po obu stronach (jest formułą aksjomatyczną)

(ii) cut-formuła nie występuje po obu stronach (nie jest formułą aksjomatyczną)

Twierdzenie o eliminacji cięcia:

Zastosowania (Cut) eliminowalne całkowicie z dowodu:

Zastosowania (Cut), w którym jedna z przesłanek zawiera pewną formułę zarówno w poprzedniku jak i w następniku (jest aksjomatem uogólnionym).
Zachodzą tu 2 możliwości:

(i) cut-formuła występuje po obu stronach (jest formułą aksjomatyczną)

(ii) cut-formuła nie występuje po obu stronach (nie jest formułą aksjomatyczną)

Pierwszy przypadek jest ściśle analogiczny do zilustrowanego wyżej; do drugiej przesłanki wystarczy dołączyć brakujące formuły przez osłabianie i zastosować permutację do następnika.

Twierdzenie o eliminacji cięcia:

Zastosowania (Cut) eliminowalne całkowicie z dowodu:

Twierdzenie o eliminacji cięcia:

Zastosowania (Cut) eliminowalne całkowicie z dowodu:

W przypadku (ii) mamy:

$$(Cut)\ \frac{\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi, \varphi \qquad \varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\psi, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \psi, \Sigma}$$

Twierdzenie o eliminacji cięcia:

Zastosowania (Cut) eliminowalne całkowicie z dowodu:

W przypadku (ii) mamy:

$$(Cut)\ \frac{\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi, \varphi \qquad \varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\psi, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \psi, \Sigma}$$

i zamieniamy po prostu na dowód (aksjomatu) $\psi, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \psi, \Sigma$.

Twierdzenie o eliminacji cięcia:

Zastosowania (Cut) eliminowalne całkowicie z dowodu:

W przypadku (ii) mamy:

$$(Cut)\ \frac{\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi, \varphi \qquad \varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\psi, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \psi, \Sigma}$$

i zamieniamy po prostu na dowód (aksjomatu) $\psi, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \psi, \Sigma$. Analogicznie, gdy aksjomatem uogólnionym jest prawa przesłanka (cut).

Twierdzenie o eliminacji cięcia:

Zastosowania (Cut) eliminowalne całkowicie z dowodu:

Twierdzenie o eliminacji cięcia:

Zastosowania (Cut) eliminowalne całkowicie z dowodu:

b) Jeżeli w przynajmniej jednej przesłance cut-formuła jest uzyskana przez osłabianie sytuacja jest podobna; fragment dowodu:

$$(Cut)\,\dfrac{(\Rightarrow W)\,\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi} \qquad \varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}$$

Twierdzenie o eliminacji cięcia:

Zastosowania (Cut) eliminowalne całkowicie z dowodu:

b) Jeżeli w przynajmniej jednej przesłance cut-formuła jest uzyskana przez osłabianie sytuacja jest podobna; fragment dowodu:

$$(Cut)\ \dfrac{(\Rightarrow W)\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi} \qquad \varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}$$

zamieniamy na:

$$(W)(P)\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}$$

Twierdzenie o eliminacji cięcia:

Zastosowania (Cut) eliminowalne całkowicie z dowodu:

Twierdzenie o eliminacji cięcia:

Zastosowania (Cut) eliminowalne całkowicie z dowodu:

Fakt1: (Cut), którego jedna z przesłanek jest aksjomatem (uogólnionym) lub zawiera cut-formułę uzyskaną przez zastosowanie osłabiania jest całkowicie eliminowalny.

Twierdzenie o eliminacji cięcia:

Kroki redukcyjne:

Twierdzenie o eliminacji cięcia:

Kroki redukcyjne:

Niestety w pozostałych wypadkach (cut) nie daje się wyeliminować tak prosto i zazwyczaj wymaga zastępowania jednych zastosowań (Cut) przez inne, w pewnym sensie prostsze. Generalnie sprowadza się do wykonywania w systematyczny sposób dwóch typów kroków redukcyjnych:

Twierdzenie o eliminacji cięcia:

Kroki redukcyjne:

Niestety w pozostałych wypadkach (cut) nie daje się wyeliminować tak prosto i zazwyczaj wymaga zastępowania jednych zastosowań (Cut) przez inne, w pewnym sensie prostsze. Generalnie sprowadza się do wykonywania w systematyczny sposób dwóch typów kroków redukcyjnych:

1. zastępujemy złożone cut-formuły przez prostsze (ich podformuły)

Twierdzenie o eliminacji cięcia:

Kroki redukcyjne:

Niestety w pozostałych wypadkach (cut) nie daje się wyeliminować tak prosto i zazwyczaj wymaga zastępowania jednych zastosowań (Cut) przez inne, w pewnym sensie prostsze. Generalnie sprowadza się do wykonywania w systematyczny sposób dwóch typów kroków redukcyjnych:

1. zastępujemy złożone cut-formuły przez prostsze (ich podformuły)
2. przesuwamy "do góry" zastosowania (cut) w dowodzie

Twierdzenie o eliminacji cięcia:

Kroki redukcyjne:

Twierdzenie o eliminacji cięcia:

Kroki redukcyjne:

1. Rozważmy następujące zastosowanie (cut) z cut-formułą $\varphi \vee \psi$, fragment dowodu o postaci:

$$\dfrac{(\Rightarrow\vee)\,\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi} \qquad \dfrac{\varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma \qquad \psi, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\varphi \vee \psi, \Pi \Rightarrow \Sigma}\,(\vee\Rightarrow)}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}\,(Cut)$$

Twierdzenie o eliminacji cięcia:

Kroki redukcyjne:

1. Rozważmy następujące zastosowanie (cut) z cut-formułą $\varphi \vee \psi$, fragment dowodu o postaci:

$$\dfrac{(\Rightarrow\vee)\,\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi} \qquad \dfrac{\varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma \qquad \psi, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\varphi \vee \psi, \Pi \Rightarrow \Sigma}\,(\vee\Rightarrow)}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}\,(Cut)$$

zostaje zastąpiony przez następujący, w którym (cut) jest zastosowane na podformule φ poprzedniej cut-formuły, co więcej jedna z gałęzi dowodu staje się zbędna:

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}\,(Cut)$$

Twierdzenie o eliminacji cięcia:

Kroki redukcyjne:

1. Rozważmy następujące zastosowanie (cut) z cut-formułą $\varphi \vee \psi$, fragment dowodu o postaci:

$$\dfrac{(\Rightarrow \vee)\,\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi} \qquad \dfrac{\varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma \qquad \psi, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\varphi \vee \psi, \Pi \Rightarrow \Sigma}\,(\vee \Rightarrow)}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}\,(Cut)$$

zostaje zastąpiony przez następujący, w którym (cut) jest zastosowane na podformule φ poprzedniej cut-formuły, co więcej jedna z gałęzi dowodu staje się zbędna:

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}\,(Cut)$$

Zauważmy, że w analizowanym wyżej fragmencie dowodu cut-formuła $\varphi \vee \psi$ w obu przesłankach (cut) pojawiła się po raz

Twierdzenie o eliminacji cięcia:

Kroki redukcyjne:

Twierdzenie o eliminacji cięcia:

Kroki redukcyjne:

2. Rozważmy następujące zastosowanie (cut) na φ, fragment dowodu o postaci:

$$(Cut)\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \dfrac{\varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma, \psi}{\varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma, \psi \vee \chi} \Rightarrow \vee)}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma, \psi \vee \chi}$$

Twierdzenie o eliminacji cięcia:

Kroki redukcyjne:

2. Rozważmy następujące zastosowanie (cut) na φ, fragment dowodu o postaci:

$$(Cut)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \dfrac{\varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma, \psi}{\varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma, \psi \vee \chi} \Rightarrow \vee)}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma, \psi \vee \chi}$$

zostaje zastąpiony przez:

$$(\Rightarrow \vee)\ \frac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma, \psi}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma, \psi}\ (Cut)}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma, \psi \vee \chi}$$

Twierdzenie o eliminacji cięcia:

Kroki redukcyjne:

2. Rozważmy następujące zastosowanie (cut) na φ, fragment dowodu o postaci:

$$(Cut)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \dfrac{\varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma, \psi}{\varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma, \psi \vee \chi} \Rightarrow \vee)}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma, \psi \vee \chi}$$

zostaje zastąpiony przez:

$$(\Rightarrow \vee)\ \frac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma, \psi}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma, \psi}\ (Cut)}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma, \psi \vee \chi}$$

Tym razem cut-formuła nie uległa zmianie ale zmniejszył się rozmiar tego fragmentu dowodu który kończył się zastosowaniem cięcia. Rozważane zastosowanie (cut) zostało "podciągnięte" do góry poprzez permutację (cut) i $(\Rightarrow \vee)$.

System LK – eliminacja cięcia:

Uwagi ogólne:

System LK – eliminacja cięcia:

Uwagi ogólne:

Gentzen wprowadziłdwie zmiany w stosunku do ogólnej idei dowodu zarysowanej w wstępie.

System LK – eliminacja cięcia:

Uwagi ogólne:

Gentzen wprowadziłdwie zmiany w stosunku do ogólnej idei dowodu zarysowanej w wstępie.

1. Ze względu na obecność kontrakcji w systemie zastąpił (Cut) przez jego uogólnioną wersję – regułę (Mix), określaną także jako (multicut).

System LK – eliminacja cięcia:

Uwagi ogólne:

Gentzen wprowadziłdwie zmiany w stosunku do ogólnej idei dowodu zarysowanej w wstępie.

1. Ze względu na obecność kontrakcji w systemie zastąpił (Cut) przez jego uogólnioną wersję – regułę (Mix), określaną także jako (multicut).
2. Zamiana (Cut) na (Mix) zmusza do wprowadzenia innej miary wielkośći dowodów przesłanek niż ich wysokość, jest nią głębokość.

System LK – eliminacja cięcia:

Reguła Mix

System LK – eliminacja cięcia:

Reguła Mix

$$(Mix)\quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta[\varphi] \qquad \Pi[\varphi] \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi_{\varphi} \Rightarrow \Delta_{\varphi}, \Sigma}$$

gdzie $\Gamma[\varphi]$ oznacza, że φ przynajmniej raz występuje w Γ, a Γ_{φ} oznacza, że z Γ usunięto wszystkie wystąpienia φ.

System LK – eliminacja cięcia:

Reguła Mix

$$(Mix)\quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta[\varphi] \qquad \Pi[\varphi] \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi_\varphi \Rightarrow \Delta_\varphi, \Sigma}$$

gdzie $\Gamma[\varphi]$ oznacza, że φ przynajmniej raz występuje w Γ, a Γ_φ oznacza, że z Γ usunięto wszystkie wystąpienia φ.

Przykład zastosowania (Mix):

$$(Mix)\quad \frac{r \wedge t, q \Rightarrow p, q \vee r, \neg s, t \qquad \neg s, q \rightarrow r, \neg s, \neg s \Rightarrow \neg q, t}{r \wedge t, q, q \rightarrow r \Rightarrow p, q \vee r, t, \neg q, t}$$

System LK – eliminacja cięcia:

Dlaczego (Cut) zostaje wymienione na (Mix)?

System LK – eliminacja cięcia:

Dlaczego (Cut) zostaje wymienione na (Mix)?

Gdyż z powodu kontrakcji nie pracuje redukcja po rozmiarze dowodu przesłanki. Rozważmy natępujące zastosowanie (Cut):

System LK – eliminacja cięcia:

Dlaczego (Cut) zostaje wymienione na (Mix)?

Gdyż z powodu kontrakcji nie pracuje redukcja po rozmiarze dowodu przesłanki. Rozważmy natępujące zastosowanie (Cut):

$$(Cut)\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \dfrac{\varphi, \varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma}\ C\Rightarrow)}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}$$

System LK – eliminacja cięcia:

Dlaczego (Cut) zostaje wymienione na (Mix)?

Gdyż z powodu kontrakcji nie pracuje redukcja po rozmiarze dowodu przesłanki. Rozważmy natępujące zastosowanie (Cut):

$$(Cut)\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \dfrac{\varphi, \varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma}\ C \Rightarrow)}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}$$

Po zastosowaniu redukcji po długości przesłanki otrzymujemy:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \varphi, \varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\varphi, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}\ (Cut)}{\Gamma, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Delta, \Sigma}\ (Cut)}{\Gamma, \Pi, \Rightarrow \Delta, \Sigma}\ (C)(P)$$

gdzie pierwsze od góry zastosowanie (Cut) ma mniejszą wysokość ale drugie ma taką samą jak (cut) w dowodzie wyjściowym (= nie udało nam się dokonać redukcji).

System LK – eliminacja cięcia:

System z (Mix) (roboczo nazwijmy go LK') jest równoważny systemowi z (Cut), tzn. $\vdash_{LK} S$ wtw $\vdash_{LK'} S$.

System LK – eliminacja cięcia:

System z (Mix) (roboczo nazwijmy go LK') jest równoważny systemowi z (Cut), tzn. $\vdash_{LK} S$ wtw $\vdash_{LK'} S$.

Dowód: Wystarczy pokazać, że (Cut) jest wyprowadzalne w LK' a (Mix) w LK. Dowolne zastosowanie (Cut) postaci:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}\ (Cut)$$

zastępujemy przez:

System LK – eliminacja cięcia:

System z (Mix) (roboczo nazwijmy go LK') jest równoważny systemowi z (Cut), tzn. $\vdash_{LK} S$ wtw $\vdash_{LK'} S$.

Dowód: Wystarczy pokazać, że (Cut) jest wyprowadzalne w LK' a (Mix) w LK. Dowolne zastosowanie (Cut) postaci:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}\,(Cut)$$

zastępujemy przez:

$$(W)(P)\,\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi_{\varphi} \Rightarrow \Delta_{\varphi}, \Sigma}\,(Mix)}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}$$

System LK – eliminacja cięcia:

System z (Mix) (roboczo nazwijmy go LK') jest równoważny systemowi z (Cut), tzn. $\vdash_{LK} S$ wtw $\vdash_{LK'} S$.

System LK – eliminacja cięcia:

System z (Mix) (roboczo nazwijmy go LK') jest równoważny systemowi z (Cut), tzn. $\vdash_{LK} S$ wtw $\vdash_{LK'} S$.

Odwrotnie, dowolne zastosowanie (Mix) postaci:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta[\varphi] \qquad \Pi[\varphi] \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi_{\varphi} \Rightarrow \Delta_{\varphi}, \Sigma}\ (Mix)$$

System LK – eliminacja cięcia:

System z (Mix) (roboczo nazwijmy go LK') jest równoważny systemowi z (Cut), tzn. $\vdash_{LK} S$ wtw $\vdash_{LK'} S$.

Odwrotnie, dowolne zastosowanie (Mix) postaci:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta[\varphi] \qquad \Pi[\varphi] \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi_\varphi \Rightarrow \Delta_\varphi, \Sigma}\,(Mix)$$

zastępujemy przez:

$$\frac{(C),(P)\,\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta[\varphi]}{\Gamma \Rightarrow \Delta_\varphi, \varphi} \qquad \dfrac{\Pi[\varphi] \Rightarrow \Sigma}{\varphi, \Pi_\varphi \Rightarrow \Sigma}\,(C),(P)}{\Gamma, \Pi_\varphi \Rightarrow \Delta_\varphi, \Sigma}\,(Cut)$$

System LK – eliminacja cięcia:

Dlaczego głębokość zamiast wysokości?

System LK – eliminacja cięcia:

Dlaczego głębokość zamiast wysokości?

przeanalizujmy następujące zastosowanie (Mix):

System LK – eliminacja cięcia:

Dlaczego głębokość zamiast wysokości?

przeanalizujmy następujące zastosowanie (Mix):

$$
(Mix)\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \varphi \wedge \psi \qquad \dfrac{\dfrac{\varphi, \psi \Rightarrow \Sigma}{\varphi \wedge \psi, \psi \Rightarrow \Sigma}\ (\wedge \Rightarrow)}{\varphi \wedge \psi, \varphi \wedge \psi \Rightarrow \Sigma}\ (P \Rightarrow)(\wedge \Rightarrow)}{\Gamma \Rightarrow \Sigma}
$$

System LK – eliminacja cięcia:

Dlaczego głębokość zamiast wysokości?

przeanalizujmy następujące zastosowanie (Mix):

$$(Mix)\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \varphi \wedge \psi \qquad \dfrac{\dfrac{\varphi, \psi \Rightarrow \Sigma}{\varphi \wedge \psi, \psi \Rightarrow \Sigma}\,(\wedge \Rightarrow)}{\varphi \wedge \psi, \varphi \wedge \psi \Rightarrow \Sigma}\,(P \Rightarrow)(\wedge \Rightarrow)}{\Gamma \Rightarrow \Sigma}$$

Po przeprowadzeniu standardowej transformacji otrzymujemy:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \varphi \wedge \psi \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \varphi \wedge \psi \qquad \dfrac{\varphi, \psi \Rightarrow \Sigma}{\varphi \wedge \psi, \psi \Rightarrow \Sigma}\,(\wedge \Rightarrow)}{\psi, \Gamma \Rightarrow \Sigma}\,(Mix)}{\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Sigma}\,(\wedge \Rightarrow)}{\Gamma, \Gamma_{\varphi} \Rightarrow \Sigma}\,(Mix)}{\Gamma \Rightarrow \Sigma}\,(C)(P)$$

gdzie wysokość dowodu prawej przesłanki drugiego zastosowania (Mix) nawet wzrosła, zatem nie otrzymaliśmy oczekiwanej redukcji.

System LK – eliminacja cięcia:

Definicja głębokości (Mix)

System LK – eliminacja cięcia:

Definicja głębokości (Mix)

Niech φ będzie cut-formułą, a $\mathcal{B}$ dowolną gałęzią zawierającą lewą przesłankę (Mix).

System LK – eliminacja cięcia:

Definicja głębokości (Mix)

Niech φ będzie cut-formułą, a $\mathcal{B}$ dowolną gałęzią zawierającą lewą przesłankę (Mix).
Rank($\mathcal{B}$) to ilość węzłów w tej gałęzi, w których występuje φ i które są nad wnioskiem (Mix).

System LK – eliminacja cięcia:

Definicja głębokości (Mix)

Niech φ będzie cut-formułą, a $\mathcal{B}$ dowolną gałęzią zawierającą lewą przesłankę (Mix).
Rank($\mathcal{B}$) to ilość węzłów w tej gałęzi, w których występuje φ i które są nad wnioskiem (Mix).
L-rank(φ) to maksymalna wartość rank($\mathcal{B}$), gdzie $\mathcal{B}$ to dowolna z gałęzi zawierających lewą przesłanką (Mix).

System LK – eliminacja cięcia:

Definicja głębokości (Mix)

Niech φ będzie cut-formułą, a $\mathcal{B}$ dowolną gałęzią zawierającą lewą przesłankę (Mix).
Rank($\mathcal{B}$) to ilość węzłów w tej gałęzi, w których występuje φ i które są nad wnioskiem (Mix).
L-rank(φ) to maksymalna wartość rank($\mathcal{B}$), gdzie $\mathcal{B}$ to dowolna z gałęzi zawierających lewą przesłanką (Mix).
R-rank(φ) definiujemy analogicznie ale dla prawej przesłanki.

