LOGIKA I CZAS; WPROWADZENIE DO LOGIK TEMPORALNYCH

Wykład monograficzny dla studentów filozofii w semestrze letnim Łódź 2005/2006

(wykłady 1-12)

Andrzej Indrzejczak

Spis zawartości wykładów

1. Wstęp historyczno-systematyczny

2. Język i semantyka logik czasu punktowego

3. Bazowa logika **Kt** – semantyka i aksjomatyzacja

4. Nadlogiki **Kt**

5. Logiki czasu liniowego

6. Poszerzenia języka – logiki hybrydowe

7. Logika **LPTL**; Dowód pełności **Kt4**

8. Dedukcja naturalna i etykietowane diagramy Betha

9. Czas i modalność: Logika historycznej konieczności Ockhama

10. Logika **CTL** i jej krewniacy

11. Logiki czasu interwałowego I – zagadnienia wstępne

12. Logiki czasu interwałowego II – ważniejsze systemy

13. Logiki temporalne 1-go rzędu - wstęp

14. Identyczność i deskrypcje określone w kontekście logik temporalnych; inne kierunki w rozwoju badań nad logikami temporalnymi i ich zastosowaniami

Do czego potrzebna jest logika temporalna?

- tradycyjne filozoficzne problemy dotyczące natury czasu (zmiana w czasie a tożsamość, determinizm)

- lingwistyka; analiza czasów gramatycznych

- fizyka; czas a zmiana, czas jako wymiar, wyzwania nowej fizyki

- informatyka; analiza realizacji programów, ich poprawności itp.

- AI; problemy dotyczące planowania, kolejności akcji, przetwarzania wiedzy zmieniającej się w czasie itp.

Jak ją skonstruować?

Możliwe narzędzia:

1. Klasyczny rachunek kwantyfikatorów (Reichenbach, Rescher)

2. Zdaniowe logiki (multi)modalne (Prior, Pnueli)

3. Niestandardowe podejścia (Halpern i Shoham, Allen i Hayes)

Skąd czerpać intuicje?

1. potoczne kategorie i wyobrażenia na temat czasu

2. analiza językowej reprezentacji czasu (czasy gramatyczne) (np. Reichenbach)

3. nowoczesna fizyka (np. logika czasoprzestrzeni Minkowskiego u Goldblatta)

Historia

1. paradoksy Zenona
2. Arystoteles (Fizyka, bitwa morska)
3. Diodor Kronos (temporalne definicje modalności, argument mistrzowski)
4. Augustyn – czas subiektywny
5. przedwiedza, predestynacja, wolna wola (Augustyn, Boecjusz, Anzelm, Ockham)
6. Ockham (sylogizmy temporalne)
7. Newton – czas jako wymiar

8. Leibniz – czas jako relacja

9. Kant – czas jako aprioryczna forma naoczności, pierwsza antynomia

10. McTaggart (nierealność czasu, seria A i B)

11. Bergson – krytyka naukowego ujęcia czasu

12. Husserl, Ingarden – fenomenologiczna analiza czasu

13. Heidegger, Sartre – egzystencjalistyczne doświadczenie czasu

14. Einstein (podejście relatywistyczne)

15. Russell – analiza struktur interwałowych

16. Reichenbach – analiza czasów gramatycznych

17. Prior (standardowe logiki temporalne)

18. Pnueli (logiki programów)

Podstawowe kontrowersje odnośnie natury czasu

1. subiektywny/obiektywny
2. względny/absolutny
3. punkty/interwały/zdarzenia
4. skończony/nieskończony
5. liniowy/rozgałęziony
6. dyskretny/ciągły/gęsty

	subiektywny	obiektywny
względny	Augustyn	Einstein
absolutny	Kant	Newton

Logiki temporalne czasu punktowego – język

Standardowy język zdaniowy z czterema jednoargumentowymi funktorami temporalnymi:

G dla "odtąd zawsze" ($\Box_F$, $[F]$)

F dla "nastąpi" ($\Diamond_F$, $\langle F \rangle$)

H dla "dotąd zawsze" ($\Box_P$, $[P]$)

P dla "nastąpiło" ($\Diamond_P$, $\langle P \rangle$)

Uwaga! G i F oraz H i P są wzajemnie definiowalne:

$G\varphi \leftrightarrow \neg F \neg \varphi$ oraz $H\varphi \leftrightarrow \neg P \neg \varphi$

Przykład 1:

Kazik śpi. := p

Kazik będzie spał. := Fp

Kazik nie spał ale miał iść spać. :=
$P(\neg p \wedge Fp)$

Jeżeli Kazik spał jakiś czas temu, to już nie śpi lub kiedyś nie będzie spał. := $Pp \to \neg p \vee F\neg p$

Kazik się wyspał albo kiedyś się wyśpi. :=
$PPp \vee FPp$

Semantyka relacyjna

Definicja 1 (Struktura relacyjna)

Strukturą relacyjną, albo ramą (frame) jest dowolna para $\mathfrak{F} = \langle \mathcal{T}, \mathcal{R} \rangle$ gdzie:

- dziedzina to $\mathcal{T} \neq \varnothing$, który jest zbiorem punktów czasowych (momentów);

- $\mathcal{R}$ to binarna relacja na $\mathcal{T}$, zwana relacją następstwa czasowego.

W logikach temporalnych $\mathcal{R}tt'$ oznacza, że moment t' jest późniejszy od momentu t.

$\mathcal{R}(t) = \{t' : \mathcal{R}tt'\}$ to *przyszłość* t.

$\mathcal{R}^{-}(t) = \{t' : \mathcal{R}t't\}$ to *przeszłość* t.

Definicja 2 (Model na strukturze)

Modelem na danej strukturze $\mathfrak{F}$ jest dowolny układ $\mathfrak{M} = \langle\, \mathfrak{F}, V \rangle$, gdzie V jest funkcją waluacji dla zmiennych, tj. $V : ZZ \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{T})$. ($ZZ$ to zbiór zmiennych zdaniowych a $\mathcal{P}(\mathcal{T})$ to zbiór potęgowy na $\mathcal{T}$). Dziedzinę danego modelu $\mathfrak{M}$ będziemy oznaczać przez $\mathcal{T}_{\mathfrak{M}}$.

Definicję *spełniania formuły* φ *w punkcie* t *modelu* $\mathfrak{M}$ ($\mathfrak{M}, t \vDash \varphi$) wyrażają poniższe warunki:

$\mathfrak{M}, t \vDash p$	wtw	$t \in V(p)$
$\mathfrak{M}, t \vDash \neg\varphi$	wtw	$\mathfrak{M}, t \nvDash \varphi$
$\mathfrak{M}, t \vDash \varphi \wedge \psi$	wtw	$\mathfrak{M}, t \vDash \varphi$ i $\mathfrak{M}, t \vDash \psi$
$\mathfrak{M}, t \vDash \varphi \vee \psi$	wtw	$\mathfrak{M}, t \vDash \varphi$ lub $\mathfrak{M}, t \vDash \psi$
$\mathfrak{M}, t \vDash \varphi \rightarrow \psi$	wtw	$\mathfrak{M}, t \nvDash \varphi$ lub $\mathfrak{M}, t \vDash \psi$
$\mathfrak{M}, t \vDash G\varphi$	wtw	$\mathfrak{M}, t' \vDash \varphi$
		dla dowolnego $t' \in \mathcal{R}(t)$
$\mathfrak{M}, t \vDash F\varphi$	wtw	$\mathfrak{M}, t' \vDash \varphi$
		dla pewnego $t' \in \mathcal{R}(t)$
$\mathfrak{M}, t \vDash H\varphi$	wtw	$\mathfrak{M}, t' \vDash \varphi$
		dla dowolnego $t' \in \mathcal{R}^{-}(t)$
$\mathfrak{M}, t \vDash P\varphi$	wtw	$\mathfrak{M}, t' \vDash \varphi$
		dla pewnego $t' \in \mathcal{R}^{-}(t)$

Dla zbiorów formuł zapis $\mathfrak{M}, t \vDash \Gamma$ oznacza, że $\mathfrak{M}, t \vDash \psi$ dla $\forall_{\psi \in \Gamma}$.

$\mathfrak{M}, t \nvDash \varphi$ oznacza fałszywość formuły φ w t; $\mathfrak{M}, t \nvDash \Gamma$ oznacza fałszywość co najmniej jednego elementu Γ w t.

W przypadku gdy model jest ustalony, bądź domyślny będziemy po prostu pisać $t \vDash \varphi$ (względnie $t \nvDash \varphi$) lub $t \vDash \Gamma$ (względnie $t \nvDash \Gamma$) dla zbioru.

Zbiór wszystkich punktów spełniających daną formułę (zbiór) oznaczamy:

$\|\varphi\|_{\mathfrak{M}} = \{t \in \mathcal{T}_{\mathfrak{M}} : t \vDash \varphi\}$;

$\|\Gamma\|_{\mathfrak{M}} = \bigcap \|\psi\|_{\mathfrak{M}}$ dla $\forall_{\psi \in \Gamma}$

Zazwyczaj używać będziemy notacji skróconej $\|\varphi\|$ ($\|\Gamma\|$) przy $\mathfrak{M}$ domyślnym lub ustalonym.

$\|\varphi\|$ będziemy czytać dla wygody zwyczajowo jako "sąd φ" (intensja φ) w danym $\mathfrak{M}$.

Przykład 2: Rozważmy model $\mathfrak{M} = \langle\ \mathcal{T}, \mathcal{R}, V \rangle$ gdzie: $\mathcal{T} = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6\}$,
$\mathcal{R} = \{\langle t_1, t_2\rangle, \langle t_1, t_3\rangle, \langle t_2, t_4\rangle, \langle t_3, t_5\rangle, \langle t_3, t_6\rangle\}$,
$V(p) = \{t_1, t_2, t_3, t_6\}, V(q) = \{t_2, t_4, t_5, t_6\}$.

- $t_1 \models Gp$ $\qquad$ $t_1 \not\models Gq$
- $t_1 \models Fq$ $\qquad$ $t_3 \models Gq$
- $t_1 \models FGq$ $\qquad$ $t_2 \models PGp$
- $t_2 \models HGp$ $\qquad$ $t_2 \models PFGp$
- $t_5 \not\models PGp$ $\qquad$ $t_5 \models PFp$
- $t_5 \not\models HGp$ $\qquad$ $t_5 \models PGq$

c.d. przykładu 2: ten sam model $\mathfrak{M} = \langle\, \mathcal{T}, \mathcal{R}, V\rangle$ gdzie: $\mathcal{T} = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6\}$, $\mathcal{R} = \{\langle t_1, t_2\rangle, \langle t_1, t_3\rangle, \langle t_2, t_4\rangle, \langle t_3, t_5\rangle, \langle t_3, t_6\rangle\}$, $V(p) = \{t_1, t_2, t_3, t_6\}, V(q) = \{t_2, t_4, t_5, t_6\}$.

- $t_1 \vDash q \vee Fq \qquad t_1 \vDash q \vee Gp$
- $t_2 \vDash Pp \wedge Fq \qquad t_2 \nvDash P(p \wedge q)$
- $t_2 \nvDash F(p \wedge q) \qquad t_1 \vDash G(q \rightarrow p)$
- $t_1 \nvDash G(p \rightarrow q) \qquad t_1 \vDash GG(p \rightarrow q)$
- $\|Fp\| = \{t_1, t_3\} \qquad \|Gp\| = \{t_1, t_4, t_5, t_6\}$
- $\|Hp\| = \mathcal{T} \qquad \|Pp\| = \{t_2, t_3, t_4, t_5, t_6\}$

Definicja 3 (Spełnialność, falsyfikowalność) φ (Γ) *jest* <u>*spełnialna w modelu* $\mathfrak{M}$</u> *wtw,* $\|\varphi\| \neq \varnothing$ ($\|\Gamma\| \neq \varnothing$).

φ (Γ) *jest* <u>*spełnialna*</u> *wtw, istnieje model, w którym jest spełnialna.*

φ (Γ) *jest* <u>*sfalsyfikowana w modelu* $\mathfrak{M}$</u> *wtw,* $\|\varphi\| \neq \mathcal{T}_{\mathfrak{M}}$ ($\|\Gamma\| \neq \mathcal{T}_{\mathfrak{M}}$) (*inaczej:* $\mathfrak{M}$ *falsyfikuje* φ (Γ)).

