ŁAD POJĘCIOWY 2

Rodzaje relacji porządkujących

Bardziej wyrafinowane sposoby wprowadzania ładu pojęciowego łączą się z ustalaniem kolejności elementów lub ich grup w obrębie badanej dziedziny. Teoretyczne omówienie zabiegów tego typu wymaga formalnego wprowadzenia relacji porządkujących. Zdefiniujemy poniżej dwie najważniejsze relacje tego rodzaju.

Relacją częściowego porządku nazywamy dowolną relację R, która spełnia zarazem 3 własności:

a) R jest przeciwzwrotna, tzn. $\forall x \neg Rxx$
b) R jest asymetryczna, tzn. $\forall xy(Rxy \rightarrow \neg Ryx)$
c) R jest przechodnia, tzn. $\forall xyz[(Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz]$

Relacja częściowego porządku, która dodatkowo spełnia warunek:

d) R jest spójna, tzn. $\forall xy[x \neq y \rightarrow (Rxy \vee Ryx)]$

jest określana jako **relacja porządkująca liniowo** lub po prostu jako **relacja porządkująca.**

Przeciwzwrotność powoduje, że dowolny obiekt nie jest sam z sobą w tej relacji; asymetria mówi, że jeżeli relacja zachodzi między parą obiektów w jedną stronę, to nie zachodzi w drugą (przechodniość już omawialiśmy). Spójność powoduje, że dana relacja zachodzi między dowolną parą różnych obiektów, w jedną lub w drugą stronę. Przykładowo, relacja bycia czyimś potomkiem jest w zbiorze ludzi relacją częściowo porządkującą ale nie jest spójna, gdyż nie jest tak, że z dwóch dowolnych osobników jeden jest potomkiem drugiego.

Zbiory uporządkowane

Zbiór na którym zdefiniowaliśmy pewną relację porządkującą określamy jako zbiór uporządkowany (przez tę relację). Dowolna lista osób (bez powtórzeń) może nam służyć jako prosty przykład zbioru uporządkowanego (liniowo). Również zbiór liczb naturalnych z relacją „<” jest zbiorem (liniowo) uporządkowanym.

Łatwo również sprawdzić, że relacje wyrażane predykatami: "_jest wyższy od_", "_jest cięższy od_", bądź "_jest lepiej wykształcony niż_" są relacjami częściowo porządkującymi dowolny zbiór ludzi (są przeciwzwrotne, przechodnie i asymetryczne). W szczególnych przypadkach każda z tych relacji może okazać się również spójna w danym zbiorze, np. gdy w rozważanym zbiorze każdy człowiek będzie miał inny wzrost. Wtedy mamy do czynienia z liniowym uporządkowaniem zbioru.

Systematyzacja

Skupimy się na szczególnie interesującym z praktycznego punktu widzenia przypadku porządkowania, jakim jest tworzenie **systematyzacji** pewnego zbioru. Można na tę operację spojrzeć zresztą jako na przykład podziału zbioru połączonego z uporządkowaniem członów tego podziału. Można ten zabieg wykonać wychodząc bądź od ustalonej relacji porządkującej bądź od ustalonej relacji równowaznościowej na danym zbiorze.

Przykładowo, podzielenie pewnego zbioru ludzi według posiadanej przez nich wagi daje systematyzację tego zbioru. Relacja porządkująca przez nią wyznaczana jest wyrażana predykatem „_jest cięższy od_” lub „_jest lżejszy od_”. Relacja ta może nawet liniowo porządkować rozważany przez nas zbiór, co w dużej mierze zależy od stopnia dokładności przyjętego przez nas pomiaru. W przeciwnym wypadku, tzn. gdy któraś z rozpatrywanych przez nas relacji nie jest w analizowanym zbiorze spójna (dwóch lub więcej ludzi ma np. tą samą wagę) otrzymujemy przy okazji pewną, stowarzyszoną relację **nierozróżnialności**. Formalnie, niech “P” oznacza relację częściowo porządkującą (ale nie spójną) w danym zbiorze. Wtedy relacja “R”, zdefiniowana następująco:

$$\forall xy[Rxy \leftrightarrow (\neg Pxy \wedge \neg Pyx)]$$

jest relacją nierózróżnialności w rozważanym zbiorze. Łatwo ustalić, że relacja ta jest zwrotna i symetryczna. W szczególnych przypadkach (gdy dopełnienie P też jest przechodnie) R jest też przechodnia, a zatem jest relacją równoważności, która dodatkowo daje podstawę (zgodnie z zasadą abstrakcji) do podziału zbioru. Przykładowo, “P” niech oznacza predykat "_jest lepiej wykształcony od_", wtedy “R” oznacza "_ma takie samo wykształcenie jak_".