System LK – eliminacja cięcia:

Definicja głębokości (Mix)

Niech φ będzie cut-formułą, a $\mathcal{B}$ dowolną gałęzią zawierającą lewą przesłankę (Mix).
Rank($\mathcal{B}$) to ilość węzłów w tej gałęzi, w których występuje φ i które są nad wnioskiem (Mix).
L-rank(φ) to maksymalna wartość rank($\mathcal{B}$), gdzie $\mathcal{B}$ to dowolna z gałęzi zawierających lewą przesłanką (Mix).
R-rank(φ) definiujemy analogicznie ale dla prawej przesłanki.
Rank(φ)=L-rank(φ)+R-rank(φ).

System LK – eliminacja cięcia:

Definicja głębokości (Mix)

Niech φ będzie cut-formułą, a $\mathcal{B}$ dowolną gałęzią zawierającą lewą przesłankę (Mix).
Rank($\mathcal{B}$) to ilość węzłów w tej gałęzi, w których występuje φ i które są nad wnioskiem (Mix).
L-rank(φ) to maksymalna wartość rank($\mathcal{B}$), gdzie $\mathcal{B}$ to dowolna z gałęzi zawierających lewą przesłanką (Mix).
R-rank(φ) definiujemy analogicznie ale dla prawej przesłanki.
Rank(φ)=L-rank(φ)+R-rank(φ).
Głębokość danego zastosowania (Mix) to rank jego cut-formuły.

System LK – eliminacja cięcia:

Dowód Gentzena

Klasyczna wersja dowodu, przedstawiona przez Gentzena, zawiera potrójną indukcję:

System LK – eliminacja cięcia:

Dowód Gentzena

Klasyczna wersja dowodu, przedstawiona przez Gentzena, zawiera potrójną indukcję:

1. po ilości wystąpień cięcia w dowodzie;

System LK – eliminacja cięcia:

Dowód Gentzena

Klasyczna wersja dowodu, przedstawiona przez Gentzena, zawiera potrójną indukcję:

1. po ilości wystąpień cięcia w dowodzie;
2. po długości cut-formuły (parametr ten określany jest przez Gentzena jako grade);

System LK – eliminacja cięcia:

Dowód Gentzena

Klasyczna wersja dowodu, przedstawiona przez Gentzena, zawiera potrójną indukcję:

1. po ilości wystąpień cięcia w dowodzie;
2. po długości cut-formuły (parametr ten określany jest przez Gentzena jako grade);
3. po głębokości (Mix) tj. ilości sekwentów zawierających cut-formułę i występujących nad sekwentem wnioskiem tego zastosowania (Mix) (parametr ten określany jest przez Gentzena jako rank).

System LK – eliminacja cięcia:

Dowód Gentzena – schemat ogólny:

System LK – eliminacja cięcia:

Dowód Gentzena – schemat ogólny:

I. Indukcja po ilości (Mix)

1.1. Baza: W dowodzie z jednym (Mix), jest on eliminowalny

II. Indukcja po głębokości cut-formuły

III. Indukcja po długości cut-formuły

Wniosek z III: (Mix) o głębokości 2 na cut-formule o dowolnej długości jest eliminowalny

Wniosek z II: (Mix) o dowolnej głębokości jest eliminowalny

1.2. Krok indukcyjny: Jeżeli (Mix) jest eliminowalny w dowodzie, w którym występuje $k < n$ razy, to jest eliminowalny w dowodzie, w którym występuje n razy

Wniosek z 1.1., 1.2: (Mix) jest eliminowalne w każdym dowodzie

System LK – eliminacja cięcia:

Dowód Gentzena – schemat trochę mniej ogólny:

System LK – eliminacja cięcia:

Dowód Gentzena – schemat trochę mniej ogólny:

I. Indukcja po ilości (Mix)

1.1. Baza: W dowodzie z jednym (Mix), jest on eliminowalny

II. Indukcja po głębokości cut-formuły

2.1. Baza: (Mix) o głębokości 2 jest eliminowalny

III. Indukcja po długości cut-formuły

3.1. Baza: (Mix) na cut-formule o długości 0 jest eliminowalny

3.2. Krok indukcyjny: Jeżeli (Mix) na cut-formule o długości $k < n$ jest eliminowalny, to jest też eliminowalny na cut-formule o długości n

Wniosek z 3.1., 3.2: (Mix) o głębokości 2 na cut-formule o dowolnej długości jest eliminowalny

2.2. Krok indukcyjny: Jeżeli (Mix) głębokości $k < n$ jest eliminowalny, to (Mix) o głębokości n jest eliminowalny

Wniosek z 2.1., 2.2: (Mix) o dowolnej głębokości jest eliminowalny

System LK – eliminacja cięcia:

Dowód Gentzena – krok indukcyjny 1.2.:

System LK – eliminacja cięcia:

Dowód Gentzena – krok indukcyjny 1.2.:

Aby pokazać, że dla dowodu twierdzenia o eliminacji, wystarczy dowiedzenie bazy indukcji I (czyli krok 1.1. w powyższym schemacie). Zazwyczaj podaje się go jako osobny lemat:

System LK – eliminacja cięcia:

Dowód Gentzena – krok indukcyjny 1.2.:

Aby pokazać, że dla dowodu twierdzenia o eliminacji, wystarczy dowiedzenie bazy indukcji I (czyli krok 1.1. w powyższym schemacie). Zazwyczaj podaje się go jako osobny lemat:

Lemat: Dowód, w którym (Mix) występuje tylko raz jako jego ostatnia reguła można przekształcić w dowód nie zawierający żadnego zastosowania (Mix).

System LK – eliminacja cięcia:

Dowód Gentzena – krok indukcyjny 1.2.:

Aby pokazać, że dla dowodu twierdzenia o eliminacji, wystarczy dowiedzenie bazy indukcji I (czyli krok 1.1. w powyższym schemacie). Zazwyczaj podaje się go jako osobny lemat:
Lemat: Dowód, w którym (Mix) występuje tylko raz jako jego ostatnia reguła można przekształcić w dowód nie zawierający żadnego zastosowania (Mix).
Wykazanie, że podany wyżej lemat implikuje ogólne twierdzenie o eliminacji jest trywialne. W dowolnym dowodzie z wieloma zastosowaniami (Mix) ($n \geq 2$) wybieramy takie, nad którym nie występuje inne zastosowanie tej reguły (może być ich kilka). Poddowód, który kończy się tym zastosowaniem (Mix) spełnia warunki lematu, zatem można go w rozważanym dowodzie wymienić na taki poddowód, który już żadnego zastosowania (Mix) nie posiada. Ilość zastosowań (Mix) w nowym dowodzie wynosi $n - 1$ zatem podpada pod założenia indukcyjne kroku 1.2.

System LK – eliminacja cięcia:

Baza indukcji II (rank=2), Indukcja III:

W bazie indukcji III (P. 3.1. długość = 0) eliminacja (Cut) jest całkowita przez Fakt1.

- Wykazujemy, że (Mix) na formule o długości n jest eliminowalny lub zastępowalny przez zastosowania (Mix) na formułach krótszych.

System LK – eliminacja cięcia:

Baza indukcji II (rank=2), Indukcja III:

W bazie indukcji III (P. 3.1. długość = 0) eliminacja (Cut) jest całkowita przez Fakt1.

- Wykazujemy, że (Mix) na formule o długości n jest eliminowalny lub zastępowalny przez zastosowania (Mix) na formułach krótszych.
- W przypadku gdy jedna z przesłanek jest aksjomatem lub otrzymana przez (W) jest eliminowalny całkowicie przez Fakt1, analogicznie jak w P. 3.1.

System LK – eliminacja cięcia:

Baza indukcji II (rank=2), Indukcja III:

W bazie indukcji III (P. 3.1. długość = 0) eliminacja (Cut) jest całkowita przez Fakt1.

- Wykazujemy, że (Mix) na formule o długości n jest eliminowalny lub zastępowalny przez zastosowania (Mix) na formułach krótszych.
- W przypadku gdy jedna z przesłanek jest aksjomatem lub otrzymana przez (W) jest eliminowalny całkowicie przez Fakt1, analogicznie jak w P. 3.1.
- Zostają przypadki gdzie cut-formuła jest otrzymana przez regułę logiczną w obu przesłankach.

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.1. rank=2, P. 3.2. Zał. ind.: (Mix) na formule o długości $< n$ jest eliminowalny.

a) Przypadek gdy cut-formuła $:= \varphi \land \psi$: frg. dowodu postaci:

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.1. rank=2, P. 3.2. Zał. ind.: (Mix) na formule o długości $< n$ jest eliminowalny.

a) Przypadek gdy cut-formuła $:= \varphi \wedge \psi$: frg. dowodu postaci:

$$
(Mix)\ \dfrac{(\Rightarrow \wedge)\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi} \qquad \dfrac{\varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\varphi \wedge \psi, \Pi \Rightarrow \Sigma}\ (\wedge \Rightarrow)}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}
$$

zostaje zastąpiony przez:

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.1. rank=2, P. 3.2. Zał. ind.: (Mix) na formule o długości $< n$ jest eliminowalny.

a) Przypadek gdy cut-formuła $:= \varphi \wedge \psi$: frg. dowodu postaci:

$$\dfrac{(\Rightarrow\wedge)\,\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi} \qquad \dfrac{\varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\varphi \wedge \psi, \Pi \Rightarrow \Sigma}\,(\wedge\Rightarrow)}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}\,(Mix)$$

zostaje zastąpiony przez:

$$(W)(P)\,\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi_\varphi \Rightarrow \Delta_\varphi, \Sigma}\,(Mix)}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}$$

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.1. rank=2, P. 3.2. Zał. ind.: (Mix) na formule o długości $< n$ jest eliminowalny.

a) Przypadek gdy cut-formuła $:= \varphi \wedge \psi$: frg. dowodu postaci:

$$\dfrac{(\Rightarrow\wedge)\,\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi} \qquad \dfrac{\varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\varphi \wedge \psi, \Pi \Rightarrow \Sigma}\,(\wedge\Rightarrow)}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}\,(Mix)$$

zostaje zastąpiony przez:

$$(W)(P)\,\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi_\varphi \Rightarrow \Delta_\varphi, \Sigma}\,(Mix)}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}$$

analogicznie dla $(\wedge\Rightarrow)$ na ψ oraz dla $\vee$ i $\neg$

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.1. rank=2, P. 3.2. Zał. ind.: jw.

b) Przypadek gdy cut-formuła := $\varphi \to \psi$: frg. dowodu postaci:

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.1. rank=2, P. 3.2. Zał. ind.: jw.

b) Przypadek gdy cut-formuła $:= \varphi \to \psi$: frg. dowodu postaci:

$$\dfrac{(\Rightarrow\to)\,\dfrac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \to \psi} \qquad \dfrac{\Pi \Rightarrow \Sigma, \varphi \qquad \psi, \Lambda \Rightarrow \Xi}{\varphi \to \psi, \Pi, \Lambda \Rightarrow \Sigma, \Xi}\,(\to\Rightarrow)}{\Gamma, \Pi, \Lambda \Rightarrow \Delta, \Sigma, \Xi}\,(Mix)$$

zostaje zastąpiony przez:

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.1. rank=2, P. 3.2. Zał. ind.: jw.

b) Przypadek gdy cut-formuła := $\varphi \to \psi$: frg. dowodu postaci:

$$\dfrac{(\Rightarrow\to)\,\dfrac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \to \psi} \qquad \dfrac{\Pi \Rightarrow \Sigma, \varphi \qquad \psi, \Lambda \Rightarrow \Xi}{\varphi \to \psi, \Pi, \Lambda \Rightarrow \Sigma, \Xi}\,(\to\Rightarrow)}{\Gamma, \Pi, \Lambda \Rightarrow \Delta, \Sigma, \Xi}\,(Mix)$$

zostaje zastąpiony przez:

$$\dfrac{\dfrac{\Pi \Rightarrow \Sigma, \varphi \qquad \dfrac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \qquad \psi, \Lambda \Rightarrow \Xi}{\varphi, \Gamma, \Lambda_{\psi} \Rightarrow \Delta_{\psi}, \Xi}\,(Mix)}{\Pi, \Gamma_{\varphi}, \Lambda_{\psi,\varphi} \Rightarrow \Sigma_{\varphi}, \Delta_{\psi}, \Xi}\,(Mix)}{\Gamma, \Pi, \Lambda \Rightarrow \Delta, \Sigma, \Xi}\,(W)(P)$$

gdzie $\Lambda_{\psi,\varphi}$ oznacza Λ bez wystąpień ψ i φ.

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: (Mix) o głębokości $< n$ jest eliminowalny.

Dowodzimy, że każdy (Mix) o głębokości $= n$ można zastąpić zastosowaniami (Mix) o mniejszej głębokości.

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: (Mix) o głębokości $< n$ jest eliminowalny.

Dowodzimy, że każdy (Mix) o głębokości $= n$ można zastąpić zastosowaniami (Mix) o mniejszej głębokości.
Dowód ma dwie części:

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: (Mix) o głębokości $< n$ jest eliminowalny.

Dowodzimy, że każdy (Mix) o głębokości $= n$ można zastąpić zastosowaniami (Mix) o mniejszej głębokości.
Dowód ma dwie części:
A. Zakładamy, że R-rank> 1 i rozważamy różne przypadki, które doprowadziły do dedukcji prawej przesłanki (Mix)

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: (Mix) o głębokości $< n$ jest eliminowalny.

Dowodzimy, że każdy (Mix) o głębokości $= n$ można zastąpić zastosowaniami (Mix) o mniejszej głębokości.
Dowód ma dwie części:
A. Zakładamy, że R-rank> 1 i rozważamy różne przypadki, które doprowadziły do dedukcji prawej przesłanki (Mix)
B. Zakładamy, że L-rank> 1 i rozważamy różne przypadki, które doprowadziły do dedukcji lewej przesłanki (Mix)

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: (Mix) o głębokości $< n$ jest eliminowalny.

Dowodzimy, że każdy (Mix) o głębokości $= n$ można zastąpić zastosowaniami (Mix) o mniejszej głębokości.
Dowód ma dwie części:
A. Zakładamy, że R-rank> 1 i rozważamy różne przypadki, które doprowadziły do dedukcji prawej przesłanki (Mix)
B. Zakładamy, że L-rank> 1 i rozważamy różne przypadki, które doprowadziły do dedukcji lewej przesłanki (Mix)
W każdej części należy rozważyć sytuacje, gdy cut-formuła jest:

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: (Mix) o głębokości $< n$ jest eliminowalny.

Dowodzimy, że każdy (Mix) o głębokości $= n$ można zastąpić zastosowaniami (Mix) o mniejszej głębokości.
Dowód ma dwie części:
A. Zakładamy, że R-rank> 1 i rozważamy różne przypadki, które doprowadziły do dedukcji prawej przesłanki (Mix)
B. Zakładamy, że L-rank> 1 i rozważamy różne przypadki, które doprowadziły do dedukcji lewej przesłanki (Mix)
W każdej części należy rozważyć sytuacje, gdy cut-formuła jest:
– parametryczna

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: (Mix) o głębokości $< n$ jest eliminowalny.

Dowodzimy, że każdy (Mix) o głębokości $= n$ można zastąpić zastosowaniami (Mix) o mniejszej głębokości.
Dowód ma dwie części:
A. Zakładamy, że R-rank> 1 i rozważamy różne przypadki, które doprowadziły do dedukcji prawej przesłanki (Mix)
B. Zakładamy, że L-rank> 1 i rozważamy różne przypadki, które doprowadziły do dedukcji lewej przesłanki (Mix)
W każdej części należy rozważyć sytuacje, gdy cut-formuła jest:
– parametryczna
– przesłankowa (zastosowanej reguły)

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: (Mix) o głębokości $< n$ jest eliminowalny.

Dowodzimy, że każdy (Mix) o głębokości $= n$ można zastąpić zastosowaniami (Mix) o mniejszej głębokości.
Dowód ma dwie części:
A. Zakładamy, że R-rank> 1 i rozważamy różne przypadki, które doprowadziły do dedukcji prawej przesłanki (Mix)
B. Zakładamy, że L-rank> 1 i rozważamy różne przypadki, które doprowadziły do dedukcji lewej przesłanki (Mix)
W każdej części należy rozważyć sytuacje, gdy cut-formuła jest:
– parametryczna
– przesłankowa (zastosowanej reguły)
– zasadnicza

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: (Mix) o głębokości $< n$ jest eliminowalny.

Dowodzimy, że każdy (Mix) o głębokości $= n$ można zastąpić zastosowaniami (Mix) o mniejszej głębokości.
Dowód ma dwie części:
A. Zakładamy, że R-rank> 1 i rozważamy różne przypadki, które doprowadziły do dedukcji prawej przesłanki (Mix)
B. Zakładamy, że L-rank> 1 i rozważamy różne przypadki, które doprowadziły do dedukcji lewej przesłanki (Mix)
W każdej części należy rozważyć sytuacje, gdy cut-formuła jest:
– parametryczna
– przesłankowa (zastosowanej reguły)
– zasadnicza
i wziąć pod uwagę wszystkie możliwe reguły.

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: (Mix) o głębokości $< n$ jest eliminowalny.

A. Zakładamy, że R-rank> 1

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: (Mix) o głębokości $< n$ jest eliminowalny.

A. Zakładamy, że R-rank> 1

a) przypadki gdy cut-formuła jest parametrem a prawa przesłanka jest otrzymana przez regułę działającą tylko na następniku:

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: (Mix) o głębokości $< n$ jest eliminowalny.

A. Zakładamy, że R-rank> 1

a) przypadki gdy cut-formuła jest parametrem a prawa przesłanka jest otrzymana przez regułę działającą tylko na następniku: 1-przesłankowe reguły, np. przypadek $(\Rightarrow \vee)$

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: (Mix) o głębokości $< n$ jest eliminowalny.

A. Zakładamy, że R-rank> 1

a) przypadki gdy cut-formuła jest parametrem a prawa przesłanka jest otrzymana przez regułę działającą tylko na następniku:
1-przesłankowe reguły, np. przypadek $(\Rightarrow \vee)$
fragment dowodu o postaci:

$$(Mix)\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta[\varphi] \qquad \dfrac{\Pi[\varphi] \Rightarrow \Sigma, \psi}{\Pi[\varphi] \Rightarrow \Sigma, \psi \vee \chi} \Rightarrow \vee)}{\Gamma, \Pi_\varphi \Rightarrow \Delta_\varphi, \Sigma, \psi \vee \chi}$$

zostaje zastąpiony przez:

$$(\Rightarrow \vee)\ \dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta[\varphi] \qquad \Pi[\varphi] \Rightarrow \Sigma, \psi}{\Gamma, \Pi_\varphi \Rightarrow \Delta_\varphi, \Sigma, \psi}\ (Mix)}{\Gamma, \Pi_\varphi \Rightarrow \Delta_\varphi, \Sigma, \psi \vee \chi}$$

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: (Mix) o głębokości $< n$ jest eliminowalny.

2-przesłankowe reguły – tylko ($\Rightarrow \wedge$):

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: (Mix) o głębokości $< n$ jest eliminowalny.