φ (Γ) *jest* <u>*sfalsyfikowana*</u> *wtw, istnieje model, w którym jest sfalsyfikowana.*

Przykład 3: $Pp \wedge H(p \rightarrow F\neg p)$ jest spełnialne.

Definicja spełniania formuły (czy zbioru formuł) w modelu daje nam *lokalną* charakterystykę prawdziwości. Dalszym krokiem jest wprowadzenie pojęcia *globalnej prawdziwości*:

Definicja 4 (Prawdziwość w modelu) $\mathfrak{M} \models \varphi$ *wtw,* $\forall_{t \in \mathcal{T}_{\mathfrak{M}}}, \mathfrak{M}, t \models \varphi$ *(lub* $\|\varphi\|_{\mathfrak{M}} = \mathcal{T}_{\mathfrak{M}}$*);*

analogicznie dla Γ, $\mathfrak{M} \models \Gamma$ *wtw,* $\|\Gamma\|_{\mathfrak{M}} = \mathcal{T}_{\mathfrak{M}}$*.*

Zawartością modelu $\mathfrak{M}$ nazywamy zbiór $E(\mathfrak{M}) = \{\varphi : \mathfrak{M} \models \varphi\}$*.*

Zbiór wszystkich modeli, w których φ (Γ) *jest globalnie prawdziwa, to* $Mod(\varphi) = \{\mathfrak{M} : \mathfrak{M} \models \varphi\}$ ($Mod(\Gamma) = \{\mathfrak{M} : \mathfrak{M} \models \Gamma\}$)

Zbiór wszystkich modeli relacyjnych (na dowolnej strukturze) oznaczać będziemy symbolem MOD.

Zbiór wszystkich modeli na danej strukturze oznaczać będziemy symbolem $MOD(\mathfrak{F})$.

Trzeci poziom prawdziwości to tautologiczność, czyli prawdziwość w każdym modelu.

Zbiór wszystkich tautologii w podanym wyżej sensie to bazowa logika temporalna czasu punktowego zwana **Kt**

Definicja 5 (Prawdziwość w każdym modelu)

$$\models \varphi \ wtw, \ \forall_{\mathfrak{M} \in MOD}, \mathfrak{M} \vDash \varphi$$

(*inaczej:* $\models \varphi \ wtw, \ \varphi \in \bigcap\{E(\mathfrak{M}) : \mathfrak{M} \in MOD\}$).

(*inaczej:* $\models \varphi \ wtw, \ \varphi \in \mathbf{Kt}$).

$\not\models \varphi$ *oznacza formułę nietautologiczną, czyli falsyfikowalną.*

Lemat 1 $\models \varphi$ *wtw* $\models \varphi[G/H, F/P]$

Lemat 2 (Kt-tautologie)

Następujące schematy generują formuły prawdziwe we wszystkich modelach:

$$F\varphi \leftrightarrow \neg G\neg\varphi \qquad G\varphi \leftrightarrow \neg F\neg\varphi$$

$$G(\varphi \to \psi) \to (G\varphi \to G\psi)$$

$$G(\varphi \to \psi) \to (F\varphi \to F\psi)$$

$$G\varphi \vee G\psi \to G(\varphi \vee \psi)$$

$$F(\varphi \wedge \psi) \to F\varphi \wedge F\psi$$

$$G(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow G\varphi \wedge G\psi$$

$$F(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow F\varphi \vee F\psi$$

$$\varphi \to GP\varphi \qquad FH\varphi \to \varphi$$

Lemat 3 (formuły falsyfikowalne)

Następujące schematy nie są schematami **Kt**-tautologii:

(D_F) $G\varphi \to F\varphi$

(T_F) $G\varphi \to \varphi$

(T'_F) $\varphi \to F\varphi$

(4_F) $G\varphi \to GG\varphi$

(5_F) $F\varphi \to GF\varphi$

(B_F) $\varphi \to GF\varphi$

$(F\varphi \to G\psi) \to G(\varphi \to \psi)$

Definicja 6 (Wynikanie lokalne i globalne)
1. φ wynika lokalnie z Γ:

$\Gamma \models \varphi$ *wtw,* $\forall_{\mathfrak{M} \in MOD}(\|\Gamma\|_{\mathfrak{M}} \subseteq \|\varphi\|_{\mathfrak{M}})$
(inaczej: $\forall_{\mathfrak{M} \in MOD}, \forall_{t \in \mathcal{T}_{\mathfrak{M}}}$ *(jeżeli* $\mathfrak{M}, t \vDash \Gamma$*,*
to $\mathfrak{M}, t \vDash \varphi$*))*

2. φ wynika globalnie z Γ:

$\Gamma \mid\models \varphi$ *wtw,* $Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\varphi)$
(inaczej: $\forall_{\mathfrak{M} \in MOD}$ *(jeżeli* $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$*, to* $\mathfrak{M} \vDash \varphi$*))*

Twierdzenie 1 *Jeżeli* $\Gamma \models \varphi$*, to* $\Gamma \mid\models \varphi$
ale nie odwrotnie.

Przykład 4:

$\varphi \mid\models G\varphi$, ale $\varphi \not\models G\varphi$.

Logika Kt: Ujęcie aksjomatyczne

A. Schematy aksjomatów:

- Dowolne φ, które jest schematem tezy **KRZ**
- $(Dual_F)$ $F\varphi \leftrightarrow \neg G \neg \varphi$
- $(Dual_P)$ $P\varphi \leftrightarrow \neg H \neg \varphi$
- (K_F) $G(\varphi \to \psi) \to (G\varphi \to G\psi)$
- (K_P) $H(\varphi \to \psi) \to (H\varphi \to H\psi)$
- (S_F) $\varphi \to GP\varphi$
- (S_P) $\varphi \to HF\varphi$

B. Reguły pierwotne:

- (MP) jeżeli $\varphi \in$ **Kt** i $\varphi \to \psi \in$ **Kt**, to $\psi \in$ **Kt**

- (RG_F) jeżeli $\varphi \in$ **Kt**, to $G\varphi \in$ **Kt**

- (RG_P) jeżeli $\varphi \in$ **Kt**, to $H\varphi \in$ **Kt**

Definicja 7 (dowód, teza) *Dowodem formuły φ jest skończony ciąg, którego dowolny element, to aksjomat lub formuła wydedukowana z wcześniejszych elementów za pomocą reguł pierwotnych, a ostatni element ciągu to φ.*

φ jest tezą **Kt** *($\vdash_{Kt} \varphi$) wtw, φ ma dowód.*

Twierdzenie 2 (Przystosowanie, pełność, adekwatność (słaba))

(a) Jeżeli $\vdash_{Kt} \varphi$, to $\models \varphi$.
(b) Jeżeli $\models \varphi$, to $\vdash_{Kt} \varphi$.
(c) $\models \varphi$ wtw, $\vdash_{Kt} \varphi$.

Definicja 8 (Dowiedlność lokalna i globalna)
1. $\Gamma \vdash_{Kt} \varphi$ *wtw* $\vdash_{Kt} \bigwedge\Gamma' \to \varphi$, *dla pewnego skończonego* $\Gamma' \subseteq \Gamma$

2. $\Gamma \Vdash_{Kt} \varphi$ *wtw istnieje dowód* φ *z* Γ *na gruncie* **Kt**

$\Vdash_{Kt}$ jest relacją mocniejszą od $\vdash_{Kt}$, gdyż dla $\Vdash_{Kt}$ nie zachodzi *twierdzenie o dedukcji*, które w przypadku $\vdash_{Kt}$ jest spełnione z definicji. Dla przykładu, mamy $p \Vdash_{Kt} Gp$ (z racji domknięcia na (RG_F)), ale $p \nvdash_{Kt} Gp$ (bo $\nvdash_{Kt} p \to Gp$). Natomiast zachodzi zależność jednostronna:

Jeżeli $\Gamma \vdash_{Kt} \varphi$, to $\Gamma \Vdash_{Kt} \varphi$

Twierdzenie 3 (Adekwatność mocna)

1. $\Gamma \vdash \varphi$ wtw, $\Gamma \models \varphi$

2. $\Gamma \Vdash \varphi$ wtw, $\Gamma \mid\models \varphi$

Nadlogiki Kt

Aby scharakteryzować semantycznie inne logiki temporalne musimy wprowadzić dodatkową terminologię:

Definicja 9 (Prawdziwość w strukturach)

1. $\mathfrak{F} \models \varphi \ wtw, \ \forall_{\mathfrak{M} \in MOD(\mathfrak{F})}, \mathfrak{M} \models \varphi$
(inaczej: $MOD(\mathfrak{F}) \subseteq Mod(\varphi)$).

2. Niech $\mathcal{F}$ oznacza dowolną klasę struktur, wtedy: $\mathcal{F} \models \varphi \ wtw, \ \forall_{\mathfrak{F} \in \mathcal{F}}, \mathfrak{F} \models \varphi$.

3. <u>Zawartością struktury</u> $\mathfrak{F}$ nazywamy zbiór $E(\mathfrak{F}) = \{\varphi : \mathfrak{F} \models \varphi\}$.

4. <u>Zawartością klasy struktur</u> $\mathcal{F}$ nazywamy zbiór $E(\mathcal{F}) = \{\varphi : \mathcal{F} \models \varphi\}$.

Twierdzenie 4
Zawartość dowolnej $\mathfrak{F}$ ($\mathcal{F}$) jest logiką temporalną.

Struktury i klasy struktur (a także modele na nich ufundowane) będziemy określać według własności, które posiadają zadane na nich relacje następstwa czasowego. Np. powiemy, że $\mathcal{F}$ ($\mathfrak{F}, \mathfrak{M}$) jest klasą (strukturą, modelem) przechodnią, gdy każda struktura $\mathfrak{F} \in \mathcal{F}$ jest strukturą przechodnią.

Najbardziej elementarne własności, które wiążemy z relacją następstwa czasowego to:

nazwa	warunek
przeciwzwrotność	$\forall x \neg \mathcal{R}xx$
przechodniość	$\forall xyz(\mathcal{R}xy \land \mathcal{R}yz \to \mathcal{R}xz)$
asymetria mocna	$\forall xy(\mathcal{R}xy \to \neg \mathcal{R}yx)$

Zawartość klasy struktur o podanych wyżej własnościach to **Kt4**

Kt4 – semantyka

Twierdzenie 5

(a) jeżeli $\mathcal{R}$ jest mocno asymetryczna, to jest przeciwzwrotna;

(b) jeżeli $\mathcal{R}$ jest przechodnia i przeciwzwrotna, to jest mocno asymetryczna;

(c) jeżeli $\mathcal{R}$ jest przechodnia, to jej konwers też jest przechodni.

Twierdzenie 6

$\mathcal{F} \models G\varphi \to GG\varphi$ wtw, $\mathcal{F}$ jest przechodnia

$\mathcal{F} \models FF\varphi \to F\varphi$ wtw, $\mathcal{F}$ jest przechodnia

$\mathcal{F} \models H\varphi \to HH\varphi$ wtw, $\mathcal{F}$ jest przechodnia

$\mathcal{F} \models PP\varphi \to P\varphi$ wtw, $\mathcal{F}$ jest przechodnia

Pierwsza antynomia Kanta

Teza: Świat ma początek w czasie.

Antyteza: Świat nie ma początku w czasie.

nazwa	warunek
początek	$\exists x \forall y (\mathcal{R}xy \vee x = y)$
koniec	$\exists x \forall y (\mathcal{R}yx \vee x = y)$
F-serialność	$\forall x \exists y \mathcal{R}xy$
P-serialność	$\forall x \exists y \mathcal{R}yx$

Twierdzenie 7

$\mathcal{F} \models H\bot \vee PH\bot$ wtw, $\mathcal{F}$ ma punkt najmniejszy

$\mathcal{F} \models G\bot \vee FG\bot$ wtw, $\mathcal{F}$ ma punkt największy

$\mathcal{F} \models G\varphi \to F\varphi$ wtw, $\mathcal{F}$ jest F-serialna

$\mathcal{F} \models H\varphi \to P\varphi$ wtw, $\mathcal{F}$ jest P-serialna

Uwaga! F-serialność w połączeniu z przeciwzwrotnością implikuje F-nieskończoność (analogicznie dla P-serialności i P-nieskończoności).