Odwrotnie, przyjmując jako punkt wyjścia ustaloną relację równoważności R w danym zbiorze D można zdefiniować relację wyprzedzania W związaną z R jako dowolną 2-argumentową relację przechodnią, która spełnia 2 warunki:

a) R-asymetryczna, tzn. $\forall xy(Rxy \rightarrow \neg Wyx)$
b) R-spójność, tzn. $\forall xy[\neg Rxy \rightarrow (Wxy \vee Wyx)]$

Można dowieść, że taka relacja częściowo porządkuje zbiór D.

Ogólnie można uznać, że z klasyfikacjami związane są pojęcia klasyfikacyjne, które można zrekonstruować jako struktury postaci < D, C1, ..., Cn >, (przy podziale po prostu < D, C >), gdzie D to dziedzina rozważań, a C1 – Cn, to podzbiory D (cechy lub wartości cech), których iloczyn daje zakres danego terminu klasyfikującego. Alternatywnie (ze względu na zasadę abstrakcji) można to ująć jako strukturę postaci < D, R1, ..., Rn >, gdzie kazde Ri, to relacja równoważności. Natomiast pojęcie porzadkujące można za Pawlowskim zrekonstruować jako strukturę postaci < D, R, W >, gdzie R to relacja równoważności, a W to relacja wyprzedzania, która porządkuje klasy abstrakcji relacji R (jest to definicja Hempla).

Pomiar

Jak już wspominaliśmy cechy stopniowalne dają często możliwość wyskalowania w wyniku czego otrzymujemy cechy mierzalne. Szersze omówienie problematyki pomiaru i rodzajów skal nie jest tutaj potrzebne, toteż ograniczymy się tylko do elementarnych uwag. W szczególności musimy określić pojęcie funkcji (odwzorowania) i izomorfizmu (odwzorowania struktur).

Na gruncie teorii relacji można wprowadzić formalnie pojęcie **funkcji**. W tym celu zdefiniujmy sobie jeszcze dwie własności relacji: **jednoznaczność** i **odwrotną jednoznaczność**:

(1-R) $\forall xyz(Rxy \wedge Rzy \rightarrow x=z)$

(R-1) $\forall xyz(Rxy \wedge Rxz \rightarrow y=z)$

Niech U to uniwersum dwuargumentowej relacji R, $A \subseteq U$ i $B \subseteq U$; powiemy, że R jest funkcją jednoargumentową przeprowadzającą z A w B (odwzorowaniem z A w B) wtw, spełnia następujące warunki:

a) A jest dziedziną R (zbiorem argumentów funkcji)
b) Przeciwdziedzina R (zbiór wartości funkcji) jest podzbiorem B
c) R jest odwrotnie jednoznaczna (spełnia warunek (R-1)

W szczególności R jest **surjekcją** (funkcją na), gdy całe B jest przeciwdziedziną R; R jest **injekcją** (funkcją różnowartościową), gdy spełnia warunek jednoznaczności (1-R). Funkcja, która jest zarazem injekcją i surjekcją, to **bijekcja**, zwana też funkcją wzajemnie jednoznaczną. Zatem bijekcja różnym argumentom przyporządkowuje różne wartości. Konsekwencją tego jest, że konwers bijekcji też jest funkcją (również bijekcją), a zbiory A i B mają dokładnie tyle samo elementów (**są równoliczne**).