2-przesłankowe reguły – tylko $(\Rightarrow \wedge)$:
fragment dowodu o postaci:

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta[\varphi] \qquad \dfrac{\Pi[\varphi] \Rightarrow \Sigma, \psi \qquad \Pi[\varphi] \Rightarrow \Sigma, \chi}{\Pi[\varphi] \Rightarrow \Sigma, \psi \wedge \chi}\,(\Rightarrow \wedge)}{\Gamma, \Pi_\varphi \Rightarrow \Delta_\varphi, \Sigma, \psi \wedge \chi}\,(Mix)$$

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: (Mix) o głębokości $< n$ jest eliminowalny.

2-przesłankowe reguły – tylko $(\Rightarrow \wedge)$:
fragment dowodu o postaci:

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta[\varphi] \qquad \dfrac{\Pi[\varphi] \Rightarrow \Sigma, \psi \qquad \Pi[\varphi] \Rightarrow \Sigma, \chi}{\Pi[\varphi] \Rightarrow \Sigma, \psi \wedge \chi}\,(\Rightarrow \wedge)}{\Gamma, \Pi_\varphi \Rightarrow \Delta_\varphi, \Sigma, \psi \wedge \chi}\,(Mix)$$

zostaje zastąpiony przez:

$$\dfrac{(Mix)\,\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta[\varphi] \qquad \Pi[\varphi] \Rightarrow \Sigma, \psi}{\Gamma, \Pi_\varphi \Rightarrow \Delta_\varphi, \Sigma, \psi} \qquad \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta[\varphi] \qquad \Pi[\varphi] \Rightarrow \Sigma, \chi}{\Gamma, \Pi_\varphi \Rightarrow \Delta_\varphi, \Sigma, \chi}\,(Mix)}{\Gamma, \Pi_\varphi \Rightarrow \Delta_\varphi, \Sigma, \psi \wedge \chi}\,(\Rightarrow \wedge)$$

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: (Mix) o głębokości $< n$ jest eliminowalny.

b) przypadki gdy cut-formuła jest parametrem a prawa przesłanka jest otrzymana przez regułę działającą tylko na poprzedniku:

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: (Mix) o głębokości $< n$ jest eliminowalny.

b) przypadki gdy cut-formuła jest parametrem a prawa przesłanka jest otrzymana przez regułę działającą tylko na poprzedniku: przypadek $(\wedge \Rightarrow)$ – frg. dowodu postaci:

$$(Mix)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta[\varphi] \qquad \dfrac{\psi, \Pi[\varphi] \Rightarrow \Sigma}{\psi \wedge \chi, \Pi[\varphi] \Rightarrow \Sigma}\ \wedge \Rightarrow)}{\Gamma, \psi \wedge \chi, \Pi_\varphi \Rightarrow \Delta_\varphi, \Sigma}$$

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: (Mix) o głębokości $< n$ jest eliminowalny.

b) przypadki gdy cut-formuła jest parametrem a prawa przesłanka jest otrzymana przez regułę działającą tylko na poprzedniku: przypadek ($\wedge \Rightarrow$) – frg. dowodu postaci:

$$(Mix)\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta[\varphi] \qquad \dfrac{\psi, \Pi[\varphi] \Rightarrow \Sigma}{\psi \wedge \chi, \Pi[\varphi] \Rightarrow \Sigma}\ \wedge \Rightarrow)}{\Gamma, \psi \wedge \chi, \Pi_\varphi \Rightarrow \Delta_\varphi, \Sigma}$$

zostaje zastąpiony przez:

$$(\Rightarrow \vee)(P \Rightarrow)\ \dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta[\varphi] \qquad \psi, \Pi[\varphi] \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \psi, \Pi_\varphi \Rightarrow \Delta_\varphi, \Sigma}\ (Mix)}{\Gamma, \psi \wedge \chi, \Pi_\varphi \Rightarrow \Delta_\varphi, \Sigma}$$

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: (Mix) o głębokości $< n$ jest eliminowalny.

b) przypadki gdy cut-formuła jest parametrem a prawa przesłanka jest otrzymana przez regułę działającą tylko na poprzedniku: przypadek $(\wedge \Rightarrow)$ – frg. dowodu postaci:

$$(Mix)\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta[\varphi] \qquad \dfrac{\psi, \Pi[\varphi] \Rightarrow \Sigma}{\psi \wedge \chi, \Pi[\varphi] \Rightarrow \Sigma} \wedge \Rightarrow)}{\Gamma, \psi \wedge \chi, \Pi_\varphi \Rightarrow \Delta_\varphi, \Sigma}$$

zostaje zastąpiony przez:

$$(\Rightarrow \vee)(P \Rightarrow)\ \dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta[\varphi] \qquad \psi, \Pi[\varphi] \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \psi, \Pi_\varphi \Rightarrow \Delta_\varphi, \Sigma}\ (Mix)}{\Gamma, \psi \wedge \chi, \Pi_\varphi \Rightarrow \Delta_\varphi, \Sigma}$$

analogicznie dla $(W \Rightarrow)$, $(C \Rightarrow)$, $(P \Rightarrow)$ a dla 2-przesłankowej $(\vee \Rightarrow)$ analogicznie do $(\Rightarrow \wedge)$ w a).

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: (Mix) o głębokości $< n$ jest eliminowalny.

c) przypadki gdy cut-formuła jest parametrem a prawa przesłanka jest otrzymana przez regułę działającą na obu stronach sekwentu:

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: (Mix) o głębokości $< n$ jest eliminowalny.

c) przypadki gdy cut-formuła jest parametrem a prawa przesłanka jest otrzymana przez regułę działającą na obu stronach sekwentu: przypadek $(\Rightarrow\rightarrow)$ – frg. dowodu postaci:

$$(Mix)\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta[\varphi] \qquad \dfrac{\psi, \Pi[\varphi] \Rightarrow \Sigma, \chi}{\Pi[\varphi] \Rightarrow \Sigma, \psi \rightarrow \chi}\,(\Rightarrow\rightarrow)}{\Gamma, \Pi_{\varphi} \Rightarrow \Delta_{\varphi}, \Sigma, \psi \rightarrow \chi}$$

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: (Mix) o głębokości $< n$ jest eliminowalny.

c) przypadki gdy cut-formuła jest parametrem a prawa przesłanka jest otrzymana przez regułę działającą na obu stronach sekwentu: przypadek $(\Rightarrow\rightarrow)$ – frg. dowodu postaci:

$$(Mix)\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta[\varphi] \qquad \dfrac{\psi, \Pi[\varphi] \Rightarrow \Sigma, \chi}{\Pi[\varphi] \Rightarrow \Sigma, \psi \rightarrow \chi}\,(\Rightarrow\rightarrow)}{\Gamma, \Pi_\varphi \Rightarrow \Delta_\varphi, \Sigma, \psi \rightarrow \chi}$$

zostaje zastąpiony przez:

$$(\Rightarrow\rightarrow)(P\Rightarrow)\ \dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta[\varphi] \qquad \psi, \Pi[\varphi] \Rightarrow \Sigma, \chi}{\Gamma, \psi, \Pi_\varphi \Rightarrow \Delta_\varphi, \Sigma, \chi}\,(Mix)}{\Gamma, \Pi_\varphi \Rightarrow \Delta_\varphi, \Sigma, \psi \rightarrow \chi}$$

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: (Mix) o głębokości $< n$ jest eliminowalny.

c) przypadki gdy cut-formuła jest parametrem a prawa przesłanka jest otrzymana przez regułę działającą na obu stronach sekwentu: przypadek $(\Rightarrow\to)$ – frg. dowodu postaci:

$$(Mix)\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta[\varphi] \qquad \dfrac{\psi, \Pi[\varphi] \Rightarrow \Sigma, \chi}{\Pi[\varphi] \Rightarrow \Sigma, \psi \to \chi}\ (\Rightarrow\to)}{\Gamma, \Pi_\varphi \Rightarrow \Delta_\varphi, \Sigma, \psi \to \chi}$$

zostaje zastąpiony przez:

$$(\Rightarrow\to)(P\Rightarrow)\ \dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta[\varphi] \qquad \psi, \Pi[\varphi] \Rightarrow \Sigma, \chi}{\Gamma, \psi, \Pi_\varphi \Rightarrow \Delta_\varphi, \Sigma, \chi}\ (Mix)}{\Gamma, \Pi_\varphi \Rightarrow \Delta_\varphi, \Sigma, \psi \to \chi}$$

analogicznie dla $(\neg \Rightarrow)$, $(\Rightarrow \neg)$

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: (Mix) o głębokości $< n$ jest eliminowalny.

2-przesłankowe reguły – tylko ($\rightarrow\Rightarrow$): frg. dowodu postaci:

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: (Mix) o głębokości $< n$ jest eliminowalny.

2-przesłankowe reguły – tylko $(\rightarrow\Rightarrow)$: frg. dowodu postaci:

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta[\varphi] \qquad \dfrac{\Pi[\varphi] \Rightarrow \Sigma, \psi \qquad \chi, \Lambda[\varphi] \Rightarrow \Xi}{\psi \rightarrow \chi, \Pi[\varphi], \Lambda[\varphi] \Rightarrow \Sigma, \Xi}\,(\rightarrow\Rightarrow)}{\Gamma, \psi \rightarrow \chi, \Pi_\varphi, \Lambda_\varphi \Rightarrow \Delta_\varphi, \Sigma, \Xi}\,(Mix)$$

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: (Mix) o głębokości $< n$ jest eliminowalny.

2-przesłankowe reguły – tylko $(\to\Rightarrow)$: frg. dowodu postaci:

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta[\varphi] \qquad \dfrac{\Pi[\varphi] \Rightarrow \Sigma, \psi \qquad \chi, \Lambda[\varphi] \Rightarrow \Xi}{\psi \to \chi, \Pi[\varphi], \Lambda[\varphi] \Rightarrow \Sigma, \Xi}\,(\to\Rightarrow)}{\Gamma, \psi \to \chi, \Pi_\varphi, \Lambda_\varphi \Rightarrow \Delta_\varphi, \Sigma, \Xi}\,(Mix)$$

zostaje zastąpiony przez:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta[\varphi] \qquad \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta[\varphi] \qquad \chi, \Lambda[\varphi] \Rightarrow \Xi}{\Gamma, \chi, \Lambda_\varphi \Rightarrow \Delta_\varphi, \Xi}\,(Mix)}{}\quad}{}}{} $$

$$\dfrac{\dfrac{(Mix)\,\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta[\varphi] \qquad \Pi[\varphi] \Rightarrow \Sigma, \psi}{\Gamma, \Pi_\varphi \Rightarrow \Delta_\varphi, \Sigma, \psi} \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta[\varphi] \qquad \chi, \Lambda[\varphi] \Rightarrow \Xi}{\Gamma, \chi, \Lambda_\varphi \Rightarrow \Delta_\varphi, \Xi}\,(Mix)}{\chi, \Gamma, \Lambda_\varphi \Rightarrow \Delta_\varphi, \Xi}\,(P\Rightarrow)}{\psi \to \chi, \Gamma, \Pi_\varphi, \Gamma, \Lambda_\varphi \Rightarrow \Delta_\varphi, \Sigma, \Delta_\varphi, \Xi}\,(\to\Rightarrow)}{\Gamma, \psi \to \chi, \Pi_\varphi, \Lambda_\varphi \Rightarrow \Delta_\varphi, \Sigma, \Xi}\,(P), (C)$$

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: (Mix) o głębokości $< n$ jest eliminowalny.

d) przypadki gdy cut-formuła jest formułą przesłankową reguły zastosowanej do prawego sekwentu-przesłanki:

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: (Mix) o głębokości $< n$ jest eliminowalny.

d) przypadki gdy cut-formuła jest formułą przesłankową reguły zastosowanej do prawego sekwentu-przesłanki:
przypadek ($\Rightarrow\rightarrow$) – fragment dowodu o postaci:

$$(Mix)\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta[\varphi] \qquad \dfrac{\varphi, \Pi[\varphi] \Rightarrow \Sigma, \psi}{\Pi[\varphi] \Rightarrow \Sigma, \varphi \rightarrow \psi}\ (\Rightarrow\rightarrow)}{\Gamma, \Pi_\varphi \Rightarrow \Delta_\varphi, \Sigma, \varphi \rightarrow \psi}$$

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: (Mix) o głębokości $< n$ jest eliminowalny.

d) przypadki gdy cut-formuła jest formułą przesłankową reguły zastosowanej do prawego sekwentu-przesłanki:
przypadek $(\Rightarrow\rightarrow)$ – fragment dowodu o postaci:

$$(Mix)\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta[\varphi] \qquad \dfrac{\varphi, \Pi[\varphi] \Rightarrow \Sigma, \psi}{\Pi[\varphi] \Rightarrow \Sigma, \varphi \rightarrow \psi}\ (\Rightarrow\rightarrow)}{\Gamma, \Pi_\varphi \Rightarrow \Delta_\varphi, \Sigma, \varphi \rightarrow \psi}$$

zostaje zastąpiony przez:

$$(\Rightarrow\rightarrow)\ \dfrac{(W\Rightarrow)\ \dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta[\varphi] \qquad \varphi, \Pi[\varphi] \Rightarrow \Sigma, \psi}{\Gamma, \Pi_\varphi \Rightarrow \Delta_\varphi, \Sigma, \psi}\ (Mix)}{\varphi, \Gamma, \Pi_\varphi \Rightarrow \Delta_\varphi, \Sigma, \psi}}{\Gamma, \Pi_\varphi \Rightarrow \Delta_\varphi, \Sigma, \varphi \rightarrow \psi}$$

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: (Mix) o głębokości $< n$ jest eliminowalny.

d) przypadki gdy cut-formuła jest formułą przesłankową reguły zastosowanej do prawego sekwentu-przesłanki:
przypadek $(\Rightarrow\rightarrow)$ – fragment dowodu o postaci:

$$(Mix)\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta[\varphi] \qquad \dfrac{\varphi, \Pi[\varphi] \Rightarrow \Sigma, \psi}{\Pi[\varphi] \Rightarrow \Sigma, \varphi \rightarrow \psi}\ (\Rightarrow\rightarrow)}{\Gamma, \Pi_\varphi \Rightarrow \Delta_\varphi, \Sigma, \varphi \rightarrow \psi}$$

zostaje zastąpiony przez:

$$(\Rightarrow\rightarrow)\ \dfrac{(W\Rightarrow)\ \dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta[\varphi] \qquad \varphi, \Pi[\varphi] \Rightarrow \Sigma, \psi}{\Gamma, \Pi_\varphi \Rightarrow \Delta_\varphi, \Sigma, \psi}\ (Mix)}{\varphi, \Gamma, \Pi_\varphi \Rightarrow \Delta_\varphi, \Sigma, \psi}}{\Gamma, \Pi_\varphi \Rightarrow \Delta_\varphi, \Sigma, \varphi \rightarrow \psi}$$

analogicznie dla pozostałych reguł 1-przesłankowych.

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: (Mix) o głębokości $< n$ jest eliminowalny.

2-przesłankowe reguły: przypadek ($\rightarrow\Rightarrow$) – frg. dowodu o postaci:

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: (Mix) o głębokości $< n$ jest eliminowalny.

2-przesłankowe reguły: przypadek ($\rightarrow\Rightarrow$) – frg. dowodu o postaci:

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta[\varphi] \qquad \dfrac{\Pi \Rightarrow \Sigma, \psi \qquad \varphi, \Lambda \Rightarrow \Xi}{\psi \rightarrow \varphi, \Pi, \Lambda \Rightarrow \Sigma, \Xi}\,(\rightarrow\Rightarrow)}{\Gamma, \psi \rightarrow \varphi, \Pi_\varphi, \Lambda_\varphi \Rightarrow \Delta_\varphi, \Sigma, \Xi}\,(Mix)$$

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: (Mix) o głębokości $<$ *n* jest eliminowalny.

2-przesłankowe reguły: przypadek $(\rightarrow\Rightarrow)$ – frg. dowodu o postaci:

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta[\varphi] \qquad \dfrac{\Pi \Rightarrow \Sigma, \psi \qquad \varphi, \Lambda \Rightarrow \Xi}{\psi \rightarrow \varphi, \Pi, \Lambda \Rightarrow \Sigma, \Xi}\,(\rightarrow\Rightarrow)}{\Gamma, \psi \rightarrow \varphi, \Pi_\varphi, \Lambda_\varphi \Rightarrow \Delta_\varphi, \Sigma, \Xi}\,(Mix)$$

jeżeli φ nie jest w Π ($\Pi_\varphi = \Pi$), to zostaje zastąpiony przez:

$$\dfrac{\dfrac{\Pi \Rightarrow \Sigma, \psi \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta[\varphi] \qquad \Lambda[\varphi] \Rightarrow \Xi}{\Gamma, \Lambda_\varphi, \Rightarrow \Delta_\varphi, \Xi}\,(Mix)}{\varphi, \Gamma, \Lambda_\varphi, \Rightarrow \Delta_\varphi, \Xi}\,(W\Rightarrow)}{\psi \rightarrow \varphi, \Pi, \Gamma, \Lambda_\varphi \Rightarrow \Sigma, \Delta_\varphi, \Xi}\,(\rightarrow\Rightarrow)}{\Gamma, \psi \rightarrow \varphi, \Pi_\varphi, \Lambda_\varphi \Rightarrow \Delta_\varphi, \Sigma, \Xi}\,(P)$$

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: (Mix) o głębokości $< n$ jest eliminowalny.

jeżeli φ jest w Π, to zostaje zastąpiony przez:

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: (Mix) o głębokości $< n$ jest eliminowalny.

jeżeli φ jest w Π, to zostaje zastąpiony przez:

$$\dfrac{(Mix)\,\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta[\varphi] \qquad \Pi[\varphi] \Rightarrow \Sigma, \psi}{\Gamma, \Pi_\varphi \Rightarrow \Delta_\varphi, \Sigma, \psi} \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta[\varphi] \qquad \varphi, \Lambda \Rightarrow \Xi}{\Gamma, \Lambda_\varphi, \Rightarrow \Delta_\varphi, \Xi}\,(Mix)}{\varphi, \Gamma, \Lambda_\varphi, \Rightarrow \Delta, \Xi}\,(W \Rightarrow)}{\dfrac{\psi \to \varphi, \Gamma, \Pi_\varphi, \Gamma, \Lambda_\varphi \Rightarrow \Delta_\varphi, \Sigma, \Delta_\varphi, \Xi}{\Gamma, \psi \to \varphi, \Pi_\varphi, \Lambda_\varphi \Rightarrow \Delta_\varphi, \Sigma, \Xi}\,(P)(C)}\,(\to\Rightarrow)$$

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: (Mix) o głębokości $< n$ jest eliminowalny.

jeżeli φ jest w Π, to zostaje zastąpiony przez:

$$
\cfrac{
  (Mix)\,\cfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta[\varphi] \qquad \Pi[\varphi] \Rightarrow \Sigma, \psi}{\Gamma, \Pi_\varphi \Rightarrow \Delta_\varphi, \Sigma, \psi}
  \qquad
  \cfrac{\cfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta[\varphi] \qquad \varphi, \Lambda \Rightarrow \Xi}{\Gamma, \Lambda_\varphi, \Rightarrow \Delta_\varphi, \Xi}\,(Mix)}{\varphi, \Gamma, \Lambda_\varphi, \Rightarrow \Delta, \Xi}\,(W \Rightarrow)
}{
  \cfrac{\psi \to \varphi, \Gamma, \Pi_\varphi, \Gamma, \Lambda_\varphi \Rightarrow \Delta_\varphi, \Sigma, \Delta_\varphi, \Xi}{\Gamma, \psi \to \varphi, \Pi_\varphi, \Lambda_\varphi \Rightarrow \Delta_\varphi, \Sigma, \Xi}\,(P)(C)
}\,(\to\Rightarrow)
$$

przypadek $(\vee \Rightarrow)$ analogicznie.