Logiki czasu liniowego

nazwa	warunek
liniowość mocna	$\forall xy(\mathcal{R}xy \vee \mathcal{R}yx)$
liniowość słaba	$\forall xy(\mathcal{R}xy \vee \mathcal{R}yx \vee x = y)$
F-spójność mocna	$\forall xyz(\mathcal{R}xy \wedge \mathcal{R}xz \rightarrow$ $\mathcal{R}yz \vee \mathcal{R}zy)$
F-spójność słaba	$\forall xyz(\mathcal{R}xy \wedge \mathcal{R}xz \rightarrow$ $\mathcal{R}yz \vee \mathcal{R}zy \vee y = z)$
P-spójność mocna	$\forall xyz(\mathcal{R}yx \wedge \mathcal{R}zx \rightarrow$ $\mathcal{R}yz \vee \mathcal{R}zy)$
P-spójność słaba	$\forall xyz(\mathcal{R}yx \wedge \mathcal{R}zx \rightarrow$ $\mathcal{R}yz \vee \mathcal{R}zy \vee y = z)$

Twierdzenie 8

$\mathcal{F} \models PF\varphi \rightarrow P\varphi \vee F\varphi$ wtw, $\mathcal{F}$ jest mocno F-spójna

$\mathcal{F} \models FP\varphi \rightarrow P\varphi \vee F\varphi$ wtw, $\mathcal{F}$ jest mocno P-spójna

$\mathcal{F} \models PF\varphi \to P\varphi \vee F\varphi \vee \varphi$ wtw, $\mathcal{F}$ jest słabo F-spójna

$\mathcal{F} \models FP\varphi \to P\varphi \vee F\varphi \vee \varphi$ wtw, $\mathcal{F}$ jest słabo P-spójna

Lemat 4 *Następujące formuły są na gruncie* **Kt4** *równoważne:*

$$PF\varphi \to P\varphi \vee F\varphi \vee \varphi$$

$$H\varphi \wedge G\varphi \wedge \varphi \to HG\varphi$$

$$F\varphi \wedge F\psi \to F(\varphi \wedge F\psi) \vee F(F\varphi \wedge \psi) \vee F(\varphi \wedge \psi)$$

$$G(G\varphi \wedge \varphi \to \psi) \vee G(G\psi \wedge \psi \to \varphi)$$

Bazowa logika linearna Kt4.3

1. Ujęcie aksjomatyczne

Kt4.3 to najmniejsza logika zawierająca **Kt** i wszystkie tezy o postaci:

- (4_F) $G\varphi \to GG\varphi$
- (3_F) $PF\varphi \to P\varphi \vee F\varphi \vee \varphi$
- (3_P) $FP\varphi \to P\varphi \vee F\varphi \vee \varphi$

Uwaga! zamiast (3_F) i (3_P) można użyć:

(3) $PF\varphi \vee FP\varphi \to P\varphi \vee F\varphi \vee \varphi$

2. Ujęcie semantyczne

Kt4.3 $= E(\mathcal{F})$, gdzie $\mathcal{F}$ to klasa struktur ze ścisłym porządkiem liniowym.

Ważne logiki czasu liniowego

Niech $\mathfrak{F}_N = \langle \mathbf{N}, < \rangle$, $\mathfrak{F}_C = \langle \mathbf{N}, < \rangle$, $\mathfrak{F}_W = \langle \mathbf{W}, < \rangle$, $\mathfrak{F}_R = \langle \mathbf{R}, < \rangle$, gdzie **N** to zbiór liczb naturalnych, **C** – całkowitych, **W** – wymiernych, **R** – rzeczywistych.

$E(\mathfrak{F}_N) =$ **Kt4.3** z dodatkiem:

- (S_F) $G\varphi \to F\varphi$
- (D_F) $G(G\varphi \to \varphi) \to (FG\varphi \to G\varphi)$
- (WF) $H(H\varphi \to \varphi) \to H\varphi$

$E(\mathfrak{F}_C) =$ **Kt4.3** z dodatkiem:

- (S_F) $G\varphi \to F\varphi$ $\quad$ (S_P) $H\varphi \to P\varphi$

- (D_F) $G(G\varphi \to \varphi) \to (FG\varphi \to G\varphi)$

- (D_P) $H(H\varphi \to \varphi) \to (PH\varphi \to H\varphi)$

$E(\mathfrak{F}_W) =$ **Kt4.3** z dodatkiem:

- (S_F) $G\varphi \to F\varphi$ $\quad$ (S_P) $H\varphi \to P\varphi$

- (G) $GG\varphi \to G\varphi$

$E(\mathfrak{F}_R) = E(\mathfrak{F}_W)$ z dodatkiem:

- (C) $(H\varphi \to FH\varphi) \wedge G(H\varphi \to FH\varphi)$
  $\wedge H(H\varphi \to FH\varphi) \to (H\varphi \to G\varphi)$

Uwaga! aksjomat (WF) odpowiada dobremu uporządkowaniu, $(D_F), (D_P)$ – dyskretności, (G) – gęstości, a (C) – ciągłości.

Dygresja: logika czasu stoików

Jeżeli do **Kt4** dodamy następujące aksjomaty:

- (T_F) $G\varphi \to \varphi$
- (Sym) $G\varphi \to H\varphi$

to otrzymamy logikę czasu kołowego. (T_F) odpowiada zwrotności, a (Sym) – symetrii $\mathcal{R}$. W systemie takim tezami są:

$G\varphi \leftrightarrow H\varphi \quad F\varphi \leftrightarrow P\varphi$

co prowadzi do utożsamienia przeszłości i przyszłości.

Wzmocnienie języka

1. Modalności temporalne (Diodorowska i Arystotelesowska):

$\Box\varphi := \varphi \wedge G\varphi \qquad \Diamond\varphi := \varphi \vee F\varphi$

$A\varphi := \varphi \wedge G\varphi \wedge H\varphi$

2. Następnik i poprzednik:

$\bigcirc\varphi$ – czytamy "w następnym momencie φ".

$\mathfrak{M}, t \models \bigcirc\varphi$ wtw $\mathfrak{M}, t' \models \varphi$ dla dowolnego $t' \in \mathcal{R}(t)$ takiego, że $\neg\exists t''(\mathcal{R}tt'' \wedge \mathcal{R}t''t')$

dualnie charakteryzujemy $*\varphi$ ("w poprzednim momencie").

3. "Since" i "Until":

$\varphi S \psi$ czytamy "zachodziło φ odkąd zaszło ψ"

$\mathfrak{M}, t \vDash \varphi S \psi$ wtw $\mathfrak{M}, t' \vDash \psi$ dla pewnego $t' \in \mathcal{R}^{-}(t)$ oraz $\mathfrak{M}, t'' \vDash \varphi$ dla każdego t'' takiego, że $\mathcal{R}t't''$ i $\mathcal{R}t''t'$

dualnie charakteryzujemy $\varphi U \psi$ ("będzie zachodzić φ aż zajdzie ψ").

Twierdzenie Kampa
W klasie liniowych i ciągłych struktur każdy funktor temporalny może być zdefiniowany z pomocą S i U.

Przykładowo:

$H\varphi := \neg(\top S \neg\varphi) \quad P\varphi := \top S \varphi$

$G\varphi := \neg(\top U \neg\varphi) \quad F\varphi := \top U \varphi$

LOGIKI HYBRYDOWE: Język

Bazowy hybrydowy (zdaniowy) język temporalny uzyskujemy poprzez dodanie:

a) Drugiego sortu zmiennych zdaniowych, zwanych *nominałami*; jest to przeliczalny zbiór NOM $= \{i, j, k, ...\}$. Ich zadaniem jest nazywanie punktów w modelu. Atomy języka to teraz zbiór $ZZ \cup NOM (ZZ \cap NOM = \varnothing)$. W metajęzyku będziemy używać symboli σ, τ, θ dla reprezentacji nominałów.

b) Dwuargumentowego funktora spełniania, który łączy dowolny nominał z dowolną formułą. Formuły tego typu (sat-formuły) zaznaczamy następująco: $\sigma : \varphi$ i odczytujemy: "formuła φ jest spełniona w punkcie σ. Przykłady sat-formuł:
$i : (p \rightarrow Fq)$, $\quad i : j$, $\quad i : Pj$.

2. Semantyka

Pojęcie struktury modelowej dla logiki hybrydowej nie ulega zmianie, natomiast definicja waluacji musi ulec pewnej zmianie, aby zgadzać się z intuicyjną interpretacją nominałów.

Definicja 10 *Waluacją jest dowolna funkcja* $V : ZZ \cup NOM \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{T})$*, taka, że* $V(\sigma)$ *dla dowolnego nominału* σ *jest singletonem.*

Warunki spełniania formuł pozostają bez zmian, natomiast dodatkowy warunek dla sat-formuł wygląda następująco:

$\mathfrak{M}, t \vDash \sigma : \varphi$ wtw $\mathfrak{M}, t' \vDash \varphi$, gdzie $\{t'\} = V(\sigma)$

3. Logiki

Najmniejsza hybrydowa logika temporalna $\mathbf{Kt_H}$ wymaga dodania do **Kt** następujących schematów aksjomatów:

(K:)	$\sigma : (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\sigma : \varphi \rightarrow \sigma : \psi)$
(S-D:)	$\sigma : \varphi \leftrightarrow \neg\sigma : \neg\varphi$
(D:)	$\sigma \wedge \varphi \rightarrow \sigma : \varphi$
(ZWR-N)	$\sigma : \sigma$
(SYM-N)	$\sigma : \tau \leftrightarrow \tau : \sigma$
(NOM)	$\sigma : \varphi \wedge \sigma : \tau \rightarrow \tau : \varphi$
(AGREE)	$\tau : \sigma : \varphi \leftrightarrow \sigma : \varphi$
(BACK)	$F\sigma : \varphi \rightarrow \sigma : \varphi$

Oprócz domknięcia na (MP) i (RG) $\mathbf{Kt_H}$ jest domknięta na regułę Gödla dla funktora spełniania tzn. (RG:) jeżeli $\varphi \in \mathbf{Kt_H}$, to $\sigma : \varphi \in \mathbf{Kt_H}$ dla dowolnego nominału σ. Natomiast reguła podstawiania zachodzi w następującej postaci: jeżeli $\varphi \in \mathbf{Kt_H}$, to e($\varphi$) $\in \mathbf{Kt_H}$, gdzie e:ZZ$\longrightarrow$FOR, ale e:NOM$\longrightarrow$NOM.

4. Dodatkowe aksjomaty

aksjomat	warunek
$\sigma \rightarrow G\neg\sigma$	przeciwzwrotność
$\sigma \rightarrow GG\neg\sigma$	asymetria mocna
$\sigma \rightarrow G(F\sigma \rightarrow \sigma)$	asymetria słaba
$\sigma : F\tau \vee \tau : F\sigma$	liniowość mocna
$\sigma : F\tau \vee \tau : F\sigma \vee \sigma : \tau$	liniowość słaba

Standardowy dowód pełności dla Kt4

Jest to dowód niekonstruktywny, oparty o konstrukcję modelu kanonicznego metodą Henkina (a właściwie Lindenbauma). Pokazuje, że istnieje jeden model nieskończony (model kanoniczny), przechodni i przeciwzwrotny, który falsyfikuje każdą formułę niedowiedlną w **Kt4**.