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: (Mix) o głębokości $< n$ jest eliminowalny.

e) przypadki gdy cut-formuła jest formułą główną reguły zastosowanej do prawego sekwentu-przesłanki:

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: (Mix) o głębokości $< n$ jest eliminowalny.

e) przypadki gdy cut-formuła jest formułą główną reguły zastosowanej do prawego sekwentu-przesłanki: przypadek $(\wedge \Rightarrow)$ – fragment dowodu o postaci:

$$(Mix)\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta[\varphi \wedge \psi] \qquad \dfrac{\varphi, \Pi[\varphi \wedge \psi] \Rightarrow \Sigma}{\varphi \wedge \psi, \Pi[\varphi \wedge \psi] \Rightarrow \Sigma}\,(\wedge \Rightarrow)}{\Gamma, \Pi_{\varphi \wedge \psi} \Rightarrow \Delta_{\varphi \wedge \psi}, \Sigma}$$

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: (Mix) o głębokości $< n$ jest eliminowalny.

e) przypadki gdy cut-formuła jest formułą główną reguły zastosowanej do prawego sekwentu-przesłanki: przypadek $(\wedge \Rightarrow)$ – fragment dowodu o postaci:

$$
(Mix)\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta[\varphi \wedge \psi] \qquad \dfrac{\varphi, \Pi[\varphi \wedge \psi] \Rightarrow \Sigma}{\varphi \wedge \psi, \Pi[\varphi \wedge \psi] \Rightarrow \Sigma}\ (\wedge \Rightarrow)}{\Gamma, \Pi_{\varphi\wedge\psi} \Rightarrow \Delta_{\varphi\wedge\psi}, \Sigma}
$$

zostaje zastąpiony przez:

$$
\dfrac{\dfrac{\Gamma, \Gamma, \Pi_{\varphi\wedge\psi} \Rightarrow \Delta_{\varphi\wedge\psi}, \Delta_{\varphi\wedge\psi}, \Sigma}{\Gamma, \Pi_{\varphi\wedge\psi} \Rightarrow \Delta_{\varphi\wedge\psi}, \Sigma}}{} \quad
\text{where}\quad
\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta[\varphi \wedge \psi] \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta[\varphi \wedge \psi] \qquad \varphi, \Pi[\varphi \wedge \psi] \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \varphi, \Pi_{\varphi\wedge\psi} \Rightarrow \Delta_{\varphi\wedge\psi}, \Sigma}\ (Mix)}{\varphi, \Gamma, \Pi_{\varphi\wedge\psi} \Rightarrow \Delta_{\varphi\wedge\psi}, \Sigma}\ (P \Rightarrow)}{\varphi \wedge \psi, \Gamma, \Pi_{\varphi\wedge\psi} \Rightarrow \Delta_{\varphi\wedge\psi}, \Sigma}\ (\wedge \Rightarrow)}{\dfrac{\Gamma, \Gamma, \Pi_{\varphi\wedge\psi} \Rightarrow \Delta_{\varphi\wedge\psi}, \Delta_{\varphi\wedge\psi}, \Sigma}{\Gamma, \Pi_{\varphi\wedge\psi} \Rightarrow \Delta_{\varphi\wedge\psi}, \Sigma}\ (P), (C)}\ (Mix)
$$

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: (Mix) o głębokości $< n$ jest eliminowalny.

e) przypadki gdy cut-formuła jest formułą główną reguły zastosowanej do prawego sekwentu-przesłanki: przypadek ($\wedge \Rightarrow$) – fragment dowodu o postaci:

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta[\varphi \wedge \psi] \qquad \dfrac{\varphi, \Pi[\varphi \wedge \psi] \Rightarrow \Sigma}{\varphi \wedge \psi, \Pi[\varphi \wedge \psi] \Rightarrow \Sigma}(\wedge \Rightarrow)}{\Gamma, \Pi_{\varphi \wedge \psi} \Rightarrow \Delta_{\varphi \wedge \psi}, \Sigma}(Mix)$$

zostaje zastąpiony przez:

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta[\varphi \wedge \psi] \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta[\varphi \wedge \psi] \qquad \varphi, \Pi[\varphi \wedge \psi] \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \varphi, \Pi_{\varphi \wedge \psi} \Rightarrow \Delta_{\varphi \wedge \psi}, \Sigma}(Mix)}{\varphi, \Gamma, \Pi_{\varphi \wedge \psi} \Rightarrow \Delta_{\varphi \wedge \psi}, \Sigma}(P \Rightarrow)}{\varphi \wedge \psi, \Gamma, \Pi_{\varphi \wedge \psi} \Rightarrow \Delta_{\varphi \wedge \psi}, \Sigma}(\wedge \Rightarrow)}{\dfrac{\Gamma, \Gamma, \Pi_{\varphi \wedge \psi} \Rightarrow \Delta_{\varphi \wedge \psi}, \Delta_{\varphi \wedge \psi}, \Sigma}{\Gamma, \Pi_{\varphi \wedge \psi} \Rightarrow \Delta_{\varphi \wedge \psi}, \Sigma}(P),(C)}(Mix)$$

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: j.w.

reguły 2-przesłankowe – przypadek ($\rightarrow\Rightarrow$): frg. postaci:

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: j.w.

reguły 2-przesłankowe – przypadek $(\rightarrow\Rightarrow)$: frg. postaci:

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta[\varphi \rightarrow \psi] \qquad \dfrac{\Pi \Rightarrow \Sigma, \varphi \qquad \psi, \Lambda \Rightarrow \Xi}{\varphi \rightarrow \psi, \Pi, \Lambda \Rightarrow \Sigma, \Xi}\,(\rightarrow\Rightarrow)}{\Gamma, \Pi_{\varphi\rightarrow\psi}, \Lambda_{\varphi\rightarrow\psi} \Rightarrow \Delta_{\varphi\rightarrow\psi}, \Sigma, \Xi}\,(Mix)$$

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: j.w.

reguły 2-przesłankowe – przypadek $(\to\Rightarrow)$: frg. postaci:

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta[\varphi \to \psi] \qquad \dfrac{\Pi \Rightarrow \Sigma, \varphi \qquad \psi, \Lambda \Rightarrow \Xi}{\varphi \to \psi, \Pi, \Lambda \Rightarrow \Sigma, \Xi}\,(\to\Rightarrow)}{\Gamma, \Pi_{\varphi\to\psi}, \Lambda_{\varphi\to\psi} \Rightarrow \Delta_{\varphi\to\psi}, \Sigma, \Xi}\,(Mix)$$

Zauważmy, że nie wiemy czy jakieś wystąpienia $\varphi \to \psi$ są w obu zbiorach parametrów Π i Λ zatem musimy rozważyć 3 przypadki:

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: j.w.

1. $\varphi \rightarrow \psi$ jest zarówno w Π jak i w Λ.

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: j.w.

1. $\varphi \to \psi$ jest zarówno w Π jak i w Λ.

dowód wyjściowy zostaje zastąpiony przez:

$$
\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta[\varphi \to \psi] \qquad \dfrac{(Mix)\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta[\varphi \to \psi] \qquad \Pi[\varphi \to \psi] \Rightarrow \Sigma, \varphi}{\Gamma, \Pi_{\varphi\to\psi} \Rightarrow \Delta_{\varphi\to\psi}, \Sigma} \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta[\varphi \to \psi] \qquad \psi, \Lambda[\varphi \to}{\Gamma, \psi, \Lambda_{\varphi\to\psi} \Rightarrow \Delta_{\varphi\to\psi}, \Xi}}{\psi, \Gamma, \Lambda_{\varphi\to\psi} \Rightarrow \Delta_{\varphi\to\psi}, \Xi}}{\varphi \to \psi, \Gamma, \Pi_{\varphi\to\psi}, \Gamma, \Lambda_{\varphi\to\psi} \Rightarrow \Delta_{\varphi\to\psi}, \Sigma, \Delta_{\varphi\to\psi}, \Xi}}{\dfrac{\Gamma, \Gamma, \Pi_{\varphi\to\psi}, \Gamma, \Lambda_{\varphi\to\psi} \Rightarrow \Delta_{\varphi\to\psi}, \Delta_{\varphi\to\psi}, \Sigma, \Delta_{\varphi\to\psi}, \Xi}{\Gamma, \Pi_{\varphi\to\psi}, \Lambda_{\varphi\to\psi} \Rightarrow \Delta_{\varphi\to\psi}, \Sigma, \Xi}\ (P)(C)}\ (Mix)
$$

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: j.w.

2. $\varphi \to \psi$ jest w Π ale nie w Λ.

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: j.w.

2. $\varphi \rightarrow \psi$ jest w Π ale nie w Λ.
dowód wyjściowy zostaje zastąpiony przez:

$$
\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta[\varphi \rightarrow \psi] \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta[\varphi \rightarrow \psi] \qquad \Pi[\varphi \rightarrow \psi] \Rightarrow \Sigma, \varphi}{\Gamma, \Pi_{\varphi\rightarrow\psi} \Rightarrow \Delta_{\varphi\rightarrow\psi}, \Sigma}\,(Mix) \qquad \psi, \Lambda \Rightarrow \Xi}{\varphi \rightarrow \psi, \Gamma, \Pi_{\varphi\rightarrow\psi}, \Lambda \Rightarrow \Delta_{\varphi\rightarrow\psi}, \Sigma, \Xi}\,(\rightarrow\Rightarrow)}{\Gamma, \Gamma, \Pi_{\varphi\rightarrow\psi}, \Lambda \Rightarrow \Delta_{\varphi\rightarrow\psi}, \Delta_{\varphi\rightarrow\psi}, \Delta_{\varphi\rightarrow\psi}, \Sigma, \Xi}\,(Mix)}{\Gamma, \Pi_{\varphi\rightarrow\psi}, \Lambda \Rightarrow \Delta_{\varphi\rightarrow\psi}, \Sigma, \Xi}\,(P)(C)
$$

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: j.w.

3. $\varphi \to \psi$ jest w Λ ale nie w Π.

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: j.w.

3. $\varphi \to \psi$ jest w Λ ale nie w Π.
dowód wyjściowy zostaje zastąpiony przez:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\Gamma \Rightarrow \Delta[\varphi \to \psi]$}
\AxiomC{$\Pi \Rightarrow \Sigma, \varphi$}
\AxiomC{$\Gamma \Rightarrow \Delta[\varphi \to \psi]$}
\AxiomC{$\psi, \Lambda[\varphi \to \psi] \Rightarrow \Xi$}
\RightLabel{(Mix)}
\BinaryInfC{$\Gamma, \psi, \Lambda_{\varphi\to\psi} \Rightarrow \Delta_{\varphi\to\psi}, \Xi$}
\doubleLine
\RightLabel{$(P \Rightarrow)$}
\UnaryInfC{$\psi, \Gamma, \Lambda_{\varphi\to\psi} \Rightarrow \Delta_{\varphi\to\psi}, \Xi$}
\RightLabel{$(\to\Rightarrow)$}
\BinaryInfC{$\varphi \to \psi, \Pi, \Gamma, \Lambda_{\varphi\to\psi} \Rightarrow \Sigma, \Delta_{\varphi\to\psi}, \Xi$}
\RightLabel{(Mix)}
\BinaryInfC{$\Gamma, \Pi, \Gamma, \Lambda_{\varphi\to\psi} \Rightarrow \Delta_{\varphi\to\psi}, \Sigma, \Delta_{\varphi\to\psi}, \Xi$}
\doubleLine
\RightLabel{$(P)(C)$}
\UnaryInfC{$\Gamma, \Pi, \Lambda_{\varphi\to\psi} \Rightarrow \Delta_{\varphi\to\psi}, \Sigma, \Xi$}
\end{prooftree}
$$

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: j.w.

3. $\varphi \to \psi$ jest w Λ ale nie w Π.
dowód wyjściowy zostaje zastąpiony przez:

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta[\varphi \to \psi] \qquad \dfrac{\Pi \Rightarrow \Sigma, \varphi \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta[\varphi \to \psi] \qquad \psi, \Lambda[\varphi \to \psi] \Rightarrow \Xi}{\Gamma, \psi, \Lambda_{\varphi\to\psi} \Rightarrow \Delta_{\varphi\to\psi}, \Xi}\,(Mix)}{\psi, \Gamma, \Lambda_{\varphi\to\psi} \Rightarrow \Delta_{\varphi\to\psi}, \Xi}\,(P \Rightarrow)}{\varphi \to \psi, \Pi, \Gamma, \Lambda_{\varphi\to\psi} \Rightarrow \Sigma, \Delta_{\varphi\to\psi}, \Xi}\,(\to\Rightarrow)}{\dfrac{\Gamma, \Pi, \Gamma, \Lambda_{\varphi\to\psi} \Rightarrow \Delta_{\varphi\to\psi}, \Sigma, \Delta_{\varphi\to\psi}, \Xi}{\Gamma, \Pi, \Lambda_{\varphi\to\psi} \Rightarrow \Delta_{\varphi\to\psi}, \Sigma, \Xi}\,(P)(C)}\,(Mix)$$

analogiczny dowód dla $(\vee \Rightarrow)$ choć bez rozważania podprzypadków.

System LK – eliminacja cięcia:

P. 2.2. krok indukcyjny po głębokości (Mix). Zał. ind.: j.w.

3. $\varphi \to \psi$ jest w Λ ale nie w Π.
dowód wyjściowy zostaje zastąpiony przez:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\Gamma \Rightarrow \Delta[\varphi \to \psi]$}
\AxiomC{$\Pi \Rightarrow \Sigma, \varphi$}
\AxiomC{$\Gamma \Rightarrow \Delta[\varphi \to \psi]$}
\AxiomC{$\psi, \Lambda[\varphi \to \psi] \Rightarrow \Xi$}
\RightLabel{(Mix)}
\BinaryInfC{$\Gamma, \psi, \Lambda_{\varphi\to\psi} \Rightarrow \Delta_{\varphi\to\psi}, \Xi$}
\doubleLine
\RightLabel{$(P \Rightarrow)$}
\UnaryInfC{$\psi, \Gamma, \Lambda_{\varphi\to\psi} \Rightarrow \Delta_{\varphi\to\psi}, \Xi$}
\RightLabel{$(\to\Rightarrow)$}
\BinaryInfC{$\varphi \to \psi, \Pi, \Gamma, \Lambda_{\varphi\to\psi} \Rightarrow \Sigma, \Delta_{\varphi\to\psi}, \Xi$}
\RightLabel{(Mix)}
\BinaryInfC{$\Gamma, \Pi, \Gamma, \Lambda_{\varphi\to\psi} \Rightarrow \Delta_{\varphi\to\psi}, \Sigma, \Delta_{\varphi\to\psi}, \Xi$}
\doubleLine
\RightLabel{$(P)(C)$}
\UnaryInfC{$\Gamma, \Pi, \Lambda_{\varphi\to\psi} \Rightarrow \Delta_{\varphi\to\psi}, \Sigma, \Xi$}
\end{prooftree}
$$

analogiczny dowód dla $(\vee \Rightarrow)$ choć bez rozważania podprzypadków.
B. Analogicznie jak w części A. dowodzimy redukcji głębokości (Mix) przy założeniu, że L-rank> 1.

Dopuszczalność Cut w m-ARS

Dowód Dragalina:

Dopuszczalność Cut w m-ARS

Dowód Dragalina:

różnice z dowodem Gentzena są następujące:

Dopuszczalność Cut w m-ARS

Dowód Dragalina:

różnice z dowodem Gentzena są następujące:

1. pokazuje nie jak eliminować (Cut) z dowodu ale, że jego dołączenie nie wzmacnia systemu

Dopuszczalność Cut w m-ARS

Dowód Dragalina:

różnice z dowodem Gentzena są następujące:

1. pokazuje nie jak eliminować (Cut) z dowodu ale, że jego dołączenie nie wzmacnia systemu
2. bezpośrednio dla (Cut) a nie dla (Mix)

Dopuszczalność Cut w m-ARS

Dowód Dragalina:

różnice z dowodem Gentzena są następujące:

1. pokazuje nie jak eliminować (Cut) z dowodu ale, że jego dołączenie nie wzmacnia systemu
2. bezpośrednio dla (Cut) a nie dla (Mix)
3. dla m-ARS z aksjomatami elementarnymi

Dopuszczalność Cut w m-ARS

Dowód Dragalina:

różnice z dowodem Gentzena są następujące:

1. pokazuje nie jak eliminować (Cut) z dowodu ale, że jego dołączenie nie wzmacnia systemu
2. bezpośrednio dla (Cut) a nie dla (Mix)
3. dla m-ARS z aksjomatami elementarnymi
4. indukcja na 2 parametrach (nie na 3)

Dopuszczalność Cut w m-ARS

Dowód Dragalina:

różnice z dowodem Gentzena są następujące:

1. pokazuje nie jak eliminować (Cut) z dowodu ale, że jego dołączenie nie wzmacnia systemu
2. bezpośrednio dla (Cut) a nie dla (Mix)
3. dla m-ARS z aksjomatami elementarnymi
4. indukcja na 2 parametrach (nie na 3)
5. indukcja nie po głębokości ale po długości dowodu przesłanki (Cut)

Dopuszczalność Cut w m-ARS

Dowód Dragalina:

różnice z dowodem Gentzena są następujące:

1. pokazuje nie jak eliminować (Cut) z dowodu ale, że jego dołączenie nie wzmacnia systemu
2. bezpośrednio dla (Cut) a nie dla (Mix)
3. dla m-ARS z aksjomatami elementarnymi
4. indukcja na 2 parametrach (nie na 3)
5. indukcja nie po głębokości ale po długości dowodu przesłanki (Cut)

Uwaga: długość zastosowania (Cut) określamy jako sumę długości dowodów obu przesłanek.

Dopuszczalność Cut w m-ARS

Dowód Dragalina:

Dopuszczalność Cut w m-ARS

Dowód Dragalina:

Dowód rozbity jest na 4 części:

Dopuszczalność Cut w m-ARS

Dowód Dragalina:

Dowód rozbity jest na 4 części:

1. co najmniej jedna przesłanka aksjomatyczna

Dopuszczalność Cut w m-ARS

Dowód Dragalina:

Dowód rozbity jest na 4 części:

1. co najmniej jedna przesłanka aksjomatyczna
2. cut-formuła nie jest zasadnicza w lewej (ew. prawej) przesłance

Dopuszczalność Cut w m-ARS

Dowód Dragalina:

Dowód rozbity jest na 4 części:

1. co najmniej jedna przesłanka aksjomatyczna
2. cut-formuła nie jest zasadnicza w lewej (ew. prawej) przesłance
3. cut-formuła jest zasadnicza tylko w lewej (ew. prawej) przesłance

Dopuszczalność Cut w m-ARS

Dowód Dragalina:

Dowód rozbity jest na 4 części:

1. co najmniej jedna przesłanka aksjomatyczna
2. cut-formuła nie jest zasadnicza w lewej (ew. prawej) przesłance
3. cut-formuła jest zasadnicza tylko w lewej (ew. prawej) przesłance
4. cut-formuła jest zasadnicza w obu przesłankach

Dopuszczalność Cut w m-ARS

Dowód Dragalina:

Dopuszczalność Cut w m-ARS

Dowód Dragalina:

W 1 części pokazujemy, że (Cut) jest całkowicie eliminowalne – wynika to z Faktu 1.

Dopuszczalność Cut w m-ARS

Dowód Dragalina:

W 1 części pokazujemy, że (Cut) jest całkowicie eliminowalne – wynika to z Faktu 1.
W 2. i 3. wykazujemy, że można zredukować długość dowodu jednej przesłanki (Cut).

Dopuszczalność Cut w m-ARS

Dowód Dragalina:

W 1 części pokazujemy, że (Cut) jest całkowicie eliminowalne – wynika to z Faktu 1.
W 2. i 3. wykazujemy, że można zredukować długość dowodu jednej przesłanki (Cut).
W punkcie 2. przyjmujemy, że cut-formuła nie jest zasadnicza w lewej przesłance (Cut) zatem przy niezmienionej przesłance prawej pokazujemy, że długość dowodu lewej przesłanki można zmniejszyć. Rozważamy wszystkie 8 przypadków zastosowania reguł logicznych do uzyskania lewej przesłanki. Odpowiadają one transformacjom z punktu B1 w dowodzie Gentzena.

Dopuszczalność Cut w m-ARS

Dowód Dragalina:

W 1 części pokazujemy, że (Cut) jest całkowicie eliminowalne – wynika to z Faktu 1.
W 2. i 3. wykazujemy, że można zredukować długość dowodu jednej przesłanki (Cut).
W punkcie 2. przyjmujemy, że cut-formuła nie jest zasadnicza w lewej przesłance (Cut) zatem przy niezmienionej przesłance prawej pokazujemy, że długość dowodu lewej przesłanki można zmniejszyć. Rozważamy wszystkie 8 przypadków zastosowania reguł logicznych do uzyskania lewej przesłanki. Odpowiadają one transformacjom z punktu B1 w dowodzie Gentzena.
W punkcie 3 zakładamy, że cut-formuła jest zasadnicza tylko w lewej przesłance i wykonujemy transformacje skracające długość prawej przesłanki. Znów rozważamy 8 przypadków zastosowania reguł logicznych tym razem do prawej przesłanki. Pokrywają się one z punktem A1 w dowodzie Gentzena.

Dopuszczalność Cut w m-ARS

Dowód Dragalina:

Dopuszczalność Cut w m-ARS

Dowód Dragalina:

Dla przykładu rozważmy ($\rightarrow\Rightarrow$):

Dopuszczalność Cut w m-ARS

Dowód Dragalina:

Dla przykładu rozważmy $(\rightarrow\Rightarrow)$:

$$\dfrac{(\rightarrow\Rightarrow)\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \chi \qquad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \chi}{\varphi \rightarrow \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \chi} \qquad \chi, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\varphi \rightarrow \psi, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}\ (Cut)$$

Dopuszczalność Cut w m-ARS

Dowód Dragalina:

Dla przykładu rozważmy $(\rightarrow\Rightarrow)$:

$$\dfrac{(\rightarrow\Rightarrow)\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \chi \qquad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \chi}{\varphi \rightarrow \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \chi} \qquad \chi, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\varphi \rightarrow \psi, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}\ (Cut)$$

zostaje zastąpiony przez:

$$\dfrac{(Cut)\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \chi \qquad \chi, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma, \varphi} \qquad \dfrac{\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \chi \qquad \chi, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\psi, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}\ (Cut)}{\varphi \rightarrow \psi, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}\ (\rightarrow\Rightarrow)$$

gdzie oba zastosowania (Cut) mają mniejszą długość są zatem eliminowalne z założenia indukcyjnego.

Dopuszczalność Cut w m-ARS

Uwaga: Całkowicie odpada rozważanie przypadków zgrupowanych w punkcie A2 i A3 (oraz B2 i B3), gdyż zachodzą one dla systemu z (pierwotną) kontrakcją i z (Mix) zamiast (Cut).

Dopuszczalność Cut w m-ARS

Uwaga: Całkowicie odpada rozważanie przypadków zgrupowanych w punkcie A2 i A3 (oraz B2 i B3), gdyż zachodzą one dla systemu z (pierwotną) kontrakcją i z (Mix) zamiast (Cut).

1. Przypadki rozważane przez nas w dowodzie Gentzena w punkcie A2 i B2 (cut-formuła jako formuła przesłankowa) podpadają (jako szczególne przypadki) pod transformacje przeprowadzane w dowodzie Dragalina w punkcie 3 i 2 gdyż z dwóch wystąpień cut-formuły w prawej przesłance (Cut) tylko jedna jest eliminowana po przesunięciu danego zastosowania (Cut) do góry; druga nadal może być wykorzystana poniżej jako formuła poboczna zastosowania odpowiedniej reguły.

Dopuszczalność Cut w m-ARS

Uwaga: Całkowicie odpada rozważanie przypadków zgrupowanych w punkcie A2 i A3 (oraz B2 i B3), gdyż zachodzą one dla systemu z (pierwotną) kontrakcją i z (Mix) zamiast (Cut).

1. Przypadki rozważane przez nas w dowodzie Gentzena w punkcie A2 i B2 (cut-formuła jako formuła przesłankowa) podpadają (jako szczególne przypadki) pod transformacje przeprowadzane w dowodzie Dragalina w punkcie 3 i 2 gdyż z dwóch wystąpień cut-formuły w prawej przesłance (Cut) tylko jedna jest eliminowana po przesunięciu danego zastosowania (Cut) do góry; druga nadal może być wykorzystana poniżej jako formuła poboczna zastosowania odpowiedniej reguły.
2. Przypadki podpadające w dowodzie Gentzena pod punkt A3 i B3 (cut-formuła jako formuła zasadnicza); nie znajdują zastosowania gdyż (Cut) wycina tylko jedno wystąpienie cut-formuły a nie wszystkie jak (Mix).

Dopuszczalność Cut w m-ARS

Dowód Dragalina:

Dopuszczalność Cut w m-ARS

Dowód Dragalina:

W punkcie 4. dowodzimy, że można zredukować długość cut-formuły. Ponieważ zmienne nie mogą być formułami zasadniczymi więc w konsekwencji prowadzi to do całkowitej eliminacji (Cut).

Dopuszczalność Cut w m-ARS

Dowód Dragalina:

W punkcie 4. dowodzimy, że można zredukować długość cut-formuły. Ponieważ zmienne nie mogą być formułami zasadniczymi więc w konsekwencji prowadzi to do całkowitej eliminacji (Cut).
Dowód w tym punkcie nie różni się od dowodu punktu 3.2. w dowodzie Gentzena choć tu dla odmiany transformacje dla cut-formuł o postaci koniunkcji i alternatywy są bardziej skomplikowane dla wariantów Ketonena.

Dopuszczalność Cut w m-ARS

Dowód Dragalina:

Dopuszczalność Cut w m-ARS

Dowód Dragalina:

Dla przykładu podamy przypadek koniunkcji:

$$\dfrac{(\Rightarrow\wedge)\dfrac{\Gamma\Rightarrow\Delta,\varphi \qquad \Gamma\Rightarrow\Delta,\psi}{\Gamma\Rightarrow\Delta,\varphi\wedge\psi} \qquad \dfrac{\varphi,\psi,\Pi\Rightarrow\Sigma}{\varphi\wedge\psi,\Pi\Rightarrow\Sigma}(\wedge\Rightarrow)}{\Gamma,\Pi\Rightarrow\Delta,\Sigma}(Mix)$$

Dopuszczalność Cut w m-ARS

Dowód Dragalina:

Dla przykładu podamy przypadek koniunkcji:

$$\dfrac{(\Rightarrow\wedge)\,\dfrac{\Gamma\Rightarrow\Delta,\varphi \qquad \Gamma\Rightarrow\Delta,\psi}{\Gamma\Rightarrow\Delta,\varphi\wedge\psi} \qquad \dfrac{\varphi,\psi,\Pi\Rightarrow\Sigma}{\varphi\wedge\psi,\Pi\Rightarrow\Sigma}\,(\wedge\Rightarrow)}{\Gamma,\Pi\Rightarrow\Delta,\Sigma}\,(Mix)$$

zostaje zastąpiony przez:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma\Rightarrow\Delta,\psi \qquad \dfrac{\Gamma\Rightarrow\Delta,\varphi \qquad \varphi,\psi,\Pi\Rightarrow\Sigma}{\psi,\Gamma,\Pi\Rightarrow\Delta,\Sigma}\,(Cut)}{\Gamma,\Gamma,\Pi\Rightarrow\Delta,\Delta,\Sigma}\,(Cut)}{\Gamma,\Pi\Rightarrow\Delta,\Sigma}\,(C)$$

Dopuszczalność Cut w m-ARS

Dowód Dragalina:

Dla przykładu podamy przypadek koniunkcji:

$$\dfrac{(\Rightarrow\wedge)\,\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi} \qquad \dfrac{\varphi, \psi, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\varphi \wedge \psi, \Pi \Rightarrow \Sigma}\,(\wedge\Rightarrow)}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}\,(Mix)$$

zostaje zastąpiony przez:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \qquad \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \varphi, \psi, \Pi \Rightarrow \Sigma}{\psi, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}\,(Cut)}{\Gamma, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Delta, \Sigma}\,(Cut)}{\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma}\,(C)$$

Jak widać w porównaniu do stosownej transformacji dla reguł Gentzena zmuszeni jesteśmy zastosować (Cut) dwukrotnie. Co więcej wysokość drugiego zastosowania (Cut) może być większa ale

Dopuszczalność Cut w LK

Dowód Curry'ego:

Dopuszczalność Cut w LK

Dowód Curry'ego:

Dowód Curry'ego przeprowadzony jest dla dwóch wersji LK.

Dopuszczalność Cut w LK

Dowód Curry'ego:

Dowód Curry'ego przeprowadzony jest dla dwóch wersji LK.
Różnice z dowodem Gentzena są następujące:

Dopuszczalność Cut w LK

Dowód Curry'ego:

Dowód Curry'ego przeprowadzony jest dla dwóch wersji LK. Różnice z dowodem Gentzena są następujące:

1. pokazuje nie jak eliminować (Cut) z dowodu ale, że jego dołączenie nie wzmacnia systemu

Dopuszczalność Cut w LK

Dowód Curry'ego:

Dowód Curry'ego przeprowadzony jest dla dwóch wersji LK. Różnice z dowodem Gentzena są następujące:

1. pokazuje nie jak eliminować (Cut) z dowodu ale, że jego dołączenie nie wzmacnia systemu
2. bezpośrednio dla (Cut) a nie dla (Mix)

Dopuszczalność Cut w LK

Dowód Curry'ego:

Dowód Curry'ego przeprowadzony jest dla dwóch wersji LK. Różnice z dowodem Gentzena są następujące:

1. pokazuje nie jak eliminować (Cut) z dowodu ale, że jego dołączenie nie wzmacnia systemu
2. bezpośrednio dla (Cut) a nie dla (Mix)
3. indukcja na 2 parametrach (nie na 3)

Dopuszczalność Cut w LK

Dowód Curry'ego:

Dowód Curry'ego przeprowadzony jest dla dwóch wersji LK. Różnice z dowodem Gentzena są następujące:

1. pokazuje nie jak eliminować (Cut) z dowodu ale, że jego dołączenie nie wzmacnia systemu
2. bezpośrednio dla (Cut) a nie dla (Mix)
3. indukcja na 2 parametrach (nie na 3)
4. indukcja nie po głębokości ale po długości dowodu przesłanki (Cut)

Dopuszczalność Cut w LK

Dowód Curry'ego:

Dowód Curry'ego przeprowadzony jest dla dwóch wersji LK. Różnice z dowodem Gentzena są następujące:

1. pokazuje nie jak eliminować (Cut) z dowodu ale, że jego dołączenie nie wzmacnia systemu
2. bezpośrednio dla (Cut) a nie dla (Mix)
3. indukcja na 2 parametrach (nie na 3)
4. indukcja nie po głębokości ale po długości dowodu przesłanki (Cut)
5. dowód rozbity na 3 niezależne etapy

Dopuszczalność Cut w LK

Dowód Curry'ego:

Dowód Curry'ego przeprowadzony jest dla dwóch wersji LK. Różnice z dowodem Gentzena są następujące:

1. pokazuje nie jak eliminować (Cut) z dowodu ale, że jego dołączenie nie wzmacnia systemu
2. bezpośrednio dla (Cut) a nie dla (Mix)
3. indukcja na 2 parametrach (nie na 3)
4. indukcja nie po głębokości ale po długości dowodu przesłanki (Cut)
5. dowód rozbity na 3 niezależne etapy
6. dowód 2 etapów oparty jest na globalnych przekształceniach dowodu

Dopuszczalność Cut w LK

Dowód Curry'ego:

Dopuszczalność Cut w LK

Dowód Curry'ego:

Dowód Curry'ego jest podzielony na 3 etapy:

Dopuszczalność Cut w LK

Dowód Curry'ego:

Dowód Curry'ego jest podzielony na 3 etapy:

Etap 1:

Dopuszczalność Cut w LK

Dowód Curry'ego:

Dowód Curry'ego jest podzielony na 3 etapy:
Etap 1:
Założenia:

E11 $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$

E12 jeżeli $\vdash \varphi^{(1)}, \Pi \Rightarrow \Sigma$, to $\vdash \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$

gdzie $\varphi^{(1)}$ oznacza, że cut-formuła φ występuje po raz pierwszy w sekwencie.

Dopuszczalność Cut w LK

Dowód Curry'ego:

Dowód Curry'ego jest podzielony na 3 etapy:
Etap 1:
Założenia:

E11 $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$

E12 jeżeli $\vdash \varphi^{(1)}, \Pi \Rightarrow \Sigma$, to $\vdash \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$

gdzie $\varphi^{(1)}$ oznacza, że cut-formuła φ występuje po raz pierwszy w sekwencie.
Dowodzimy, że jeżeli $\vdash \varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma$, to $\vdash \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$ przez indukcję po długości dowodu prawej przesłanki (Cut).

Dopuszczalność Cut w LK

Dowód Curry'ego:

Dopuszczalność Cut w LK

Dowód Curry'ego:

Etap 2:

Założenia:

Dopuszczalność Cut w LK

Dowód Curry'ego:

Etap 2:

Założenia:

E21 $\vdash \varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma$

E22 jeżeli $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi^{(1)}$, to $\vdash \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$

Dopuszczalność Cut w LK

Dowód Curry'ego:

Etap 2:
Założenia:

E21 $\vdash \varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma$

E22 jeżeli $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi^{(1)}$, to $\vdash \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$

Dowodzimy, że jeżeli $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$, to $\vdash \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$ przez indukcję po długości dowodu lewej przesłanki (Cut).

Dopuszczalność Cut w LK

Dowód Curry'ego:

Etap 2:
Założenia:

E21 $\vdash \varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma$

E22 jeżeli $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi^{(1)}$, to $\vdash \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$

Dowodzimy, że jeżeli $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$, to $\vdash \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$ przez indukcję po długości dowodu lewej przesłanki (Cut).
Etap 3:
Założenia:

Dopuszczalność Cut w LK

Dowód Curry'ego:

Etap 2:
Założenia:

E21 $\vdash \varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma$

E22 jeżeli $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi^{(1)}$, to $\vdash \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$

Dowodzimy, że jeżeli $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$, to $\vdash \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$ przez indukcję po długości dowodu lewej przesłanki (Cut).
Etap 3:
Założenia:

E31 (Cut) jest dopuszczalne dla każdej podformuły φ

E32 $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi^{(1)}$

E33 $\vdash \varphi^{(1)}, \Pi \Rightarrow \Sigma$

Dopuszczalność Cut w LK

Dowód Curry'ego:

Etap 2:
Założenia:

E21 $\vdash \varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma$

E22 jeżeli $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi^{(1)}$, to $\vdash \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$

Dowodzimy, że jeżeli $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$, to $\vdash \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$ przez indukcję po długości dowodu lewej przesłanki (Cut).
Etap 3:
Założenia:

E31 (Cut) jest dopuszczalne dla każdej podformuły φ

E32 $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi^{(1)}$

E33 $\vdash \varphi^{(1)}, \Pi \Rightarrow \Sigma$

Dowodzimy $\vdash \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$ przez indukcję po długości cut-formuły.

Dopuszczalność Cut w LK

Dowód Curry'ego:

Dopuszczalność Cut w LK

Dowód Curry'ego:

1. (Cut) na podformułach cut-formuly φ jest dopuszczalny (E31)

Dopuszczalność Cut w LK

Dowód Curry'ego:

1. (Cut) na podformułach cut-formuly φ jest dopuszczalny (E31)
2. $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ (E11)
3. $\vdash \varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma$ (E21)

Dopuszczalność Cut w LK

Dowód Curry'ego:

1. (Cut) na podformułach cut-formuly φ jest dopuszczalny (E31)
2. $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ (E11)
3. $\vdash \varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma$ (E21)
   3.1. $\vdash \varphi^{(1)}, \Pi \Rightarrow \Sigma$ (E33)

Dopuszczalność Cut w LK

Dowód Curry'ego:

1. (Cut) na podformułach cut-formuly φ jest dopuszczalny (E31)
2. $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ (E11)
3. $\vdash \varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma$ (E21)
   3.1. $\vdash \varphi^{(1)}, \Pi \Rightarrow \Sigma$ (E33)
      3.1.1. $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi^{(1)}$ (E32)

Dopuszczalność Cut w LK

Dowód Curry'ego:

1. (Cut) na podformułach cut-formuly φ jest dopuszczalny (E31)
2. $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ (E11)
3. $\vdash \varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma$ (E21)
   - 3.1. $\vdash \varphi^{(1)}, \Pi \Rightarrow \Sigma$ (E33)
     - 3.1.1. $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi^{(1)}$ (E32)
     - 3.1.2. $\vdash \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$ 1., 3.1., 3.1.1., Etap 3

Dopuszczalność Cut w LK

Dowód Curry'ego:

1. (Cut) na podformułach cut-formuly φ jest dopuszczalny (E31)
2. $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ (E11)
3. $\vdash \varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma$ (E21)
   - 3.1. $\vdash \varphi^{(1)}, \Pi \Rightarrow \Sigma$ (E33)
     - 3.1.1. $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi^{(1)}$ (E32)
     - 3.1.2. $\vdash \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$ 1., 3.1., 3.1.1., Etap 3
   - 3.2. jeżeli $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi^{(1)}$, to $\vdash \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$ 3.1.1.-3.1.2.