Definicja (Zbiór niesprzeczny i maksymalnie niesprzeczny):

1. Γ jest niesprzeczny ($Nsp(\Gamma)$) wtw, $\Gamma \nvdash \perp$

2. Γ jest maksymalnie niesprzeczny ($MNsp(\Gamma)$) wtw,:

i) $Nsp(\Gamma)$

ii) dla dowolnego Δ, jeżeli $\Gamma \subseteq \Delta$, to $\Delta \vdash \perp$

Przypomnijmy, że zachodzi:

(**TDN**): $\Gamma, \neg\varphi \vdash \bot$ wtw, $\Gamma \vdash \varphi$

Lemat 1 Dla dowolnego $MNsp(\Gamma)$ zachodzi:

1.1. $\varphi \notin \Gamma$ wtw, $\neg\varphi \in \Gamma$

1.2. jeżeli $\vdash \varphi$, to $\varphi \in \Gamma$

1.3. jeżeli $\varphi \in \Gamma$ i $\varphi \to \psi \in \Gamma$, to $\psi \in \Gamma$

Lemat 2 (Lindenbaum) Jeżeli $Nsp(\Gamma)$, to istnieje $MNsp(\Delta)$, taki, że $\Gamma \subseteq \Delta$

Definicja

$\Gamma^\star = \{\varphi : G\varphi \in \Gamma\} \qquad \Gamma^\sharp = \{\varphi : H\varphi \in \Gamma\}$

Lemat 3 Niech $Nsp(\Gamma)$, to:

a) jeżeli $F\varphi \in \Gamma$, to $Nsp(\Gamma^{\star} \cup \{\varphi\})$

b) jeżeli $P\varphi \in \Gamma$, to $Nsp(\Gamma^{\sharp} \cup \{\varphi\})$

Definicja: Model kanoniczny dla **Kt4**, to $\mathfrak{M}_c = \langle \mathcal{T}_c, \mathcal{R}_c, V_c \rangle$ gdzie:

$\mathcal{T}_c = \{\Gamma : MNsp(\Gamma)\}$

$\mathcal{R}_c \Gamma \Delta$ wtw, $\Gamma^{\star} \subseteq \Delta$

$V_c(p) = \{\Gamma : p \in \Gamma\}$

Lemat 4 $\mathcal{R}_c \Gamma \Delta$ wtw, $\Delta^{\sharp} \subseteq \Gamma$

Lemat 5 Dla dowolnego $MNsp(\Gamma)$:

a) jeżeli $G\varphi \in \Gamma$, to $\varphi \in \Delta$, dla dowolnego Δ, takiego, że $\mathcal{R}_c\Gamma\Delta$

b) jeżeli $H\varphi \in \Gamma$, to $\varphi \in \Delta$, dla dowolnego Δ, takiego, że $\mathcal{R}_c\Delta\Gamma$

Lemat 6 Dla dowolnego $MNsp(\Gamma), \varphi \in \Gamma$ wtw, $\mathfrak{M}_c, \Gamma \models \varphi$

Musimy jeszcze wykazać że $\mathfrak{M}_c$ jest modelem **Kt4**

Lemat 7 $\mathcal{R}_c$ jest przechodnia.

$\mathfrak{M}_c$ nie musi być jednak przeciwzwrotny. Są 3 znane techniki pozwalające uzyskać przeciwzwrotny model kanoniczny:

- Zastosowanie techniki "spychania" (bulldozing).

- Dołączenie niestrukturalnych reguł Gabbaya.

- Użycie hybrydowej wersji **Kt4**

Aby otrzymać przeciwzwrotność z użyciem "spychania" należy $\mathfrak{M}_c$ przekształcamy na $\mathfrak{M}'_c$ w następujący sposób:

- $\mathcal{T}'_c = \mathcal{T}_c \times \mathbf{C}$

- $\langle\langle \Gamma, m\rangle, \langle \Delta, n\rangle\rangle \in \mathcal{R}'_c$ wtw, $\mathcal{R}_c\Gamma\Delta$ i $m < n$

- $\langle \Gamma, m\rangle \in V'_c(p)$ wtw, $\Gamma \in V_c(p)$

Lemat 8 $\mathfrak{M}_c \models \varphi$ wtw, $\mathfrak{M}'_c \models \varphi$ a ponadto $\mathcal{R}'_c$ jest przeciwzwrotna

Aby wymusić przeciwzwrotność metodą Gabbaya musimy do **Kt4** dołączyć regułę o postaci:

(IR) jeżeli $\vdash \neg(Gp \rightarrow p) \rightarrow \varphi$, to $\vdash \varphi$, pod warunkiem, że $p \notin \varphi$

Jako wniosek otrzymujemy:

Twiedzenie o pełności: Jeżeli $\Gamma \models \varphi$, to $\Gamma \vdash \varphi$

Twierdzenie odwrotne (o zgodności) dowodzimy przez indukcję po długości dowodu.

LPTL – Logika specyfikacji i weryfikacji programów

1. Język oparty o $\bigcirc$ i $\mathcal{U}$ (mocne "until") oraz $*$ i $\mathcal{S}$ (mocne "since"). Dodatkowo definiujemy mocne odpowiedniki Priorowskich funktorów temporalnych i mocną wersję $*$:

$[F]\varphi := \neg(\top\mathcal{U}\neg\varphi) \quad \langle F\rangle\varphi := \top\mathcal{U}\varphi$

$[P]\varphi := \neg(\top\mathcal{S}\neg\varphi) \quad \langle P\rangle\varphi := \top\mathcal{S}\varphi$

$\ominus\varphi := \neg * \neg\varphi$

2. Semantyka

Klasa modeli na strukturze $\langle \mathbf{N}, < \rangle$, o postaci $\langle S, \sigma, V\rangle$, gdzie: S to niepusty zbiór stanów programu, $\sigma : \mathbf{N} \longrightarrow S$ to przebieg programu, a $V : ZZ \longrightarrow \mathcal{P}(S)$ to waluacja zmiennych.

Definicję *spełniania formuły* φ *w stanie* i *modelu* $\mathfrak{M}$ ($\mathfrak{M}, i \models \varphi$) wyrażają poniższe warunki:

$\mathfrak{M}, i \models p$	wtw	$t \in V(p)$
$\mathfrak{M}, i \models \bigcirc\varphi$	wtw	$\mathfrak{M}, i{+}1 \models \varphi$
$\mathfrak{M}, i \models *\varphi$	wtw	$i = 0$ lub $i > 0$ i $\mathfrak{M}, i$-1 $\models \varphi$
$\mathfrak{M}, i \models \ominus\varphi$	wtw	$i > 0$ i $\mathfrak{M}, i$-1 $\models \varphi$
$\mathfrak{M}, i \models \varphi\mathcal{U}\psi$	wtw	$\mathfrak{M}, k \models \psi$ dla pewnego $k \geq i$ oraz $\mathfrak{M}, j \models \varphi$ dla każdego j takiego, że $i \leq j < k$
$\mathfrak{M}, i \models \varphi\mathcal{S}\psi$	wtw	$\mathfrak{M}, k \models \psi$ dla pewnego k takiego, że $0 \leq k \leq i$ oraz $\mathfrak{M}, j \models \varphi$ dla każdego j takiego, że $k < j \leq i$
$\mathfrak{M}, i \models [F]\varphi$	wtw	$\mathfrak{M}, j \models \varphi$ dla dowolnego $j \geq i$
$\mathfrak{M}, i \models \langle F\rangle\varphi$	wtw	$\mathfrak{M}, j \models \varphi$ dla pewnego $j \geq i$
$\mathfrak{M}, i \models [P]\varphi$	wtw	$\mathfrak{M}, j \models \varphi$ dla dowolnego $j \leq i$
$\mathfrak{M}, i \models \langle P\rangle\varphi$	wtw	$\mathfrak{M}, j \models \varphi$ dla pewnego $j \leq i$

Definicja 11 (Tautologiczność lokalna)

φ jest spełnialne wtw, φ jest spełnione w pewnym stanie jakiegoś modelu.

φ jest prawdziwe w $\mathfrak{M}$ ($\mathfrak{M} \vDash \varphi$) wtw, $\mathfrak{M}, 0 \vDash \varphi$.

φ jest tautologią **LPTL** *($\models \varphi$) wtw, φ jest prawdziwe w każdym modelu.*

Wersję z globalną tautologicznością uzyskamy przy standardowej definicji prawdziwości w modelu (tj. prawdziwość we wszystkich stanach).

Twierdzenie 2

$\models \varphi$ wtw $*\bot \rightarrow \varphi$ jest globalnie tautologiczna

φ jest globalnie tautologiczna wtw $\models [F]\varphi$

3. Ujęcie aksjomatyczne

A. Schematy aksjomatów – przyszłość:

- Dowolne φ, które jest schematem tezy **KRZ**

- $(SelfDual_{\bigcirc})$ $\bigcirc\neg\varphi \leftrightarrow \neg \bigcirc \varphi$

- (K_F) $[F](\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ([F]\varphi \rightarrow [F]\psi)$

- $(K_{\bigcirc})$ $\bigcirc(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\bigcirc\varphi \rightarrow \bigcirc\psi)$

- (T) $[F]\varphi \rightarrow \varphi$

- $(4_{\bigcirc})$ $[F]\varphi \rightarrow [F] \bigcirc \varphi$

- (Ind) $[F](\varphi \rightarrow \bigcirc\varphi) \rightarrow [F](\varphi \rightarrow [F]\varphi)$

- $(\mathcal{U}_1)$ $\varphi \mathcal{U} \psi \to \langle F \rangle \varphi$

- $(\mathcal{U}_2)$ $\varphi \mathcal{U} \psi \leftrightarrow \psi \vee (\varphi \wedge \bigcirc(\varphi \mathcal{U} \psi))$

B. Schematy aksjomatów – przeszłość:

- (K_*) $*(\varphi \to \psi) \to (*\varphi \to *\psi)$

- $(D_\ominus)$ $\ominus\varphi \to *\varphi$

- (4_*) $[F]\varphi \to [F] * \varphi$

- $(Start)$ $*\bot$

- $(\mathcal{S})$ $\varphi \mathcal{S} \psi \leftrightarrow \psi \vee (\varphi \wedge *(\varphi \mathcal{S} \psi))$

C. Reguły pierwotne:

- (MP) jeżeli $\varphi \in$ **LPTL** i $\varphi \to \psi \in$ **LPTL**, to $\psi \in$ **LPTL**

- (RG_F) jeżeli $\varphi \in$ **LPTL**, to $[F]\varphi \in$ **LPTL**

- (RG_P) jeżeli $\varphi \in$ **LPTL**, to $[P]\varphi \in$ **LPTL**

4. Zastosowania

- specyfikacja programów

- weryfikacja programów

- programowanie logiczne

- dynamiczne bazy danych

Podstawowe klasy własności:

A. dotyczące bezpieczeństwa, typu $G\varphi$ lub $w \to G\varphi$, np. częściowa poprawność: $w \to G(k \to \varphi)$

B. dotyczące żywotności, typu $F\varphi$ lub $w \to F\varphi$, np. całkowita poprawność: $w \to F(k \wedge \varphi)$

Podstawowe techniki weryfikacji programów to metoda sprawdzania modelu (model checking), która częściowo korzysta z formalizmu logik temporalnych i metoda aksjomatyczna, która wykorzystuje go w całości.