Dopuszczalność Cut w LK

Dowód Curry'ego:

1. (Cut) na podformułach cut-formuły φ jest dopuszczalny (E31)
2. $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ (E11)
3. $\vdash \varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma$ (E21)
   - 3.1. $\vdash \varphi^{(1)}, \Pi \Rightarrow \Sigma$ (E33)
     - 3.1.1. $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi^{(1)}$ (E32)
     - 3.1.2. $\vdash \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$ 1., 3.1., 3.1.1., Etap 3
   - 3.2. jeżeli $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi^{(1)}$, to $\vdash \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$ 3.1.1.-3.1.2.
   - 3.3. jeżeli $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$, to $\vdash \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$ 3., 3.2., Etap 2

Dopuszczalność Cut w LK

Dowód Curry'ego:

1. (Cut) na podformułach cut-formuly φ jest dopuszczalny (E31)
2. $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ (E11)
3. $\vdash \varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma$ (E21)
   - 3.1. $\vdash \varphi^{(1)}, \Pi \Rightarrow \Sigma$ (E33)
     - 3.1.1. $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi^{(1)}$ (E32)
     - 3.1.2. $\vdash \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$ 1., 3.1., 3.1.1., Etap 3
   - 3.2. jeżeli $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi^{(1)}$, to $\vdash \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$ 3.1.1.-3.1.2.
   - 3.3. jeżeli $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$, to $\vdash \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$ 3., 3.2., Etap 2
   - 3.4. $\vdash \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$ 2., 3.3.

Dopuszczalność Cut w LK

Dowód Curry'ego:

1. (Cut) na podformułach cut-formuly φ jest dopuszczalny (E31)
2. $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ (E11)
3. $\vdash \varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma$ (E21)
   3.1. $\vdash \varphi^{(1)}, \Pi \Rightarrow \Sigma$ (E33)
      3.1.1. $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi^{(1)}$ (E32)
      3.1.2. $\vdash \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$ 1., 3.1., 3.1.1., Etap 3
   3.2. jeżeli $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi^{(1)}$, to $\vdash \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$ 3.1.1.-3.1.2.
   3.3. jeżeli $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$, to $\vdash \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$ 3., 3.2., Etap 2
   3.4. $\vdash \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$ 2., 3.3.
4. jeżeli $\vdash \varphi^{(1)}, \Pi \Rightarrow \Sigma$, to $\vdash \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$ 3.1. - 3.4.

Dopuszczalność Cut w LK

Dowód Curry'ego:

1. (Cut) na podformułach cut-formuły φ jest dopuszczalny (E31)
2. $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ (E11)
3. $\vdash \varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma$ (E21)
   - 3.1. $\vdash \varphi^{(1)}, \Pi \Rightarrow \Sigma$ (E33)
     - 3.1.1. $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi^{(1)}$ (E32)
     - 3.1.2. $\vdash \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$ 1., 3.1., 3.1.1., Etap 3
   - 3.2. jeżeli $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi^{(1)}$, to $\vdash \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$ 3.1.1.-3.1.2.
   - 3.3. jeżeli $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$, to $\vdash \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$ 3., 3.2., Etap 2
   - 3.4. $\vdash \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$ 2., 3.3.
4. jeżeli $\vdash \varphi^{(1)}, \Pi \Rightarrow \Sigma$, to $\vdash \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$ 3.1. - 3.4.
5. jeżeli $\vdash \varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma$, to $\vdash \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$ 2., 4., Etap 1

Dopuszczalność Cut w LK

Dowód Curry'ego:

1. (Cut) na podformułach cut-formuly φ jest dopuszczalny (E31)
2. $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ (E11)
3. $\vdash \varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma$ (E21)
   - 3.1. $\vdash \varphi^{(1)}, \Pi \Rightarrow \Sigma$ (E33)
     - 3.1.1. $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi^{(1)}$ (E32)
     - 3.1.2. $\vdash \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$ 1., 3.1., 3.1.1., Etap 3
   - 3.2. jeżeli $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi^{(1)}$, to $\vdash \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$ 3.1.1.-3.1.2.
   - 3.3. jeżeli $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$, to $\vdash \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$ 3., 3.2., Etap 2
   - 3.4. $\vdash \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$ 2., 3.3.
4. jeżeli $\vdash \varphi^{(1)}, \Pi \Rightarrow \Sigma$, to $\vdash \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$ 3.1. - 3.4.
5. jeżeli $\vdash \varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma$, to $\vdash \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$ 2., 4., Etap 1
6. $\vdash \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$ 3., 5.

Dopuszczalność Cut w LK

Dowody poszczególnych etapów:

Dopuszczalność Cut w LK

Dowody poszczególnych etapów:

Dowód etapu 3 wygląda dokładnie tak samo jak dowód kroku indukcyjnego po długości formuły przy założonym rank=2 w dowodzie Gentzena (punkt 3.2 i punkt 4 u Dragalina).

Dopuszczalność Cut w LK

Dowody poszczególnych etapów:

Dowód etapu 3 wygląda dokładnie tak samo jak dowód kroku indukcyjnego po długości formuły przy założonym rank=2 w dowodzie Gentzena (punkt 3.2 i punkt 4 u Dragalina).
Punkty 1 i 2 są dowodzone niezależnie i każdy z nich może być udowodniony na różne sposoby:

Dopuszczalność Cut w LK

Dowody poszczególnych etapów:

Dowód etapu 3 wygląda dokładnie tak samo jak dowód kroku indukcyjnego po długości formuły przy założonym rank=2 w dowodzie Gentzena (punkt 3.2 i punkt 4 u Dragalina).
Punkty 1 i 2 są dowodzone niezależnie i każdy z nich może być udowodniony na różne sposoby:

- tak jak u Gentzena (punkty A i B), za pomocą lokalnych transformacji redukujących długość dowodu jednej z przesłanek

Dopuszczalność Cut w LK

Dowody poszczególnych etapów:

Dowód etapu 3 wygląda dokładnie tak samo jak dowód kroku indukcyjnego po długości formuły przy założonym rank=2 w dowodzie Gentzena (punkt 3.2 i punkt 4 u Dragalina).
Punkty 1 i 2 są dowodzone niezależnie i każdy z nich może być udowodniony na różne sposoby:

- tak jak u Gentzena (punkty A i B), za pomocą lokalnych transformacji redukujących długość dowodu jednej z przesłanek
- u Curry'ego – oparty na globalnych przekształceniach dowodu odpowiedniej przesłanki (odwołuje się do ustalonych wyżej własności reguł LK)

Dopuszczalność Cut w LK

Dowody poszczególnych etapów:

Dowód etapu 3 wygląda dokładnie tak samo jak dowód kroku indukcyjnego po długości formuły przy założonym rank=2 w dowodzie Gentzena (punkt 3.2 i punkt 4 u Dragalina).

Punkty 1 i 2 są dowodzone niezależnie i każdy z nich może być udowodniony na różne sposoby:

- tak jak u Gentzena (punkty A i B), za pomocą lokalnych transformacji redukujących długość dowodu jednej z przesłanek
- u Curry'ego – oparty na globalnych przekształceniach dowodu odpowiedniej przesłanki (odwołuje się do ustalonych wyżej własności reguł LK)
- można też przeprowadzić dowód przez odwołanie się do inwersji reguł.

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego

Różnice z dowodem Gentzena:

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego

Różnice z dowodem Gentzena:

- pokazuje nie jak eliminować (Cut) z dowodu ale, że jego dołączenie nie wzmacnie systemu

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego

Różnice z dowodem Gentzena:

- pokazuje nie jak eliminować (Cut) z dowodu ale, że jego dołączenie nie wzmacnie systemu
- bezpośrednio dla (Cut) a nie dla (Mix)

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego

Różnice z dowodem Gentzena:

- pokazuje nie jak eliminować (Cut) z dowodu ale, że jego dołączenie nie wzmacnie systemu
- bezpośrednio dla (Cut) a nie dla (Mix)
- dla RS na sekwentach zbudowanych ze zbiorów (oryginalna wersja na alternatywach)

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego

Różnice z dowodem Gentzena:

- pokazuje nie jak eliminować (Cut) z dowodu ale, że jego dołączenie nie wzmacnie systemu
- bezpośrednio dla (Cut) a nie dla (Mix)
- dla RS na sekwentach zbudowanych ze zbiorów (oryginalna wersja na alternatywach)
- indukcja na 2 parametrach (nie na 3)

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego

Różnice z dowodem Gentzena:

- pokazuje nie jak eliminować (Cut) z dowodu ale, że jego dołączenie nie wzmacnie systemu
- bezpośrednio dla (Cut) a nie dla (Mix)
- dla RS na sekwentach zbudowanych ze zbiorów (oryginalna wersja na alternatywach)
- indukcja na 2 parametrach (nie na 3)
- indukcja nie po głębokości ale po długości dowodu przesłanki (Cut)

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego

Różnice z dowodem Gentzena:

- pokazuje nie jak eliminować (Cut) z dowodu ale, że jego dołączenie nie wzmacnie systemu
- bezpośrednio dla (Cut) a nie dla (Mix)
- dla RS na sekwentach zbudowanych ze zbiorów (oryginalna wersja na alternatywach)
- indukcja na 2 parametrach (nie na 3)
- indukcja nie po głębokości ale po długości dowodu przesłanki (Cut)
- bazuje na lemacie o inwersji reguł i dopuszczalności (W)

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego.

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego.

Dowodzimy, że jeżeli $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ i $\vdash \varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma$, to również $\vdash \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$.

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego.

Dowodzimy, że jeżeli $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ i $\vdash \varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma$, to również $\vdash \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$.
Dowód przeprowadzamy przez indukcję po długości φ a w jego obrębie dodatkowo przez indukcję po długości dowodu jednej z przesłanek (Cut).

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego.

Dowodzimy, że jeżeli $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ i $\vdash \varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma$, to również $\vdash \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$.
Dowód przeprowadzamy przez indukcję po długości φ a w jego obrębie dodatkowo przez indukcję po długości dowodu jednej z przesłanek (Cut).
Dodatkowo zakładamy, że aksjomaty mają postać $\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$, gdzie $\varphi \in ZZ$. Oczywiście nie osłabia to systemu, bo Twierdzenie 7 zachodzi też dla ARS, a przez dopuszczalność (W) $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ dla dowolnego $\Gamma \cap \Delta \neq \varnothing$. Założenie to jedynie upraszcza dowód.

Dopuszczalność Cut w ARS

Schemat dowodu dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

Dopuszczalność Cut w ARS

Schemat dowodu dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

I. Indukcja po długości cut-formuły

Dopuszczalność Cut w ARS

Schemat dowodu dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

I. Indukcja po długości cut-formuły

1.1. Baza: (Cut) na cut-formule o długości 0 jest dopuszczalny

Dopuszczalność Cut w ARS

Schemat dowodu dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

I. Indukcja po długości cut-formuły

1.1. Baza: (Cut) na cut-formule o długości 0 jest dopuszczalny

II. Indukcja po długości dowodu (lewej) przesłanki (Cut)

Dopuszczalność Cut w ARS

Schemat dowodu dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

I. Indukcja po długości cut-formuły

1.1. Baza: (Cut) na cut-formule o długości 0 jest dopuszczalny

II. Indukcja po długości dowodu (lewej) przesłanki (Cut)

2.1. Baza: (Cut) z lewą przesłanką o dowodzie długości 0 jest dopuszczalny

Dopuszczalność Cut w ARS

Schemat dowodu dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

I. Indukcja po długości cut-formuły

1.1. Baza: (Cut) na cut-formule o długości 0 jest dopuszczalny

II. Indukcja po długości dowodu (lewej) przesłanki (Cut)

2.1. Baza: (Cut) z lewą przesłanką o dowodzie długości 0 jest dopuszczalny

2.2. Krok indukcyjny: Jeżeli (Cut) z lewą przesłanką o dowodzie długości $< n$ jest dopuszczalny, to o dowodzie długości n też jest dopuszczalny

Dopuszczalność Cut w ARS

Schemat dowodu dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

I. Indukcja po długości cut-formuły

1.1. Baza: (Cut) na cut-formule o długości 0 jest dopuszczalny

II. Indukcja po długości dowodu (lewej) przesłanki (Cut)

2.1. Baza: (Cut) z lewą przesłanką o dowodzie długości 0 jest dopuszczalny

2.2. Krok indukcyjny: Jeżeli (Cut) z lewą przesłanką o dowodzie długości $< n$ jest dopuszczalny, to o dowodzie długości n też jest dopuszczalny

Wniosek z 2.1., 2.2: (Cut) o na cut-formule o długości 0 jest dopuszczalny bez względu na długość dowodu lewej przesłanki

Dopuszczalność Cut w ARS

Schemat dowodu dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

I. Indukcja po długości cut-formuły

1.1. Baza: (Cut) na cut-formule o długości 0 jest dopuszczalny

II. Indukcja po długości dowodu (lewej) przesłanki (Cut)

2.1. Baza: (Cut) z lewą przesłanką o dowodzie długości 0 jest dopuszczalny

2.2. Krok indukcyjny: Jeżeli (Cut) z lewą przesłanką o dowodzie długości $< n$ jest dopuszczalny, to o dowodzie długości n też jest dopuszczalny

Wniosek z 2.1., 2.2: (Cut) o na cut-formule o długości 0 jest dopuszczalny bez względu na długość dowodu lewej przesłanki

1.2. Krok indukcyjny: Jeżeli (Cut) na cut-formule o długości $< n$ jest dopuszczalny, to dla cut-formuły o długości n też jest dopuszczalny

Dopuszczalność Cut w ARS

Schemat dowodu dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

I. Indukcja po długości cut-formuły

1.1. Baza: (Cut) na cut-formule o długości 0 jest dopuszczalny

II. Indukcja po długości dowodu (lewej) przesłanki (Cut)

2.1. Baza: (Cut) z lewą przesłanką o dowodzie długości 0 jest dopuszczalny

2.2. Krok indukcyjny: Jeżeli (Cut) z lewą przesłanką o dowodzie długości $< n$ jest dopuszczalny, to o dowodzie długości n też jest dopuszczalny

Wniosek z 2.1., 2.2: (Cut) o na cut-formule o długości 0 jest dopuszczalny bez względu na długość dowodu lewej przesłanki

1.2. Krok indukcyjny: Jeżeli (Cut) na cut-formule o długości $< n$ jest dopuszczalny, to dla cut-formuły o długości n też jest dopuszczalny

Wniosek z 1.1., 1.2: (Cut) na dowolnej formule jest dopuszczalny

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

P. 1.1. Zakładamy, że φ jest zmienną

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

P. 1.1. Zakładamy, że φ jest zmienną

P. 2.1. Zakładamy, że dowód lewej przesłanki (Cut) $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ jest długości 0, tzn. jest aksjomatem.

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

P. 1.1. Zakładamy, że φ jest zmienną
P. 2.1. Zakładamy, że dowód lewej przesłanki (Cut) $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ jest długości 0, tzn. jest aksjomatem.
2 przypadki:

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

P. 1.1. Zakładamy, że φ jest zmienną
P. 2.1. Zakładamy, że dowód lewej przesłanki (Cut) $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ jest długości 0, tzn. jest aksjomatem.
2 przypadki:
a) $\Gamma \cap \Delta \neq \varnothing$ $(\varphi \notin \Gamma)$

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

P. 1.1. Zakładamy, że φ jest zmienną
P. 2.1. Zakładamy, że dowód lewej przesłanki (Cut) $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ jest długości 0, tzn. jest aksjomatem.
2 przypadki:
a) $\Gamma \cap \Delta \neq \varnothing$ ($\varphi \notin \Gamma$)
wtedy $\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$ też jest aksjomatem.

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

P. 1.1. Zakładamy, że φ jest zmienną
P. 2.1. Zakładamy, że dowód lewej przesłanki (Cut) $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ jest długości 0, tzn. jest aksjomatem.
2 przypadki:
a) $\Gamma \cap \Delta \neq \varnothing$ ($\varphi \notin \Gamma$)
wtedy $\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$ też jest aksjomatem.
b) $\Gamma \cap \Delta = \varnothing$ (tzn. φ jest formułą zasadniczą i $\Gamma = \Gamma', \varphi$)

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

P. 1.1. Zakładamy, że φ jest zmienną
P. 2.1. Zakładamy, że dowód lewej przesłanki (Cut) $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ jest długości 0, tzn. jest aksjomatem.
2 przypadki:
a) $\Gamma \cap \Delta \neq \varnothing$ ($\varphi \notin \Gamma$)
wtedy $\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$ też jest aksjomatem.
b) $\Gamma \cap \Delta = \varnothing$ (tzn. φ jest formułą zasadniczą i $\Gamma = \Gamma', \varphi$)
ponieważ prawa przesłanka $\varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma$ ma dowód, więc, przez dopuszczalność (W), $\Gamma', \varphi, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$ też ma dowód.

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

P. 1.1., 2.2. założenie indukcyjne: (Cut) na zmiennej φ z lewą przesłanką o dowodzie długości $< n$ jest dopuszczalny.

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

P. 1.1., 2.2. założenie indukcyjne: (Cut) na zmiennej φ z lewą przesłanką o dowodzie długości $< n$ jest dopuszczalny.
Dowodzimy, że (Cut) na zmiennej φ z lewą przesłanką o dowodzie długości n też jest dopuszczalny.

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

P. 1.1., 2.2. założenie indukcyjne: (Cut) na zmiennej φ z lewą przesłanką o dowodzie długości $< n$ jest dopuszczalny.
Dowodzimy, że (Cut) na zmiennej φ z lewą przesłanką o dowodzie długości n też jest dopuszczalny.
Dowód przez rozważenie wszystkich przypadków, które doprowadziły do dedukcji $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$.

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

P. 1.1., 2.2. założenie indukcyjne: (Cut) na zmiennej φ z lewą przesłanką o dowodzie długości $< n$ jest dopuszczalny.
Dowodzimy, że (Cut) na zmiennej φ z lewą przesłanką o dowodzie długości n też jest dopuszczalny.
Dowód przez rozważenie wszystkich przypadków, które doprowadziły do dedukcji $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$.
Uwaga: ponieważ φ jest zmienną więc w grę wchodzą tylko takie przekształcenia gdzie była formułą parametryczną.

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

P. 1.1., P. 2.2. Przypadek $(\Rightarrow \neg)$

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

P. 1.1., P. 2.2. Przypadek ($\Rightarrow \neg$)

$\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi := \Gamma \Rightarrow \Delta', \neg\psi, \varphi$ i wydedukowana z $\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta', \varphi$.

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

P. 1.1., P. 2.2. Przypadek $(\Rightarrow \neg)$
$\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi := \Gamma \Rightarrow \Delta', \neg\psi, \varphi$ i wydedukowana z $\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta', \varphi$.
Sekwent-przesłanka ma dowód długości $n-1$ zatem podpada pod zał. ind., tzn. jeżeli $\vdash \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta', \varphi$ i $\vdash \varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma$ (tj. prawa przesłanka), to również dowiedlne jest $\psi, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta', \Sigma$, skąd przez $(\Rightarrow \neg)$ mamy $\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta', \neg\psi, \Sigma := \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$.