Temporalne języki programowania:

a) XYZ/E (Tang 83)

b) TEMPURA (Moszkowski 85)

c) TOKIO (Aoyagi, Fujita 86)

d) METATEM (Barringer 89)

Systemy dedukcyjne

A. Konwencje zapisu

α	α_1	α_2	β	β_1	β_2
$\varphi \wedge \psi$	φ	ψ	$\neg(\varphi \wedge \psi)$	$\neg\varphi$	$\neg\psi$
$\neg(\varphi \vee \psi)$	$\neg\varphi$	$\neg\psi$	$\varphi \vee \psi$	φ	ψ
$\neg(\varphi \to \psi)$	φ	$\neg\psi$	$\varphi \to \psi$	$\neg\varphi$	ψ

π^F	π^P	ν^F	ν^P	$\pi = \nu$
$F\varphi$	$P\varphi$	$G\varphi$	$H\varphi$	φ
$\neg G\varphi$	$\neg H\varphi$	$\neg F\varphi$	$\neg P\varphi$	$\neg\varphi$

Definicja 12 (Dopełnienia, podformuły) $-\varphi$ *oznacza* dopełnienie φ *lub inaczej: jest formułą komplementarną do* φ*; jest to* ψ*, jeżeli* $\varphi = \neg\psi$*, lub* $\neg\varphi$ *w przeciwnym wypadku.*

B. Dedukcja Naturalna: reguły inferencji

$(\bot)$ φ , $-\varphi$ / $\bot$ $(\neg\neg)$ $\neg\neg\varphi$ / φ

(αE) α / α_i, gdzie $i \in \{1{,}2\}$

(αD) α_1 , α_2 / α

(βE) β , $-\beta_i$ / β_j , gdzie $i \neq j \in \{1{,}2\}$

(βD) β_i / β , gdzie $i \in \{1{,}2\}$

Definicja $\Gamma^\star$ i $\Gamma^\sharp$

L	$\Gamma^\star(\mathbf{L})$
Kt	$\{\nu : \nu^F \in \Gamma\} \cup \{\pi^P : \pi \in \Gamma\}$
Kt4	$\Gamma^\star(\mathbf{Kt}) \cup \{\nu^F : \nu^F \in \Gamma\}$
Kt4.3	$\Gamma^\star(\mathbf{Kt4}) \cup \{\nu^P : \{\nu,\ \nu^F,\ \nu^P\} \subseteq \Gamma\}$

L	$\Gamma^\sharp(\mathbf{L})$
Kt	$\{\nu : \nu^P \in \Gamma\} \cup \{\pi^F : \pi \in \Gamma\}$
Kt4	$\Gamma^\star(\mathbf{Kt}) \cup \{\nu^P : \nu^P \in \Gamma\}$
Kt4.3	$\Gamma^\star(\mathbf{Kt4}) \cup \{\nu^F : \{\nu,\ \nu^F,\ \nu^P\} \subseteq \Gamma\}$

Reguły konstrukcji dowodu:

$$\begin{array}{lll} & \mathcal{D} & \\ i & \text{DØW:} \ \beta & \\ i+1 & & \boxed{\begin{array}{c} -\beta_i \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_j \end{array}} \\ k & & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} & \mathcal{D} & \\ i & \text{DØW:} \ \varphi & \\ i+1 & & \boxed{\begin{array}{c} -\varphi \\ \cdot \\ \cdot \\ \bot \end{array}} \\ k & & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} & \Gamma & \\ i & \text{DØW:} \ \nu^F & \\ & & \boxed{\begin{array}{c} \Gamma^\star \\ \cdot \\ \cdot \\ \nu \end{array}} \\ k & & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} & \Gamma & \\ i & \text{DØW:} \ \nu^P & \\ & & \boxed{\begin{array}{c} \Gamma^\sharp \\ \cdot \\ \cdot \\ \nu \end{array}} \\ k & & \end{array}$$

C. Etykietowane diagramy Betha

Etykiety to skończone ciągi liczb naturalnych bez 0, zawsze zaczynające się od 1. Formalnie:

1. 1 $\in$ET

2. Jeżeli σ $\in$ET, to $\sigma.k$ $\in$ET

$\sigma.k$ denotuje etykietę, której ostatni element to k; $\sigma\tau$: oznacza etykietę, która jest konkatenacją dwóch ciągów;

Będziemy nazywali etykietę σ *rodzicem* a $\sigma.i$ *dzieckiem*; oprócz 1. każda inna etykieta jest dzieckiem.

Dodatkowo wszystkie dzieci dzielimy na synów (albo F-etykiety) i córki (P-etykiety). Płeć zaznaczamy stawiając za etykietą $[i]$, gdzie $i \in \{F, P\}$

Przykład i interpretacja

$1, 1.2.1.1.5, 1.1.1.1.3$, są etykietami, a 4.1.3.7, czy 1.3.0.5 etykietami nie są. $1.3.2.1[F]$ jest synem, a $1.1.3.3.2[P]$ jest córką. Nieformalnie, etykieta jest nazwą określonego momentu w konstruowanym modelu, a jej struktura pokazuje, jakie miejsce względem innych momentów zajmuje. Np. to, że $1.3.2.1[F]$ jest synem 1.3.2 oznacza, że do $\mathcal{R}$ należy para $\langle 1.3.2, 1.3.2.1 \rangle$, a to, że $1.1.3.3.2[P]$ jest córką 1.1.3.3 oznacza, że $\langle 1.1.3.3.2, 1.1.3.3 \rangle$ należy do $\mathcal{R}$.

Definicja 13 (Formuły etykietowane) *Dla dowolnej formuły φ i etykiety σ, $\sigma[i] : \varphi$ jest formułą etykietowaną (jeżeli $\sigma = 1$, to brak jest $[i]$).*

Intuicyjnie $\sigma[i] : \varphi$ oznacza, że φ jest spełnione w modelu w momencie σ. W schematach reguł pomijamy $[i]$ jeżeli nie jest niezbędne.

Reguły

1. Bazowa formalizacja dla E-**Kt**

($\bot$) $\sigma : \varphi$, $\sigma : -\varphi$ / $\bot$

($\neg\neg$) $\sigma : \neg\neg\varphi$ / $\sigma : \varphi$

(α) $\sigma : \alpha$ / $\sigma : \alpha_i$, gdzie $i \in \{1, 2\}$

(β) $\sigma : \beta$ / $\sigma : \beta_1 \ \mid \ \sigma : \beta_2$

(π) $\sigma : \pi^i$ / $\sigma.k : \pi$, gdzie $i \in \{F, P\}$, a $\sigma.k$ jest nową i-etykietą

(ν) $\sigma : \nu^i$ / $\sigma.k : \nu$, gdzie $i \in \{F, P\}$, a $\sigma.k$ jest dowolną i-etykietą

(Bν) $\sigma.k : \nu^i$ / $\sigma : \nu$, gdzie $\sigma.k$ jest dowolną j-etykietą oraz $i \neq j \in \{F, P\}$

Reguły dodatkowe:

2. E-**Kt4** $=$ E-**Kt** $+$

(ν4) $\sigma : \nu^i$ / $\sigma.k : \nu^i$, gdzie $i \in \{F, P\}$, a $\sigma.k$ jest dowolną i-etykietą

(Bν4) $\sigma.k : \nu^i$ / $\sigma : \nu^i$, gdzie $\sigma.k$ jest dowolną j-etykietą oraz $i \neq j \in \{F, P\}$

3. E-**Kt4.3** $=$ E-**Kt4** $+$

(A-CUT) Γ / $\sigma : \varphi \mid \sigma : -\varphi$, gdzie φ jest podformułą dowolnej formuły z Γ, a σ jest dowolną etykietą

(3) $\sigma : \nu_1^i$, $\sigma : \nu_1$, $\tau : -\nu_1$, $\tau : \nu_2^i$ / $\sigma : \nu_2$, $\sigma : \nu_2^i$, gdzie $i \in \{F, P\}$

(3') $\sigma : \nu_1^i$, $\sigma : \nu_1$, $\tau : -\nu_1$, $\sigma : \nu_2^j$ / $\tau : \nu_2$, $\tau : \nu_2^j$, gdzie $i \neq j \in \{F, P\}$

Dygresja – The Master Argument

1. Wszystko co jest przeszłe i prawdziwe jest konieczne.

2. Niemożliwe nie wynika z możliwego.

3. Co ani nie jest, ani nie będzie, jest możliwe.

ZP: Każda możliwość kiedyś się zaktualizuje.

1. $P\varphi \rightarrow \Box P\varphi$

2. $\vdash \varphi \rightarrow \psi \ / \ \vdash \Diamond\varphi \rightarrow \Diamond\psi$

3. $\neg\varphi \wedge \neg F\varphi \wedge \Diamond\varphi$

($\neg 3 \leftrightarrow \neg\varphi \wedge \neg F\varphi \rightarrow \neg\Diamond\varphi$)

DC: $\varphi \wedge G\varphi \rightarrow PG\varphi$

CZAS I MODALNOŚĆ

Problem historycznej konieczności:

- Rozwiązanie Łukasiewicza
- Logika Peirce'a (rozwiązanie syntaktyczne)
- Logika Ockhama (czas rozgałęziony)

Ważniejsze formalizacje dla logiki Ockhama:

- Rozwiązanie Kampa
- Rozwiązanie Priora (T-struktury)
- Rozwiązanie Burgessa (wiązkowe T-struktury)

Logika Ockhama: struktury Kampa

Definicja 14 (K-struktura)

<u>K-strukturą</u> jest dowolna trójka $\mathfrak{K} = \langle \mathcal{W}, <, \equiv \rangle$ gdzie $\mathcal{K} \neq \varnothing$, $<$ jest relacją liniowego porządku na $\mathcal{K}$, a $\equiv$ jest relacją równoważności na $\mathcal{K}$, która spełnia następujące warunki:

- $\forall xy(x \equiv y \rightarrow \neg(x < y))$

- $\forall xyz(x \equiv y \wedge z < x \rightarrow \exists v(v < y \wedge z \equiv v))$

Definicja 15 (Model na K-strukturze)

Modelem na K-strukturze $\mathfrak{K}$ jest dowolny układ $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{K}, V \rangle$, gdzie V jest funkcją waluacji dla zmiennych ($V : ZZ \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{W})$), która spełnia warunek: jeżeli $w \equiv w'$, to ($w \in V(p)$ wtw $w' \in V(p)$), dla dowolnej zmiennej p.

Definicję *spełniania formuły* φ *w punkcie* w *modelu* $\mathfrak{M}$ ($\mathfrak{M}, w \models \varphi$) wyrażają poniższe warunki:

$\mathfrak{M}, w \models p$	wtw	$w \in V(p)$
$\mathfrak{M}, w \models \neg\varphi$	wtw	$\mathfrak{M}, w \not\models \varphi$
$\mathfrak{M}, w \models \varphi \wedge \psi$	wtw	$\mathfrak{M}, w \models \varphi$ i $\mathfrak{M}, w \models \psi$
$\mathfrak{M}, w \models \varphi \vee \psi$	wtw	$\mathfrak{M}, w \models \varphi$ lub $\mathfrak{M}, w \models \psi$
$\mathfrak{M}, w \models \varphi \rightarrow \psi$	wtw	$\mathfrak{M}, w \not\models \varphi$ lub $\mathfrak{M}, w \models \psi$
$\mathfrak{M}, w \models G\varphi$	wtw	$\mathfrak{M}, w' \models \varphi$ dla dowolnego $w' > w$
$\mathfrak{M}, w \models F\varphi$	wtw	$\mathfrak{M}, w' \models \varphi$ dla pewnego $w' > w$
$\mathfrak{M}, w \models H\varphi$	wtw	$\mathfrak{M}, w' \models \varphi$ dla dowolnego $w' < w$
$\mathfrak{M}, w \models P\varphi$	wtw	$\mathfrak{M}, w' \models \varphi$ dla pewnego $w' < w$
$\mathfrak{M}, w \models \Box\varphi$	wtw	$\mathfrak{M}, w' \models \varphi$ dla dowolnego $w' \equiv w$
$\mathfrak{M}, w \models \Diamond\varphi$	wtw	$\mathfrak{M}, w' \models \varphi$ dla pewnego $w' \equiv w$

φ jest $\mathbf{OHN_K}$-tautologią ($\models_K \varphi$) wtw, $\mathfrak{M}, w \models \varphi$ w każdym w, każdego modelu $\mathfrak{M}$, na dowolnej K-strukturze.

Aksjomatyzacja **OHN** Kampa

A. Schematy aksjomatów:

- Dowolne φ, które jest schematem tezy **KRZ**
- $(Dual_F)$ $F\varphi \leftrightarrow \neg G \neg \varphi$
- $(Dual_P)$ $P\varphi \leftrightarrow \neg H \neg \varphi$
- (K_F) $G(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (G\varphi \rightarrow G\psi)$
- (K_P) $H(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (H\varphi \rightarrow H\psi)$
- (S_F) $\varphi \rightarrow GP\varphi$
- (S_P) $\varphi \rightarrow HF\varphi$

- (4) $G\varphi \to GG\varphi$
- (3$_F$) $PF\varphi \to P\varphi \vee F\varphi \vee \varphi$
- (3$_P$) $FP\varphi \to P\varphi \vee F\varphi \vee \varphi$
- $(Dual_\Diamond)$ $\Diamond\varphi \leftrightarrow \neg\Box\neg\varphi$
- (K) $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$
- (T) $\Box\varphi \to \varphi$
- (5) $\Diamond\varphi \to \Box\Diamond\varphi$
- $(HN1)$ $P\varphi \to \Box P\Diamond\varphi$
- $(HN2)$ $G\bot \to \Box G\bot$

- $(HN3)$ $\varphi \to \Box\varphi$, dla dowolnego $\varphi \in ZZ$

B. Reguły pierwotne:

- (MP) jeżeli $\varphi \in$ **OHN** i $\varphi \to \psi \in$ **OHN**, to $\psi \in$ **OHN**

- (RG) jeżeli $\varphi \in$ **OHN**, to $\Box\varphi \in$ **OHN**

- (RG_F) jeżeli $\varphi \in$ **OHN**, to $G\varphi \in$ **OHN**

- (RG_P) jeżeli $\varphi \in$ **OHN**, to $H\varphi \in$ **OHN**

- (IR) jeżeli $(p \wedge H\neg p) \to \varphi \in$ **OHN**, to $\varphi \in$ **OHN**, pod warunkiem, że $p \notin ZZ(\varphi)$

Logika Ockhama: semantyka T-struktur

Definicja 16 (T-struktura)

T-strukturą jest dowolna para $\mathfrak{T} = \langle \mathcal{T}, < \rangle$ gdzie $\mathcal{T} \neq \varnothing$ a $<$ jest binarną relacją na $\mathcal{T}$, która spełnia następujące warunki:

- jest quasi-porządkiem (jest przechodnia i przeciwzwrotna)

- jest słabo P-spójna ($\forall xyz(y < x \wedge z < x \rightarrow y < z \vee z < y \vee y = z)$)

- jest P-zbieżna ($\forall xy \exists z(z \leq x \wedge z \leq y)$)

b jest gałęzią w $\mathfrak{T}$ wtw, jest maksymalnym łańcuchem w $\mathfrak{T}$. B_t to zbiór wszystkich gałęzi zawierających moment t.

Wiązką na $\mathfrak{T}$ jest taki zbiór B gałęzi, że każde $t \in \mathcal{T}$ należy do co najmniej jednej $b \in B$.

Definicja 17 (wiązkowa T-struktura)

Wiązkową T-strukturą jest dowolna trójka $\mathfrak{T}_{\mathfrak{B}} = \langle \mathcal{T}, <, B \rangle$ gdzie $\langle \mathcal{T}, < \rangle$ jest T-strukturą, a B jest wiązką

Definicja 18 (Model na T-strukturze)

Modelem na (wiązkowej) T-strukturze $\mathfrak{T}$ ($\mathfrak{T}_{\mathfrak{B}}$) jest dowolny układ $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{T}, V \rangle$ ($\mathfrak{M}_{\mathfrak{B}} = \langle \mathfrak{T}_{\mathfrak{B}}, V \rangle$), gdzie V jest funkcją waluacji dla zmiennych, tj. $V : ZZ \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{T})$.

Definicję *spełniania formuły* φ *w punkcie* t*, na gałęzi* b *modelu* $\mathfrak{M}$ ($\mathfrak{M}, b, t \vDash \varphi$) wyrażają poniższe warunki:

$\mathfrak{M}, b, t \models p$	wtw	$t \in V(p)$
$\mathfrak{M}, b, t \models \neg\varphi$	wtw	$\mathfrak{M}, b, t \not\models \varphi$
$\mathfrak{M}, b, t \models \varphi \wedge \psi$	wtw	$\mathfrak{M}, b, t \models \varphi$ i $\mathfrak{M}, b, t \models \psi$
$\mathfrak{M}, b, t \models \varphi \vee \psi$	wtw	$\mathfrak{M}, b, t \models \varphi$ lub $\mathfrak{M}, b, t \models \psi$
$\mathfrak{M}, b, t \models \varphi \rightarrow \psi$	wtw	$\mathfrak{M}, b, t \not\models \varphi$ lub $\mathfrak{M}, b, t \models \psi$
$\mathfrak{M}, b, t \models G\varphi$	wtw	$\mathfrak{M}, b, t' \models \varphi$ dla dowolnego $t' \in b$ takiego, że $t < t'$
$\mathfrak{M}, b, t \models F\varphi$	wtw	$\mathfrak{M}, b, t' \models \varphi$ dla pewnego $t' \in b$ takiego, że $t < t'$
$\mathfrak{M}, b, t \models H\varphi$	wtw	$\mathfrak{M}, b, t' \models \varphi$ dla dowolnego $t' \in b$ takiego, że $t' < t$
$\mathfrak{M}, b, t \models P\varphi$	wtw	$\mathfrak{M}, b, t' \models \varphi$ dla pewnego $t' \in b$ takiego, że $t' < t$
$\mathfrak{M}, b, t \models \Box\varphi$	wtw	$\mathfrak{M}, b', t \models \varphi$ dla dowolnego $b' \in B_t$
$\mathfrak{M}, b, t \models \Diamond\varphi$	wtw	$\mathfrak{M}, b', t \models \varphi$ dla pewnego $b' \in B_t$

φ jest $\mathbf{OHN_P}$-tautologią ($\models_P \varphi$) wtw, $\mathfrak{M}, b, t \models \varphi$ w każdym $t \in b$, każdej b, każdego modelu $\mathfrak{M}$, na dowolnej T-strukturze.

φ jest $\mathbf{OHN_B}$-tautologią ($\models_B \varphi$) wtw, $\mathfrak{M}_{\mathfrak{B}}, b, t \models \varphi$ w każdym $t \in b$, każdej $b \in B$, każdego modelu $\mathfrak{M}_{\mathfrak{B}}$, na dowolnej wiązkowej T-strukturze.

LOGIKA CTL
(COMPUTATIONAL TREE LOGIC)

1. Motywacje

$\forall G\varphi$ — φ jest spełnione w każdym stanie każdej możliwej przyszłości (na każdej gałęzi); jest uniwersalnie prawdziwe.

$\forall F\varphi$ — φ jest spełnione w pewnym stanie każdej możliwej przyszłości (na każdej gałęzi); jest nieuniknione.

$\exists G\varphi$ — φ jest spełnione w każdym stanie pewnej możliwej przyszłości (na pewnej gałęzi); jest uniwersalną prawdą w pewnym wariancie przyszłości.

$\exists F\varphi$ — φ jest spełnione w pewnym stanie pewnej możliwej przyszłości (na pewnej gałęzi); jest potencjalnie prawdziwe.

$\forall \bigcirc \varphi$ — φ jest spełnione w następnym stanie każdej możliwej przyszłości (na każdej gałęzi).

$\exists \bigcirc \varphi$ — φ jest spełnione w następnym stanie pewnej możliwej przyszłości (pewnej gałęzi).

$\forall(\varphi \mathcal{U} \psi)$ — w każdej możliwej przyszłości φ zachodzi aż zajdzie ψ.

$\exists(\varphi \mathcal{U} \psi)$ — w pewnej możliwej przyszłości φ zachodzi aż zajdzie ψ.

Historia:

Lamport (1980) **PBTL** język z $\forall G, \forall F, \exists G, \exists F$

Ben-Ari (1981) **UB** język z $\forall G, \forall F, \exists G, \exists F, \forall\bigcirc, \exists\bigcirc$

Clarke, Emerson (1981) **CTL** język z $\forall\bigcirc, \forall\mathcal{U}, \exists\mathcal{U}$ jako funktorami pierwotnymi; pozostałe są definiowalne.

2. Semantyka CTL

Klasa T-modeli, gdzie (nośnik) S to niepusty zbiór stanów programu, w której każda gałąź b jest liniowo uporządkowana przez **N**. σ to dowolny przebieg programu (ścieżka obliczeniowa), czyli gałąź lub jej część – dowolny łańcuch; σ_i oznacza przebieg o pierwszym stanie i.

Definicję *spełniania formuły* φ *w stanie* i *modelu* $\mathfrak{M}$ ($\mathfrak{M}, i \vDash \varphi$) wyrażają poniższe warunki:

$\mathfrak{M}, i \vDash \forall \bigcirc \varphi$	wtw	w każdym przebiegu σ_i, $\mathfrak{M}, i{+}1 \vDash \varphi$
$\mathfrak{M}, i \vDash \forall(\varphi \mathcal{U} \psi)$	wtw	w każdym przebiegu σ_i, $\mathfrak{M}, k \vDash \psi$ dla pewnego $k \geq i$ oraz $\mathfrak{M}, j \vDash \varphi$ dla każdego j takiego, że $i \leq j < k$
$\mathfrak{M}, i \vDash \exists(\varphi \mathcal{U} \psi)$	wtw	w pewnym przebiegu σ_i, $\mathfrak{M}, k \vDash \psi$ dla pewnego $k \geq i$ oraz $\mathfrak{M}, j \vDash \varphi$ dla każdego j takiego, że $i \leq j < k$

3. Aksjomatyzacja CTL

A. Schematy aksjomatów:

- Dowolne φ, które jest schematem tezy **KRZ**
- $(K_{\bigcirc})$ $\forall \bigcirc (\varphi \to \psi) \to (\forall \bigcirc \varphi \to \forall \bigcirc \psi)$
- $(D_{\bigcirc})$ $\exists \bigcirc \top$
- $(\exists \mathcal{U})$ $\exists(\varphi \mathcal{U} \psi) \leftrightarrow (\psi \vee (\varphi \wedge \exists \bigcirc \exists(\varphi \mathcal{U} \psi)))$
- $(\forall \mathcal{U})$ $\exists(\varphi \mathcal{U} \psi) \leftrightarrow (\psi \vee (\varphi \wedge \forall \bigcirc \forall(\varphi \mathcal{U} \psi)))$

B. Reguły pierwotne:

- (MP) jeżeli $\varphi \in$ **CTL** i $\varphi \to \psi \in$ **CTL**, to $\psi \in$ **CTL**

- $(RG_{\bigcirc})$ jeżeli $\varphi \in$ **CTL**, to $\forall \bigcirc \varphi \in$ **CTL**

- $(\exists IND)$ jeżeli $(\psi \vee (\varphi \wedge \exists \bigcirc \chi) \rightarrow \chi \in$ **CTL**, to $\exists(\varphi \mathcal{U} \psi) \rightarrow \chi \in$ **CTL**

- $(\forall IND)$ jeżeli $(\psi \vee (\varphi \wedge \forall \bigcirc \chi) \rightarrow \chi \in$ **CTL**, to $\forall(\varphi \mathcal{U} \psi) \rightarrow \chi \in$ **CTL**

C. Definicje:

$\forall F\varphi := \forall(\top \mathcal{U} \varphi)$ $\quad$ $\exists F\varphi := \exists(\top \mathcal{U} \varphi)$

$\forall G\varphi := \neg\exists(\top \mathcal{U} \neg\varphi)$ $\quad$ $\exists G\varphi := \neg\forall(\top \mathcal{U} \neg\varphi)$

$\exists \bigcirc \varphi := \neg\forall \bigcirc \neg\varphi$

LOGIKA CTL* (PEŁNA CTL)

1. Ogólne ujęcie języka

Wyróżniamy formuły stanowe (s-formuły) i przebiegowe (p-formuły):

1. każda formuła atomowa jest s-formułą;
2. jeżeli φ i ψ są s-formułami, to dowolne ich złożenie z funktorami klasycznymi jest s-formułą;
3. jeżeli φ jest s-formułą, to $G\varphi, F\varphi$ jest p-formułą;
4. jeżeli φ jest s-formułą, to $\bigcirc\varphi$ jest p-formułą;

5. jeżeli φ jest p-formułą, to $\exists\varphi, \forall\varphi$ jest s-formułą;

6. jeżeli φ i ψ są s-formułami, to $\varphi\mathcal{U}\psi$ jest p-formułą;

7. jeżeli φ i ψ są p-formułami, to dowolne ich złożenie z funktorami klasycznymi jest p-formułą.

8. każda s-formuła jest p-formułą;

9. jeżeli φ i ψ są p-formułami, to $G\varphi, F\varphi, \bigcirc\varphi, \varphi\mathcal{U}\psi$ jest p-formułą;

Warunki 1-3, 5 dają język **PBTL**; warunki 1-5 dają język **UB**; 1-5, 7 – **UB**$^+$; 1-6 – **CTL**; 1-7 – **CTL**$^+$; 1-2, 5, 7-9 – **CTL***.

PBTL<UB<UB$^+$<CTL=CTL$^+$<CTL*

2. Semantyka CTL*

Jak dla **CTL**, z tym, że spełnianie dla s-formuł definiujemy w stanach, a dla p-formuł w przebiegach programu.