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

P. 1.1., P. 2.2. Przypadek $(\Rightarrow \wedge)$

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

P. 1.1., P. 2.2. Przypadek $(\Rightarrow \wedge)$

$\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi := \Gamma \Rightarrow \Delta', \psi \wedge \chi, \varphi$ i wydedukowana z $\Gamma \Rightarrow \Delta', \psi, \varphi$ oraz $\Gamma \Rightarrow \Delta', \chi, \varphi$.

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

P. 1.1., P. 2.2. Przypadek $(\Rightarrow \wedge)$
$\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi := \Gamma \Rightarrow \Delta', \psi \wedge \chi, \varphi$ i wydedukowana z $\Gamma \Rightarrow \Delta', \psi, \varphi$ oraz $\Gamma \Rightarrow \Delta', \chi, \varphi$.
Oba sekwenty-przesłanki mają dowody długości $< n$ zatem podpadają pod zał. ind., tzn., że (w połączeniu z prawą przesłanką) dowiedlne jest zarówno $\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta', \Sigma, \psi$, jak i $\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta', \Sigma, \chi$, skąd przez $(\Rightarrow \wedge)$ mamy $\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta', \psi \wedge \chi, \Sigma := \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$.

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

P. 1.1., P. 2.2. Przypadek $(\Rightarrow \wedge)$
$\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi := \Gamma \Rightarrow \Delta', \psi \wedge \chi, \varphi$ i wydedukowana z $\Gamma \Rightarrow \Delta', \psi, \varphi$ oraz $\Gamma \Rightarrow \Delta', \chi, \varphi$.
Oba sekwenty-przesłanki mają dowody długości $< n$ zatem podpadają pod zał. ind., tzn., że (w połączeniu z prawą przesłanką) dowiedlne jest zarówno $\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta', \Sigma, \psi$, jak i $\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta', \Sigma, \chi$, skąd przez $(\Rightarrow \wedge)$ mamy $\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta', \psi \wedge \chi, \Sigma := \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$.
Zadanie: dowiedź pozostałe przypadki

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

P. 1.1., P. 2.2. Przypadek $(\Rightarrow \wedge)$
$\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi := \Gamma \Rightarrow \Delta', \psi \wedge \chi, \varphi$ i wydedukowana z $\Gamma \Rightarrow \Delta', \psi, \varphi$ oraz $\Gamma \Rightarrow \Delta', \chi, \varphi$.
Oba sekwenty-przesłanki mają dowody długości $< n$ zatem podpadają pod zał. ind., tzn., że (w połączeniu z prawą przesłanką) dowiedlne jest zarówno $\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta', \Sigma, \psi$, jak i $\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta', \Sigma, \chi$, skąd przez $(\Rightarrow \wedge)$ mamy $\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta', \psi \wedge \chi, \Sigma := \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$.
Zadanie: dowiedź pozostałe przypadki
Dowiedliśmy (przez indukcję po długości dowodu lewej przesłanki), że dla dowolnej zmiennej φ jeżeli $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ i $\vdash \varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma$, to również $\vdash \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$.

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

P. 1.2. założenie indukcyjne: (Cut) na φ o długości $< n$ jest dopuszczalny.

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

P. 1.2. założenie indukcyjne: (Cut) na φ o długości $< n$ jest dopuszczalny.
Dowodzimy, że (Cut) na φ o długości n też jest dopuszczalny.

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

P. 1.2. założenie indukcyjne: (Cut) na φ o długości $< n$ jest dopuszczalny.
Dowodzimy, że (Cut) na φ o długości n też jest dopuszczalny.
Dowód przez rozważenie wszystkich przypadków φ.

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

P. 1.2. założenie indukcyjne: (Cut) na φ o długości $< n$ jest dopuszczalny.
Dowodzimy, że (Cut) na φ o długości n też jest dopuszczalny.
Dowód przez rozważenie wszystkich przypadków φ.

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

P. 1.2. przypadek $\varphi := \neg\psi$

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

P. 1.2. przypadek $\varphi := \neg\psi$

Obie przesłanki (Cut) mają postać $\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\psi$ i $\neg\psi, \Pi \Rightarrow \Sigma$.

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

P. 1.2. przypadek $\varphi := \neg\psi$
Obie przesłanki (Cut) mają postać $\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\psi$ i $\neg\psi, \Pi \Rightarrow \Sigma$.
Z lematu o inwersji dowód mają też ich przesłanki, tj. $\vdash \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta$ i $\vdash \Pi \Rightarrow \Sigma, \psi$, zatem z zał. ind. (bo ψ ma długość $n-1$) dowiedlne jest $\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$.

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

P. 1.2. przypadek $\varphi := \psi \wedge \chi$

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

P. 1.2. przypadek $\varphi := \psi \wedge \chi$

Obie przesłanki (Cut) mają postać $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \chi$ i $\psi \wedge \chi, \Pi \Rightarrow \Sigma$.

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

P. 1.2. przypadek $\varphi := \psi \wedge \chi$
Obie przesłanki (Cut) mają postać $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \chi$ i $\psi \wedge \chi, \Pi \Rightarrow \Sigma$.
Z lematu o inwersji dowód mają też ich przesłanki, tj. (i) $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi$, (ii) $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta, \chi$ i (iii) $\vdash \psi, \chi, \Pi \Rightarrow \Sigma$, zatem z zał. ind. (bo ψ i χ mają długość $< n$), (i) i (iii) dowiedlne jest $\chi, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$, skąd, przez (ii) i zał. ind. mamy dowód $\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$.

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

P. 1.2. przypadek $\varphi := \psi \wedge \chi$
Obie przesłanki (Cut) mają postać $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \chi$ i $\psi \wedge \chi, \Pi \Rightarrow \Sigma$.
Z lematu o inwersji dowód mają też ich przesłanki, tj. (i) $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi$, (ii) $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta, \chi$ i (iii) $\vdash \psi, \chi, \Pi \Rightarrow \Sigma$, zatem z zał. ind. (bo ψ i χ mają długość $< n$), (i) i (iii) dowiedlne jest $\chi, \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$, skąd, przez (ii) i zał. ind. mamy dowód $\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$.
Zadanie: dowiedź pozostałe przypadki

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

Dowiedliśmy (przez indukcję po długości cut-formuły), że dla dowolnej φ jeżeli $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ i $\vdash \varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma$, to również $\vdash \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$.

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Schüttego:

Dowiedliśmy (przez indukcję po długości cut-formuły), że dla dowolnej φ jeżeli $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ i $\vdash \varphi, \Pi \Rightarrow \Sigma$, to również $\vdash \Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Sigma$.
Zadanie: przeprowadź dowód dopuszczalności (Cut) symetrycznie, tzn. dokonując w P. 2.1., 2.2. indukcji po długości prawej przesłanki (Cut).

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Smullyana:

Różnice z dowodem Gentzena:

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Smullyana:

Różnice z dowodem Gentzena:

- pokazuje nie jak eliminować (Cut) z dowodu ale, że jego dołączenie nie wzmacnie systemu

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Smullyana:

Różnice z dowodem Gentzena:

- pokazuje nie jak eliminować (Cut) z dowodu ale, że jego dołączenie nie wzmacnie systemu
- bezpośrednio dla (Cut) w wersji k-jednolitej

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Smullyana:

Różnice z dowodem Gentzena:

- pokazuje nie jak eliminować (Cut) z dowodu ale, że jego dołączenie nie wzmacnie systemu
- bezpośrednio dla (Cut) w wersji k-jednolitej
- dla RS na sekwentach zbudowanych ze zbiorów (oryginalna wersja na systemie tablicowym)

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Smullyana:

Różnice z dowodem Gentzena:

- pokazuje nie jak eliminować (Cut) z dowodu ale, że jego dołączenie nie wzmacnie systemu
- bezpośrednio dla (Cut) w wersji k-jednolitej
- dla RS na sekwentach zbudowanych ze zbiorów (oryginalna wersja na systemie tablicowym)
- indukcja na 2 parametrach (nie na 3)

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Smullyana:

Różnice z dowodem Gentzena:

- pokazuje nie jak eliminować (Cut) z dowodu ale, że jego dołączenie nie wzmacnie systemu
- bezpośrednio dla (Cut) w wersji k-jednolitej
- dla RS na sekwentach zbudowanych ze zbiorów (oryginalna wersja na systemie tablicowym)
- indukcja na 2 parametrach (nie na 3)
- indukcja po łącznej długości dowodu przesłanek (Cut)

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Smullyana:

Różnice z dowodem Gentzena:

- pokazuje nie jak eliminować (Cut) z dowodu ale, że jego dołączenie nie wzmacnie systemu
- bezpośrednio dla (Cut) w wersji k-jednolitej
- dla RS na sekwentach zbudowanych ze zbiorów (oryginalna wersja na systemie tablicowym)
- indukcja na 2 parametrach (nie na 3)
- indukcja po łącznej długości dowodu przesłanek (Cut)
- bazuje na lemacie o dopuszczalności (W)

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Smullyana:

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Smullyana:

Wprowadzimy następujące oznaczenia:

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Smullyana:

Wprowadzimy następujące oznaczenia:

- $\vdash \Gamma \Rightarrow^{\varphi}_{k} \Delta$ oznacza, że $\Gamma \Rightarrow \Delta$ ma dowód o długości k, w którym ostatnia zastosowana reguła była na formułe $\varphi \in \Gamma \cup \Delta$, tzn. φ jest formułą zasadniczą w $\Gamma \Rightarrow \Delta$.

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Smullyana:

Wprowadzimy następujące oznaczenia:

- $\vdash \Gamma \Rightarrow_k^{\varphi} \Delta$ oznacza, że $\Gamma \Rightarrow \Delta$ ma dowód o długości k, w którym ostatnia zastosowana reguła była na formułe $\varphi \in \Gamma \cup \Delta$, tzn. φ jest formułą zasadniczą w $\Gamma \Rightarrow \Delta$.
- $\vdash \Gamma \Rightarrow_k \Delta$ wtw $k = 0$ (aksjomat) lub $k > 0$ i $\exists \varphi$ takie, że $\vdash \Gamma \Rightarrow_k^{\varphi} \Delta$. Oczywiście $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ oznacza, że $\exists k$ takie, że $\vdash \Gamma \Rightarrow_k \Delta$

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Smullyana:

Wprowadzimy następujące oznaczenia:

- $\vdash \Gamma \Rightarrow^{\varphi}_{k} \Delta$ oznacza, że $\Gamma \Rightarrow \Delta$ ma dowód o długości k, w którym ostatnia zastosowana reguła była na formułe $\varphi \in \Gamma \cup \Delta$, tzn. φ jest formułą zasadniczą w $\Gamma \Rightarrow \Delta$.
- $\vdash \Gamma \Rightarrow_{k} \Delta$ wtw $k = 0$ (aksjomat) lub $k > 0$ i $\exists\varphi$ takie, że $\vdash \Gamma \Rightarrow^{\varphi}_{k} \Delta$. Oczywiście $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ oznacza, że $\exists k$ takie, że $\vdash \Gamma \Rightarrow_{k} \Delta$
- φ jest k-eliminowalne wtw jest cut-formułą takiego zastosowania (Cut), w którym suma długości dowodów obu przesłanek wynosi k.

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Smullyana:

Wprowadzimy następujące oznaczenia:

- $\vdash \Gamma \Rightarrow_k^\varphi \Delta$ oznacza, że $\Gamma \Rightarrow \Delta$ ma dowód o długości k, w którym ostatnia zastosowana reguła była na formułe $\varphi \in \Gamma \cup \Delta$, tzn. φ jest formułą zasadniczą w $\Gamma \Rightarrow \Delta$.
- $\vdash \Gamma \Rightarrow_k \Delta$ wtw $k = 0$ (aksjomat) lub $k > 0$ i $\exists \varphi$ takie, że $\vdash \Gamma \Rightarrow_k^\varphi \Delta$. Oczywiście $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$ oznacza, że $\exists k$ takie, że $\vdash \Gamma \Rightarrow_k \Delta$
- φ jest k-eliminowalne wtw jest cut-formułą takiego zastosowania (Cut), w którym suma długości dowodów obu przesłanek wynosi k.
- φ jest eliminowalne wtw φ jest k-eliminowalne dla dowolnego k.

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Smullyana:

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Smullyana:

Lemat S: Dla dowolnego $i, j < k$,

1. jeżeli $\vdash \Gamma \Rightarrow_k^{\neg\varphi} \Delta, \neg\varphi$, to $\vdash \Gamma, \varphi \Rightarrow_i \Delta, \neg\varphi$
2. jeżeli $\vdash \Gamma, \neg\varphi \Rightarrow_k^{\neg\varphi} \Delta$, to $\vdash \Gamma \Rightarrow_i \Delta, , \varphi, \neg\varphi$
3. jeżeli $\vdash \Gamma \Rightarrow_k^{\varphi\wedge\psi} \Delta, \varphi \wedge \psi$, to $\vdash \Gamma \Rightarrow_i \Delta, \varphi, \varphi \wedge \psi$ oraz $\vdash \Gamma \Rightarrow_j \Delta, \psi, \varphi \wedge \psi$
4. jeżeli $\vdash \Gamma, \varphi \wedge \psi \Rightarrow_k^{\varphi\wedge\psi} \Delta$, to $\vdash \Gamma, \varphi, \psi, \varphi \wedge \psi \Rightarrow_i \Delta$
5. jeżeli $\vdash \Gamma \Rightarrow_k^{\varphi\vee\psi} \Delta, \varphi \vee \psi$, to $\vdash \Gamma \Rightarrow_i \Delta, \varphi, \psi, \varphi \vee \psi$
6. jeżeli $\vdash \Gamma, \varphi \vee \psi \Rightarrow_k^{\varphi\vee\psi} \Delta$, to $\vdash \Gamma, \varphi, \varphi \vee \psi \Rightarrow_i \Delta$ oraz $\vdash \Gamma, \psi, \varphi \vee \psi \Rightarrow_j \Delta$
7. jeżeli $\vdash \Gamma \Rightarrow_k^{\varphi\to\psi} \Delta, \varphi \to \psi$, to $\vdash \Gamma, \varphi \Rightarrow_i \Delta, \psi, \varphi \to \psi$
8. jeżeli $\vdash \Gamma, \varphi \to \psi \Rightarrow_k^{\varphi\to\psi} \Delta$, to $\vdash \Gamma, \psi, \varphi \to \psi \Rightarrow_i \Delta$ oraz $\vdash \Gamma\varphi \to \psi \Rightarrow_j \Delta, \varphi$

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Smullyana:

Dowód jest trywialny i opiera się na dopuszczalności (W).

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Smullyana:

Dowód jest trywialny i opiera się na dopuszczalności (W).
Rozważmy przypadek 3:

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Smullyana:

Dowód jest trywialny i opiera się na dopuszczalności (W).
Rozważmy przypadek 3:
jeżeli $\vdash \Gamma \Rightarrow_k^{\varphi \wedge \psi} \Delta, \varphi \wedge \psi$, to $\vdash \Gamma \Rightarrow_i \Delta, \varphi, \varphi \wedge \psi$ oraz $\vdash \Gamma \Rightarrow_j \Delta, \psi, \varphi \wedge \psi$

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Smullyana:

Dowód jest trywialny i opiera się na dopuszczalności (W).
Rozważmy przypadek 3:
jeżeli $\vdash \Gamma \Rightarrow_k^{\varphi \wedge \psi} \Delta, \varphi \wedge \psi$, to $\vdash \Gamma \Rightarrow_i \Delta, \varphi, \varphi \wedge \psi$ oraz $\vdash \Gamma \Rightarrow_j \Delta, \psi, \varphi \wedge \psi$
Dowód:
Jeżeli $\vdash \Gamma \Rightarrow_k^{\varphi \wedge \psi} \Delta, \varphi \wedge \psi$, to w dowodzie bezpośrednio poprzedają go sekwenty $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ oraz $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi$, których dowody są krótsze od k.

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Smullyana:

Dowód jest trywialny i opiera się na dopuszczalności (W).
Rozważmy przypadek 3:
jeżeli $\vdash \Gamma \Rightarrow_k^{\varphi \wedge \psi} \Delta, \varphi \wedge \psi$, to $\vdash \Gamma \Rightarrow_i \Delta, \varphi, \varphi \wedge \psi$ oraz $\vdash \Gamma \Rightarrow_j \Delta, \psi, \varphi \wedge \psi$
Dowód:
Jeżeli $\vdash \Gamma \Rightarrow_k^{\varphi \wedge \psi} \Delta, \varphi \wedge \psi$, to w dowodzie bezpośrednio poprzedają go sekwenty $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ oraz $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi$, których dowody są krótsze od k.
Przez dopuszczalność (W) otrzymujemy dowody $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \varphi \wedge \psi$ oraz $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi, \varphi \wedge \psi$ z tą samą długością.

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Smullyana:

Dowód jest trywialny i opiera się na dopuszczalności (W).
Rozważmy przypadek 3:
jeżeli $\vdash \Gamma \Rightarrow_k^{\varphi \wedge \psi} \Delta, \varphi \wedge \psi$, to $\vdash \Gamma \Rightarrow_i \Delta, \varphi, \varphi \wedge \psi$ oraz $\vdash \Gamma \Rightarrow_j \Delta, \psi, \varphi \wedge \psi$
Dowód:
Jeżeli $\vdash \Gamma \Rightarrow_k^{\varphi \wedge \psi} \Delta, \varphi \wedge \psi$, to w dowodzie bezpośrednio poprzedają go sekwenty $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ oraz $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi$, których dowody są krótsze od k.
Przez dopuszczalność (W) otrzymujemy dowody $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \varphi \wedge \psi$ oraz $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi, \varphi \wedge \psi$ z tą samą długością.
Dla innych przypadków analogicznie.

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Smullyana:

Dowód jest trywialny i opiera się na dopuszczalności (W).
Rozważmy przypadek 3:
jeżeli $\vdash \Gamma \Rightarrow_k^{\varphi\wedge\psi} \Delta, \varphi\wedge\psi$, to $\vdash \Gamma \Rightarrow_i \Delta, \varphi, \varphi\wedge\psi$ oraz $\vdash \Gamma \Rightarrow_j \Delta, \psi, \varphi\wedge\psi$
Dowód:
Jeżeli $\vdash \Gamma \Rightarrow_k^{\varphi\wedge\psi} \Delta, \varphi\wedge\psi$, to w dowodzie bezpośrednio poprzedają go sekwenty $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ oraz $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi$, których dowody są krótsze od k.
Przez dopuszczalność (W) otrzymujemy dowody $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \varphi\wedge\psi$ oraz $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi, \varphi\wedge\psi$ z tą samą długością.
Dla innych przypadków analogicznie.
Uwaga: Jest to osłabiona wersja lematu o inwersji reguł.