Definicję *spełniania formuły* φ *w stanie* i *(przebiegu* σ_i *o początkowym stanie* i*) modelu* $\mathfrak{M}$ wyrażają poniższe warunki:

$\mathfrak{M}, i \models p$	wtw	$i \in V(p)$
$\mathfrak{M}, i \models \forall\varphi$	wtw	w każdym przebiegu σ_i, $\mathfrak{M}, \sigma_i \models \varphi$
$\mathfrak{M}, \sigma_i \models \varphi$	wtw	$\mathfrak{M}, i \models \varphi$ dla każdej s-formuły φ
$\mathfrak{M}, \sigma_i \models \bigcirc\varphi$	wtw	$\mathfrak{M}, \sigma_{i+1} \models \varphi$
$\mathfrak{M}, \sigma_i \models \varphi\mathcal{U}\psi$	wtw	$\mathfrak{M}, \sigma_k \models \psi$ dla pewnego $k \geq i$ oraz $\mathfrak{M}, \sigma_j \models \varphi$ dla każdego j takiego, że $i \leq j < k$

3. Zastosowania

CTL* pozwala wyrażać rozmaite globalne własności programów:

- częściowa poprawność każdego przebiegu obliczeń: $w \to \forall G(k \to \varphi)$

- częściowa poprawność pewnego przebiegu obliczeń: $w \to \exists G(k \to \varphi)$

- całkowita poprawność każdego przebiegu obliczeń: $w \to \forall F(k \wedge \varphi)$

- całkowita poprawność pewnego przebiegu obliczeń: $w \to \exists F(k \wedge \varphi)$

- sprawiedliwość (fairness) każdego przebiegu obliczeń: $\forall(GFr \to Fg)$

LOGIKI CZASU INTERWAŁOWEGO

Konstrukcja logiki tego typu zakłada wstępne rozstrzygnięcie kilku kwestii swoistych:

1. Nośnik (dziedzina) – przedziały jako obiekty pierwotne lub zdefiniowane na bazie punktów.

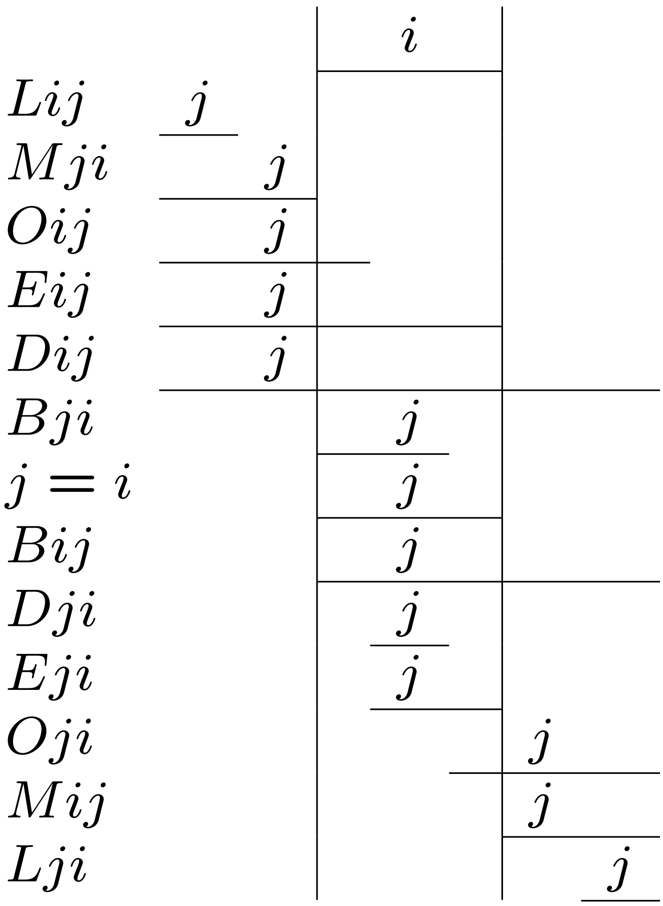
2. Struktura – wybór bazowych relacji zachodzących na przedziałach i ustalenie ich własności.

3. Modele – definicja wartościowania (co to znaczy być prawdziwym w odcinku czasu?).

4. Język – rodzaj wykorzystywanych funktorów temporalnych.

2. Problem wyboru struktury bazowej

Możliwe relacje elementarne pomiędzy dwoma odcinkami na tej samej osi:



L – później od, M – spotyka, O – nachodzi na, E – kończy z, D – w czasie, B – zaczyna z

Naturalne relacje o charakterze globalnym.

a) poprzedzanie: $i < j := Lji \vee Mij$

b) zawieranie: $i \sqsubseteq j := Bij \vee Dij \vee Eij \vee i = j$

c) pokrywanie: $i\mathcal{O}j := Oij \vee Oji$

Struktury typu $\mathfrak{I} = \langle \Im, <, \sqsubseteq \rangle$ lub $\mathfrak{O} = \langle \Im, <, \mathcal{O} \rangle$, określane są jako *struktury klasyczne*, gdyż podobnie jak w logikach czasu punktowego mamy $<$ jako relację bazową i $\sqsubseteq$ lub $\mathcal{O}$ jako relację dodatkową, która umożliwia "wgląd" do wnętrza przedziałów.

Struktury oparte o wybrane relacje elementarne o postaci $\mathfrak{E} = \langle \Im, \mathbb{R}' \rangle$, gdzie $\varnothing \neq \mathbb{R}' \subseteq \mathbb{R}$, a $\mathbb{R} = \{L, M, O, E, D, B, \bar{L}, \bar{M}, \bar{O}, \bar{E}, \bar{D}, \bar{B}, =\}$ to *E-struktury*.

Dla zbudowania semantyki logiki czasu przedziałowego możliwy jest wybór struktur z różnymi relacjami, np.:

$\langle \Im, <, \mathcal{O} \rangle$ – Russell (26), Walker (47), Kamp (79), Tsang (86)

$\langle \Im, <, \sqsubseteq \rangle$ – Rescher i Urquhardt (79), Röper (80), Burgess (82), VanBentham (83)

$\langle \Im, <, M \rangle$ – Hamblin (72), Allen i Hayes (85) (z samym M)

$\langle \Im, D, L \rangle$ – Humberstone (79)

$\langle \Im, B, E, D \rangle$ – Moszkowski (83)

$\langle \Im, B, E, M \rangle$ – Halpern i Shoham (86, 91), Venema (90) (tylko B i E)

Teorie struktur typu $\mathfrak{I}$ i $\mathfrak{O}$

Własności podstawowe:

$<$ jest ścisłym częściowym porządkiem (przechodnia i przeciwzwrotna)

$\sqsubseteq$ jest częściowym porządkiem (przechodnia, zwrotna i asymetryczna)

$\mathcal{O}$ jest relacją zwrotną i symetryczną

Relacje wzajemne:

Monotoniczność:
$i \sqsubseteq j < k \to i < k, \quad i < j \sqsupseteq k \to i < k$

Wypukłość: $i < j < k \wedge i \sqsubseteq l \wedge k \sqsubseteq l \to j \sqsubseteq l$

Separacja: $i < j \to \neg i \mathcal{O} j$

$i < j \wedge j \mathcal{O} k \wedge k < l \to i < l$

Definiowalność:

$i \sqsubseteq j := \forall k(k\mathcal{O}i \rightarrow k\mathcal{O}j)$

$i\mathcal{O}j := \exists k(k \sqsubseteq i \wedge k \sqsubseteq j)$

Inne własności:

Liniowość: $\forall i, j(i < j \vee i\mathcal{O}j \vee j < i)$

L-liniowość:
$\forall i, j, k(i < k \wedge j < k \rightarrow i < j \vee i\mathcal{O}j \vee j < i)$

P-liniowość:
$\forall i, j, k(k < i \wedge k < j \rightarrow i < j \vee i\mathcal{O}j \vee j < i)$

Normalność:
$\forall i, j, k(i \sqsubseteq k \wedge j \sqsubseteq k \rightarrow i < j \vee i\mathcal{O}j \vee j < i)$

Wolność: $\forall i, j(\forall k(k \sqsubseteq i \rightarrow k\mathcal{O}j) \rightarrow i \sqsubseteq j)$

Skierowanie: $\forall i, j \exists k(i \sqsubseteq k \wedge j \sqsubseteq k)$

Atomiczność: $\forall i \exists j(j \sqsubseteq i \wedge \forall k(k \sqsubseteq j \rightarrow k = j))$

Logika VanBenthama dla struktur typu $\mathfrak{I}$

1. Język i Semantyka

Definicja 19 (Model na $\mathfrak{I}$-strukturze)

Modelem na $\mathfrak{I}$-strukturze jest dowolny układ $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{I}, V \rangle$, gdzie V jest funkcją waluacji dla zmiennych, tj. $V : ZZ \longrightarrow \mathcal{P}(\Im)$.

Definicję *spełniania formuły* φ *w odcinku* i *modelu* $\mathfrak{M}$ ($\mathfrak{M}, i \models \varphi$) *wyrażają poniższe warunki:*

$\mathfrak{M}, i \models p$	*wtw*	$i \in V(p)$
$\mathfrak{M}, i \models G\varphi$	*wtw*	$\mathfrak{M}, j \models \varphi$ *dla dowolnego* j *takiego, że* $i < j$
$\mathfrak{M}, i \models H\varphi$	*wtw*	$\mathfrak{M}, j \models \varphi$ *dla dowolnego* j *takiego, że* $j < i$
$\mathfrak{M}, i \models \Box\varphi$	*wtw*	$\mathfrak{M}, j \models \varphi$ *dla dowolnego* j *takiego, że* $j \sqsubseteq i$
$\mathfrak{M}, i \models \boxtimes\varphi$	*wtw*	$\mathfrak{M}, j \models \varphi$ *dla dowolnego* j *takiego, że* $i \sqsubseteq j$

2. Aksjomatyzacja

Aksjomaty i reguły **Kt4** *dla* G *i* H

Aksjomaty i reguły **S4** *dla* $\Box$ *i* $\boxtimes$

oraz dodatkowo:

- (5) $\varphi \to \Box\blacklozenge\varphi, \quad \varphi \to \boxtimes\Diamond\varphi$
- (Mon) $F\varphi \to \Box F\varphi, \quad P\varphi \to \Box P\varphi$
- $(Conv_1)$ $\Diamond F(\Box\varphi \wedge \psi) \to (F\varphi \vee \Diamond\psi)$
- $(Conv_2)$ $\Diamond P(\Box\varphi \wedge \psi) \to (P\varphi \vee \Diamond\psi)$

gdzie $F, P, \Diamond, \blacklozenge$ *są zdefiniowane w zwykły sposób.*

Logiki E-struktur

1. Ogólne ujęcie

Język **KRZ** *wzbogacony o funktory typu* $[R]$, $[\bar{R}]$, $\langle R\rangle$, $\langle\bar{R}\rangle$, *gdzie* $R \in \{O, B, E, L, M, D, =\}$.

Definicja 20 (Model na $\mathfrak{E}$-strukturze)

Modelem na $\mathfrak{E}$-strukturze jest dowolny układ $\mathfrak{M} = \langle\mathfrak{E}, V\rangle$, *gdzie* V *jest funkcją waluacji dla zmiennych, tj.* $V : ZZ \longrightarrow \mathcal{P}(\Im)$.