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Smullyana:

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Smullyana:

Aby dowieść twierdzenia, które mówi, że każde φ jest eliminowalne Smullyan dowodzi twierdzenia pomocniczego:

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Smullyana:

Aby dowieść twierdzenia, które mówi, że każde φ jest eliminowalne Smullyan dowodzi twierdzenia pomocniczego:
Dla dowolnych n, k, dowolne φ długości n jest k-eliminowalne, jeżeli spełnione są warunki:

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Smullyana:

Aby dowieść twierdzenia, które mówi, że każde φ jest eliminowalne Smullyan dowodzi twierdzenia pomocniczego:
Dla dowolnych n, k, dowolne φ długości n jest k-eliminowalne, jeżeli spełnione są warunki:

- c1 dowolne ψ długości mniejszej od n jest eliminowalne

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Smullyana:

Aby dowieść twierdzenia, które mówi, że każde φ jest eliminowalne Smullyan dowodzi twierdzenia pomocniczego:
Dla dowolnych n, k, dowolne φ długości n jest k-eliminowalne, jeżeli spełnione są warunki:

- c1 dowolne ψ długości mniejszej od n jest eliminowalne
- c2 dowolne ψ długości n jest k'-eliminowalne, dla $k' < k$

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Smullyana:

Aby dowieść twierdzenia, które mówi, że każde φ jest eliminowalne Smullyan dowodzi twierdzenia pomocniczego:
Dla dowolnych n, k, dowolne φ długości n jest k-eliminowalne, jeżeli spełnione są warunki:

- c1 dowolne ψ długości mniejszej od n jest eliminowalne
- c2 dowolne ψ długości n jest k'-eliminowalne, dla $k' < k$

Załóżmy, że spełnione są podane wyżej warunki.

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Smullyana:

Aby dowieść twierdzenia, które mówi, że każde φ jest eliminowalne Smullyan dowodzi twierdzenia pomocniczego:
Dla dowolnych n, k, dowolne φ długości n jest k-eliminowalne, jeżeli spełnione są warunki:

- c1 dowolne ψ długości mniejszej od n jest eliminowalne
- c2 dowolne ψ długości n jest k'-eliminowalne, dla $k' < k$

Załóżmy, że spełnione są podane wyżej warunki.
Dowodzimy, że φ długości n jest k-eliminowalne, tzn. przy założeniu, że (1) $\vdash \Gamma \Rightarrow_{k1} \Delta, \varphi$ i (2) $\vdash \varphi, \Gamma \Rightarrow_{k2} \Delta$, gdzie $k = k1 + k2$ dowodzimy, że $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Smullyana:

Zauważmy, że zachodzi alternatywa: A1 $k1 = 0$ lub $k2 = 0$, albo A2 $k \geq 1$ i $k2 \geq 1$.

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Smullyana:

Zauważmy, że zachodzi alternatywa: A1 $k1 = 0$ lub $k2 = 0$, albo A2 $k \geq 1$ i $k2 \geq 1$.

Rozważmy A1 i przyjmijmy, że $k1 = 0$, zatem $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ jest aksjomatem i $\exists \psi$ takie, że $\psi \in \Gamma \cap (\Delta \cup \{\varphi\})$. $\psi = \varphi$ lub nie,

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Smullyana:

Zauważmy, że zachodzi alternatywa: A1 $k1 = 0$ lub $k2 = 0$, albo A2 $k \geq 1$ i $k2 \geq 1$.

Rozważmy A1 i przyjmijmy, że $k1 = 0$, zatem $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ jest aksjomatem i $\exists \psi$ takie, że $\psi \in \Gamma \cap (\Delta \cup \{\varphi\})$. $\psi = \varphi$ lub nie, jeżeli to drugie, to $\psi \in \Gamma \cap \Delta$ i $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$.

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Smullyana:

Zauważmy, że zachodzi alternatywa: A1 $k1 = 0$ lub $k2 = 0$, albo A2 $k \geq 1$ i $k2 \geq 1$.
Rozważmy A1 i przyjmijmy, że $k1 = 0$, zatem $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ jest aksjomatem i $\exists \psi$ takie, że $\psi \in \Gamma \cap (\Delta \cup \{\varphi\})$. $\psi = \varphi$ lub nie, jeżeli to drugie, to $\psi \in \Gamma \cap \Delta$ i $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$.
Jeżeli $\psi = \varphi$, to $\Gamma \Rightarrow \Delta := \varphi, \Gamma' \Rightarrow \Delta$ ale z założenia (2) taki sekwent jest dowiedlny bo
$\varphi, \Gamma' \Rightarrow \Delta := \varphi, \varphi, \Gamma' \Rightarrow \Delta := \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$.

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Smullyana:

Zauważmy, że zachodzi alternatywa: A1 $k1 = 0$ lub $k2 = 0$, albo A2 $k \geq 1$ i $k2 \geq 1$.
Rozważmy A1 i przyjmijmy, że $k1 = 0$, zatem $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ jest aksjomatem i $\exists\psi$ takie, że $\psi \in \Gamma \cap (\Delta \cup \{\varphi\})$. $\psi = \varphi$ lub nie, jeżeli to drugie, to $\psi \in \Gamma \cap \Delta$ i $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$.
Jeżeli $\psi = \varphi$, to $\Gamma \Rightarrow \Delta := \varphi, \Gamma' \Rightarrow \Delta$ ale z założenia (2) taki sekwent jest dowiedlny bo
$\varphi, \Gamma' \Rightarrow \Delta := \varphi, \varphi, \Gamma' \Rightarrow \Delta := \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$.
Dla $k2 = 0$ dowód analogiczny.

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Smullyana:

Zauważmy, że zachodzi alternatywa: A1 $k1 = 0$ lub $k2 = 0$, albo A2 $k \geq 1$ i $k2 \geq 1$.
Rozważmy A1 i przyjmijmy, że $k1 = 0$, zatem $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ jest aksjomatem i $\exists\psi$ takie, że $\psi \in \Gamma \cap (\Delta \cup \{\varphi\})$. $\psi = \varphi$ lub nie, jeżeli to drugie, to $\psi \in \Gamma \cap \Delta$ i $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$.
Jeżeli $\psi = \varphi$, to $\Gamma \Rightarrow \Delta := \varphi, \Gamma' \Rightarrow \Delta$ ale z założenia (2) taki sekwent jest dowiedlny bo
$\varphi, \Gamma' \Rightarrow \Delta := \varphi, \varphi, \Gamma' \Rightarrow \Delta := \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$.
Dla $k2 = 0$ dowód analogiczny.
A2: Załóżmy, że $k \geq 1$ i $k2 \geq 1$, wtedy (1') $\vdash \Gamma \Rightarrow^{\psi}_{k1} \Delta, \varphi$ i (2') $\vdash \varphi, \Gamma \Rightarrow^{\chi}_{k2} \Delta$ dla pewnych ψ, χ.

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Smullyana:

Zauważmy, że zachodzi alternatywa: A1 $k1 = 0$ lub $k2 = 0$, albo A2 $k \geq 1$ i $k2 \geq 1$.
Rozważmy A1 i przyjmijmy, że $k1 = 0$, zatem $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ jest aksjomatem i $\exists\psi$ takie, że $\psi \in \Gamma \cap (\Delta \cup \{\varphi\})$. $\psi = \varphi$ lub nie, jeżeli to drugie, to $\psi \in \Gamma \cap \Delta$ i $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$.
Jeżeli $\psi = \varphi$, to $\Gamma \Rightarrow \Delta := \varphi, \Gamma' \Rightarrow \Delta$ ale z założenia (2) taki sekwent jest dowiedlny bo
$\varphi, \Gamma' \Rightarrow \Delta := \varphi, \varphi, \Gamma' \Rightarrow \Delta := \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta$.
Dla $k2 = 0$ dowód analogiczny.
A2: Załóżmy, że $k \geq 1$ i $k2 \geq 1$, wtedy (1') $\vdash \Gamma \Rightarrow^{\psi}_{k1} \Delta, \varphi$ i (2') $\vdash \varphi, \Gamma \Rightarrow^{\chi}_{k2} \Delta$ dla pewnych ψ, χ.
Zauważmy, że zachodzi alternatywa: B1 $\varphi \neq \psi$ lub $\varphi \neq \chi$, albo B2 $\varphi = \psi$ i $\varphi = \chi$.

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Smullyana:

Rozważmy B1 i załóżmy $\varphi \neq \psi$.

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Smullyana:

Rozważmy B1 i załóżmy $\varphi \neq \psi$.
Musimy rozważyć przypadki ψ.

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Smullyana:

Rozważmy B1 i załóżmy $\varphi \neq \psi$.
Musimy rozważyć przypadki ψ.
B11. $\psi = \chi \vee \delta$ i należy do Δ czyli (1') wygląda następująco
$\vdash \Gamma \Rightarrow_{k1}^{\chi \vee \delta} \Delta', \chi \vee \delta, \varphi$.

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Smullyana:

Rozważmy B1 i załóżmy $\varphi \neq \psi$.
Musimy rozważyć przypadki ψ.
B11. $\psi = \chi \vee \delta$ i należy do Δ czyli (1') wygląda następująco
$\vdash \Gamma \Rightarrow_{k1}^{\chi \vee \delta} \Delta', \chi \vee \delta, \varphi$.
Przez lemat S $\vdash \Gamma \Rightarrow_i \Delta', \chi, \delta, \chi \vee \delta, \varphi$ dla $i < k1$.

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Smullyana:

Rozważmy B1 i załóżmy $\varphi \neq \psi$.
Musimy rozważyć przypadki ψ.
B11. $\psi = \chi \vee \delta$ i należy do Δ czyli (1') wygląda następująco
$\vdash \Gamma \Rightarrow^{\chi \vee \delta}_{k1} \Delta', \chi \vee \delta, \varphi$.
Przez lemat S $\vdash \Gamma \Rightarrow_i \Delta', \chi, \delta, \chi \vee \delta, \varphi$ dla $i < k1$.
Z założenia (2') $\vdash \varphi, \Gamma \Rightarrow_{k2} \Delta', \chi \vee \delta$, zatem przez dopuszczalność (W) $\vdash \varphi, \Gamma \Rightarrow_{k2} \Delta', \chi, \delta, \chi \vee \delta$.

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Smullyana:

Rozważmy B1 i załóżmy $\varphi \neq \psi$.
Musimy rozważyć przypadki ψ.
B11. $\psi = \chi \vee \delta$ i należy do Δ czyli (1') wygląda następująco
$\vdash \Gamma \Rightarrow_{k1}^{\chi \vee \delta} \Delta', \chi \vee \delta, \varphi$.
Przez lemat S $\vdash \Gamma \Rightarrow_i \Delta', \chi, \delta, \chi \vee \delta, \varphi$ dla $i < k1$.
Z założenia (2') $\vdash \varphi, \Gamma \Rightarrow_{k2} \Delta', \chi \vee \delta$, zatem przez dopuszczalność (W) $\vdash \varphi, \Gamma \Rightarrow_{k2} \Delta', \chi, \delta, \chi \vee \delta$.
Zatem mamy $\vdash \Gamma \Rightarrow_i \Delta, \chi, \delta, \varphi$ i $\vdash \varphi, \Gamma \Rightarrow_{k2} \Delta, \chi, \delta$, gdzie $i + k2 < k$, więc przez warunek c2 φ jest $i + k2$-eliminowalne, czyli $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta, \chi, \delta$, skąd przez $(\Rightarrow \vee)$ mamy $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$.

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Smullyana:

B12. $\psi = \chi \wedge \delta$ i należy do Δ czyli (1') wygląda następująco $\vdash \Gamma \Rightarrow^{\chi\wedge\delta}_{k1} \Delta', \chi \wedge \delta, \varphi$. Przez lemat S mamy (i) $\vdash \Gamma \Rightarrow_i \Delta', \chi, \chi \wedge \delta, \varphi$ oraz (ii) $\vdash \Gamma \Rightarrow_j \Delta', \delta, \chi \wedge \delta, \varphi$ dla $i, j < k1$. Z założenia (2') $\vdash \varphi, \Gamma \Rightarrow_{k2} \Delta', \chi \wedge \delta$, zatem przez dopuszczalność (W) mamy (iii) $\vdash \varphi, \Gamma \Rightarrow_{k2} \Delta', \chi, \chi \wedge \delta$ oraz (iv) $\vdash \varphi, \Gamma \Rightarrow_{k2} \Delta', \delta, \chi \wedge \delta$. Zatem z (i) i (iii) mamy $\vdash \Gamma \Rightarrow_i \Delta, \chi, \varphi$ i $\vdash \varphi, \Gamma \Rightarrow_{k2} \Delta, \chi$, gdzie $i + k2 < k$, więc przez warunek c2 φ jest $i + k2$-eliminowalne, czyli mamy (v) $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta, \chi$. Podobnie z (ii) i (iv) przez c2 otrzymujemy, że φ jest $i + k2$-eliminowalne gdyż $j + k2 < k$, czyli (vi) $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta, \chi$. Z (v) i (vi) przez $(\Rightarrow \wedge)$ i fakt, że $\chi \wedge \delta \in \Delta$ mamy $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$.

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Smullyana:

B12. $\psi = \chi \wedge \delta$ i należy do Δ czyli (1') wygląda następująco $\vdash \Gamma \Rightarrow^{\chi\wedge\delta}_{k1} \Delta', \chi \wedge \delta, \varphi$. Przez lemat S mamy (i) $\vdash \Gamma \Rightarrow_i \Delta', \chi, \chi \wedge \delta, \varphi$ oraz (ii) $\vdash \Gamma \Rightarrow_j \Delta', \delta, \chi \wedge \delta, \varphi$ dla $i, j < k1$. Z założenia (2') $\vdash \varphi, \Gamma \Rightarrow_{k2} \Delta', \chi \wedge \delta$, zatem przez dopuszczalność (W) mamy (iii) $\vdash \varphi, \Gamma \Rightarrow_{k2} \Delta', \chi, \chi \wedge \delta$ oraz (iv) $\vdash \varphi, \Gamma \Rightarrow_{k2} \Delta', \delta, \chi \wedge \delta$. Zatem z (i) i (iii) mamy $\vdash \Gamma \Rightarrow_i \Delta, \chi, \varphi$ i $\vdash \varphi, \Gamma \Rightarrow_{k2} \Delta, \chi$, gdzie $i + k2 < k$, więc przez warunek c2 φ jest $i + k2$-eliminowalne, czyli mamy (v) $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta, \chi$. Podobnie z (ii) i (iv) przez c2 otrzymujemy, że φ jest $i + k2$-eliminowalne gdyż $j + k2 < k$, czyli (vi) $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta, \chi$. Z (v) i (vi) przez ($\Rightarrow \wedge$) i fakt, że $\chi \wedge \delta \in \Delta$ mamy $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$.
Dowód dla pozostałych przypadków oraz przy założeniu, że $\varphi \neq \chi$ analogiczny.

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Smullyana:

Załóżmy teraz B2: $\varphi = \psi$ i $\varphi = \chi$,

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Smullyana:

Załóżmy teraz B2: $\varphi = \psi$ i $\varphi = \chi$,

zatem:

(1') $\vdash \Gamma \Rightarrow^{\varphi}_{k1} \Delta, \varphi$ i

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Smullyana:

Załóżmy teraz B2: $\varphi = \psi$ i $\varphi = \chi$,

zatem:

(1') $\vdash \Gamma \Rightarrow^{\varphi}_{k1} \Delta, \varphi$ i

(2') $\vdash \varphi, \Gamma \Rightarrow^{\varphi}_{k2} \Delta$.

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Smullyana:

Załóżmy teraz B2: $\varphi = \psi$ i $\varphi = \chi$,
zatem:
(1') $\vdash \Gamma \Rightarrow^{\varphi}_{k1} \Delta, \varphi$ i
(2') $\vdash \varphi, \Gamma \Rightarrow^{\varphi}_{k2} \Delta$.
Ponownie musimy rozważyć różne przypadki dla φ.

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Smullyana:

Załóżmy teraz B2: $\varphi = \psi$ i $\varphi = \chi$,
zatem:
(1') $\vdash \Gamma \Rightarrow^{\varphi}_{k1} \Delta, \varphi$ i
(2') $\vdash \varphi, \Gamma \Rightarrow^{\varphi}_{k2} \Delta$.
Ponownie musimy rozważyć różne przypadki dla φ.
Rozważmy B21. $\varphi = \chi \wedge \delta$. Pozostałe przypadki dowodzimy analogicznie.

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Smullyana:

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Smullyana:

B21. $\varphi = \chi \wedge \delta$ wtedy przez lemat S mamy (i) $\vdash \Gamma \Rightarrow_i \Delta', \chi, \chi \wedge \delta$ oraz (ii) $\vdash \Gamma \Rightarrow_j \Delta', \delta, \chi \wedge \delta$ dla $i, j < k1$. Z założenia (2') przez dopuszczalność (W) mamy (iii) $\vdash \varphi, \Gamma \Rightarrow_{k2} \Delta, \chi$ oraz (iv) $\vdash \varphi, \Gamma \Rightarrow_{k2} \Delta, \delta$. Z (i) i (iii) przez c2 mamy (v) $\vdash \Gamma \Rightarrow_{i+k2} \Delta, \chi$ a z (ii) i (iv) przez c2 mamy (vi) $\vdash \Gamma \Rightarrow_{j+k2} \Delta, \delta$ gdyż $i + k2 < k$ i $j + k2 < k$, więc φ jest odpowiednio $i + k2$-eliminowalne i $j + k2$-eliminowalne. Ponadto z (2') i lematu S mamy (vii) $\vdash \varphi, \chi, \delta, \Gamma \Rightarrow^{\varphi}_{k2-1} \Delta$ a z (1') przez dopuszczalność (W) mamy (viii) $\vdash \Gamma, \chi, \delta, \Rightarrow^{\varphi}_{k1} \Delta, \varphi$ co znów przez c2 daje (ix) $\vdash \Gamma, \chi, \delta \Rightarrow_{k1+k2-1} \Delta$. Teraz korzystamy z warunku c2, najpierw z (v) i (ix) dostajemy (x) $\vdash \Gamma, \delta \Rightarrow \Delta$ gdyż χ jest eliminowalne jako krótsze od φ. Następnie z (vi) i (x) w analogiczny sposób otrzymujemy $\vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$.

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Smullyana:

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Smullyana:

Z twierdzenia pomocniczego wynika twierdzenie o eliminacji (Cut), które w wersji Smullyana brzmi:
Każde φ jest eliminowalne.

Dopuszczalność Cut w ARS

Dowód dopuszczalności (Cut) metodą Smullyana:

Z twierdzenia pomocniczego wynika twierdzenie o eliminacji (Cut), które w wersji Smullyana brzmi:
Każde φ jest eliminowalne.
Aby uzasadnić, że twierdzenie o eliminacji wynika z twierdzenia pomocniczego, załóżmy niewprost, że pewne φ nie jest eliminowalne. Wybierzmy najmniejsze takie nieeliminowalne φ i niech długość $\varphi = n$, oznacza to, że wszystkie formuły o mniejszej od n długości są eliminowalne (warunek c1). Skoro φ nie jest eliminowalne, to istnieje najmniejsze k takie, że φ nie jest k-eliminowalne, czyli jest k'-eliminowalne dla każdego $k' < k$ (warunek c2). Ale oba warunki implikują, że φ jest k-eliminowalne; sprzeczność.