Definicję spełniania formuły φ w odcinku i modelu $\mathfrak{M}$ ($\mathfrak{M}, i \vDash \varphi$) wyrażają poniższe warunki:

$\mathfrak{M}, i \vDash p$	wtw	$i \in V(p)$
$\mathfrak{M}, i \vDash [R]\varphi$	wtw	$\mathfrak{M}, j \vDash \varphi$ dla dowolnego j takiego, że Rji
$\mathfrak{M}, i \vDash [\bar{R}]\varphi$	wtw	$\mathfrak{M}, j \vDash \varphi$ dla dowolnego j takiego, że Rij
$\mathfrak{M}, i \vDash \langle R\rangle\varphi$	wtw	$\mathfrak{M}, j \vDash \varphi$ dla pewnego j takiego, że Rji
$\mathfrak{M}, i \vDash \langle\bar{R}\rangle\varphi$	wtw	$\mathfrak{M}, j \vDash \varphi$ dla pewnego j takiego, że Rij

2. Logika HS

Bazowe funktory to $[B]$, $[\bar{B}]$, $\langle B\rangle$, $\langle\bar{B}\rangle$, $[E]$, $[\bar{E}]$, $\langle E\rangle$, $\langle\bar{E}\rangle$. Pozostałe są definiowalne:

$$[M]\varphi := [E]([\bar{B}]\varphi \vee \langle E\rangle\top)$$

$$[\bar{M}]\varphi := [B]([\bar{E}]\varphi \vee \langle B\rangle\top)$$

$$[D]\varphi := [B][E]\varphi \quad [\bar{D}]\varphi := [\bar{B}][\bar{E}]\varphi$$

$$[L]\varphi := [M][M]\varphi \quad [\bar{L}]\varphi := [\bar{M}][\bar{M}]\varphi$$

$$[O]\varphi := [E][\bar{B}]\varphi \quad [\bar{O}]\varphi := [B][\bar{E}]\varphi$$

3. Aksjomatyka Venemy

Aksjomaty $(K), (4)$ i RG dla każdego z czterech bazowych funktorów $[R]$ i $[\bar{R}]$, gdzie R, to B lub E

(B) $\varphi \to [R]\langle \bar{R}\rangle\varphi$ $\varphi \to [\bar{R}]\langle R\rangle\varphi$

(End) $\langle R\rangle[R]\bot \vee [R]\bot$ (Id) $[B]\bot \leftrightarrow [E]\bot$

(Dir) $\langle B\rangle\langle \bar{E}\rangle\varphi \to \langle \bar{E}\rangle\langle B\rangle\varphi$ $\langle E\rangle\langle \bar{B}\rangle\varphi \to \langle \bar{B}\rangle\langle E\rangle\varphi$

$\langle B\rangle\langle E\rangle\varphi \leftrightarrow \langle E\rangle\langle B\rangle\varphi$ $\langle \bar{B}\rangle\langle \bar{E}\rangle\varphi \leftrightarrow \langle \bar{E}\rangle\langle \bar{B}\rangle\varphi$

$(Normal)$ $\langle R\rangle\varphi \wedge \langle R\rangle\psi \to$
$\langle R\rangle(\varphi \wedge \langle R\rangle\psi) \vee \langle R\rangle(\varphi \wedge \psi) \vee \langle R\rangle(\langle R\rangle\varphi \wedge \psi)$

(RV_1) $\varphi \in$ **HS** jeżeli do **HS** należy
$p \wedge \langle \bar{B}\rangle p \wedge \langle \bar{B}\rangle\langle E\rangle\neg p \wedge \langle \bar{E}\rangle(\neg p \wedge \langle B\rangle\neg p \wedge \langle \bar{B}\rangle\neg p) \to \varphi$,
gdzie p nie występuje w φ

(RV_2) $\varphi \in$ **HS** jeżeli do **HS** należy
$p \wedge \langle \bar{E}\rangle p \wedge \langle \bar{E}\rangle\langle B\rangle\neg p \wedge \langle \bar{B}\rangle(\neg p \wedge \langle E\rangle\neg p \wedge \langle \bar{E}\rangle\neg p) \to \varphi$,
gdzie p nie występuje w φ

Własności B i E w strukturach Venemy

$\forall i, j, k(Rij \wedge Rjk \rightarrow Rik)$ (przechodniość)

$\forall i, j, k(Rij \wedge Rik \rightarrow Rjk \vee j = k \vee Rkj)$ (p-normalność)

$\forall i, j, k(Rji \wedge Rki \rightarrow Rjk \vee j = k \vee Rkj)$ (l-normalność)

$\forall i(\neg\exists jBji \leftrightarrow \neg\exists jEji)$

$\forall i(\neg\exists jRji \vee \exists j(Rij \wedge \neg\exists kRkj))$ (atomowość)

$\forall i, j, k(Bij \wedge Eik \rightarrow \exists l(Ejl \wedge Bkl))$

$\forall i, j, k(Bij \wedge Eki \rightarrow \exists l(Elj \wedge Bkl))$

$\forall i, j, k(Bij \wedge Ejk \rightarrow \exists l(Eil \wedge Blk))$

$\forall i, j, k(Eij \wedge Bik \rightarrow \exists l(Bjl \wedge Ekl))$

$\forall i, j, k(Eij \wedge Bki \rightarrow \exists l(Blj \wedge Ekl))$

$\forall i, j, k(Eij \wedge Bjk \rightarrow \exists l(Bil \wedge Elk))$

$\forall i \neg\exists j(Bij \wedge Eij)$ (rozłączność B i E)

Teoria relacji M Allena, Hayesa

A. warunki nałożone na M:

$\forall i, j, k, l(Mij \land Mik \land Mlj \to Mlk)$
(jednoznaczność styku)

$\forall i, j, k, l(Mij \land Mkl \to Mil \veebar \exists m(Mim \land Mml) \veebar \exists m(Mkm \land Mmj))$ (liniowość miejsc styku)

$\forall i \exists j, k(Mji \land Mik)$ (nieskończoność)

$\forall i, j, k, l(Mij \land Mjk \land Mil \land Mlk \to j = l)$

$\forall i, j(Mij \to \exists k \forall l, m(Mli \land Mij \land Mjm \to Mlk \land Mkm))$ (istnienie sumy)

Dwa ostatnie warunki pozwalają na zdefiniowanie operacji (nieprzemiennej) sumy interwałów $\oplus$, co umożliwia zdefiniowanie wszystkich relacji elementarnych.

B. Definicje

$$Lji := \exists k(Mik \land Mkj)$$

$$Lij := \exists k(Mjk \land Mki)$$

$$Bji := \exists k(i = j \oplus k)$$

$$Bij := \exists k(j = i \oplus k)$$

$$Eji := \exists k(i = k \oplus j)$$

$$Eij := \exists k(j = k \oplus i)$$

$$Dji := \exists k, l(i = k \oplus j \oplus l)$$

$$Dij := \exists k, l(j = k \oplus i \oplus l)$$

$$Oji := \exists k, l, m(i = k \oplus l \land j = l \oplus m)$$

$$Oij := \exists k, l, m(j = k \oplus l \land i = l \oplus m)$$

System niestandardowy Röpera

Struktury typu $\mathfrak{I} = \langle \Im, <, \sqsubseteq \rangle$, spełniające warunki:

$\forall i, j, k, l(i < j \wedge k \sqsubseteq i \wedge l \sqsubseteq j \rightarrow k < l)$

$\forall i, j(\forall k \sqsubseteq i, \forall l \sqsubseteq j, \exists m \sqsubseteq k, \exists n \sqsubseteq l(m < n) \rightarrow$
$i < j)$

$\forall i, j, k(i < j \wedge j < k \rightarrow i < k)$

$\forall i \exists j, k(j \sqsubseteq i \wedge j < k)$

$\forall i \exists j, k(j \sqsubseteq i \wedge k < j)$

$\forall i, j, k(i < j \wedge i < k \rightarrow$
$\exists l \sqsubseteq j, \exists m \sqsubseteq k(m < l \vee l < m))$

$\forall i, j, k(j < i \wedge k < i \rightarrow$
$\exists l \sqsubseteq j, \exists m \sqsubseteq k(m < l \vee l < m))$

Semantyka Röpera

Wartościowanie homogeniczne V spełnia dwa warunki:

jeżeli $i \in V(p)$ i $j \sqsubseteq i$, to $j \in V(p)$

jeżeli $\forall j \sqsubseteq i \exists k \sqsubseteq j, k \in V(p)$, to $i \in V(p)$.

Warunki prawdziwościowe:

$\mathfrak{M}, i \models \sim \varphi$	wtw	$\mathfrak{M}, j \not\models \varphi$ dla dowolnego $j \sqsubseteq i$
$\mathfrak{M}, i \models \varphi \veebar \psi$	wtw	dla dowolnego $j \sqsubseteq i$ istnieje $k \sqsubseteq j$ takie, że $\mathfrak{M}, k \models \varphi$ lub $\mathfrak{M}, k \models \psi$
$\mathfrak{M}, i \models G\varphi$	wtw	dla dowolnego $j \sqsubseteq i$, dla dowolnego $k > j$, $\mathfrak{M}, k \models \varphi$
$\mathfrak{M}, i \models F\varphi$	wtw	dla dowolnego $j \sqsubseteq i$, istnieje $k \sqsubseteq j$ i $l > k$ takie, że $\mathfrak{M}, l \models \varphi$
$\mathfrak{M}, i \models H\varphi$	wtw	dla dowolnego $j \sqsubseteq i$, dla dowolnego $k < j$, $\mathfrak{M}, k \models \varphi$
$\mathfrak{M}, i \models P\varphi$	wtw	dla dowolnego $j \sqsubseteq i$, istnieje $k \sqsubseteq j$ i $l < k$ takie, że $\mathfrak{M}, l \models \varphi$
$\mathfrak{M}, i \models \varphi \& \psi$	wtw	$\mathfrak{M}, i \models \varphi$ i istnieje j, takie, że Mij i $\mathfrak{M}, j \models \psi$

Literatura

Blackburn, P., ‘Representation, Reasoning, and Relational Structures: a Hybrid Logic Manifesto‘, *Logic Journal of the IGPL*, 8(3):339–365, 2000.

Blackburn, P., M. DeRijke, and Y. Venema, *Modal Logic*, Cambridge University Press, Cambridge 2001.

Burgess, J.,P., ‘Basic Tense Logic‘, in: D. Gabbay, F. Guenthner (eds.), **Handbook of Philosophical Logic**, vol II, pp. 89–133, Reidel Publishing Company, Dordrecht 1984.

Farinas del Cerro, L. i A. Herzig, ‘Modal Deduction with Applications in Epistemic and Temporal Logics‘, w: D. Gabbay i in. (red) **Handbook of Logic in Artificial Intelligence and**

Logic Programming, vol IV, pp. 499–594, Clarendon Press, Oxford 1995.

Gabbay, D., *LDS - Labelled Deductive Systems*, Clarendon Press, Oxford 1996.

Gabbay, D., I. Hodkinson, M. Reynolds, *Temporal Logic - Mathematical Foundations and Computational Aspects, vol I*, Clarendon Press, Oxford 1994.

Gabbay, D., A. Kurucz, F. Wolter, M. Zakharyaschev, *Many-Dimensional Modal Logics: Theory and Applications*, ukaże się niebawem.

Goldblatt, R. I. *Logics of Time and Computation*, CSLI Lecture Notes, Stanford 1987.

Goré, R. 'Tableau Methods for Modal and Temporal Logics', in: M. D'Agostino et al. (eds.),

Handbook of Tableau Methods, pp. 297–396, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1999.

Hajnicz, E. *Reprezentacja logiczna wiedzy zmieniającej się w czasie*, Akademicka Oficyna Wydawnicza PLJ, Warszawa 1996.

Indrzejczak, A., ‘Natural Deduction System for Tense Logics‘, *Bulletin of the Section of Logic* 23(4):173–179, 1994.

Indrzejczak, A., ‘A Labelled Natural Deduction System for Linear Temporal Logic‘, *Studia Logica* 75/3:345–376, 2003.

Klimek, R., *Wprowadzenie do logiki temporalnej*, Wyd. AGH, Kraków 1999.

Lichtenstein, O., and A. Pnueli, ‘Propositional Temporal Logics: Decidability and Completeness‘, *Logic Journal of the IGPL* 8(1):55–85, 2000.

McArthur, R., P., *Tense Logic*, Reidel Publishing Company, Dordrecht 1976.

Prior, A. *Time and Modality*, Oxford University Press, Oxford 1957.

Prior, A. *Past, Present and Future*, Clarendon/Oxford University Press, Oxford 1967.

Prior, A. *Papers on Time and Tense*, Clarendon/Oxford University Press, Oxford 1968.

Ramsey, A. *Formal Methods in Artificial Intelligence*, Cambridge University Press, Cambridge 1988.

Rescher, N., and A. Urquhart, *Temporal Logic*, Springer-Verlag, New York 1971.

van Benthem, J., *The Logic of Time*, Reidel Publishing Company, Dordrecht 1983.