W podobny sposób można zdefiniować ogólne pojęcie funkcji n-argumentowej (n>1), jako relacji n+1 argumentowej, w której każdej uporządkowanej n-tce argumentów przyporządkowana jest dokładnie jedna wartość. Formalnie:

Niech U to uniwersum n+1-argumentowej relacji R, $A_1 \subseteq U$ - $A_n \subseteq U$ i $B \subseteq U$; powiemy, że R jest funkcją n-argumentową przeprowadzającą z $A_1 x....x A_n$ w B wtw, spełnia następujące warunki:

a) Dla każdego $x_1 \in A_1$,...., $x_n \in A_n$ istnieje $y \in B$ taki, że $Rx_1...x_ny$ (zbiorem argumentów funkcji)
b) Przeciwdziedzina R (zbiór wartości funkcji) jest podzbiorem B
c) R spełnia warunek $\forall x_1...x_nyz(Rx_1...x_ny \wedge Rx_1...x_nz \rightarrow y=z)$

Jednoznaczność przyporządkowania umożliwia stosowanie zapisu funkcyjnego czyli, jeżeli R jest funkcją, to zamiast Rxy możemy napisać f(x)=y (y jest wartością funkcji f przy argumencie x). Podobnie w przypadku funkcji n-argumentowych (n > 1). Przykładowo, w arytmetyce powszechnie stosuje się zapis "_+_" (funkcja 2-argumentowa) zamiast "suma_i_wynosi_" (relacja 3-argumentowa). Ma to tę wyższość, że przy zapisie "x+y=z" można w dowodach bezpośrednio stosować reguły dla identyczności, podczas gdy przy zapisie typu "Sxyz" ("suma x i y wynosi z") musimy do dowodu dołączać odpowiednie przesłanki charakteryzujące dany predykat jako funkcję.

Wprowadzone wyżej pojęcie bijekcji pozwala zdefiniować niezwykle ważne w metodologii pojęcie **izomorfizmu**.

Mówimy, że zachodzi izomorfizm między strukturami relacyjnymi $<U_1, R_1>$ i $<U_2, R_2>$ wtedy, gdy istnieje taka bijekcja f, która spełnia następujące warunki:

a) Odwzorowuje pole jednej relacji na pole drugiej
b) $\forall xy(R_1xy \leftrightarrow R_2f(x)f(y))$ (tzn. relacja pierwsza zachodzi między argumentami f wtw, relacja druga zachodzi między ich wartościami)

Definicje izomorfizmu można łatwo uogólnić na dowolne struktury relacyjne (o dowolnej ilości relacji n-argumentowych). Można je też osłabić; jeżeli f jest dowolną funkcją, to wtedy mamy do czynienia z **homomorfizmem** dwóch struktur. Sporządzanie wszelkiego rodzaju map, wykresów, szkiców i diagramów polega – w sensie teoretycznym – na ustalaniu izomorfizmu bądź homomorfizmu struktur. Również teoria pomiaru wykorzystuje te pojęcia.

Cecha jest mierzalna (jest wielkością) wtedy, gdy zachodzi wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie pomiędzy wyróżnionymi wartościami tej cechy a wybranymi liczbami rzeczywistymi, określane jako **izomorfizm**. Ustalanie takiego izomorfizmu to **pomiar**, a liczba rzeczywista przyporządkowana danej wartości cechy w wyniku danego pomiaru jest jej **miarą liczbową**.

Idealnym rozwiązaniem jest ustalenie takiego izomorfizmu, który pozwala na miarach liczbowych wykonywać również działania arytmetyczne, których wyniki też są odwzorowane. Mamy wtedy do czynienia z **pomiarem właściwym**, a cecha mierzalna tego typu jest **wielkością addytywną**. W naukach humanistycznych częściej udaje się ustalić tylko takie przyporządkowanie, które pozwala mówić jedynie o kolejności miar liczbowych. Mamy wtedy do czynienia ze **skalowaniem**, a cecha mierzalna tego typu jest **wielkością rangową**.

Uporządkowania wielowymiarowe

W przypadku podziałów podkreślaliśmy, że większe znaczenie poznawcze i praktyczne mają raczej wielopoziomowe klasyfikacje. Podobnie jest w przypadku porządkowania; w praktyce często mamy do czynienia z **uporządkowaniami wielowymiarowymi**. Chcąc np. ocenić wartość pracowników jakiejś firmy bierzemy pod uwagę różne czynniki: doświadczenie, uzyskiwane wyniki, wykształcenie, kreatywność itd. Zatem określenie typu „najlepszy pracownik w firmie” jest pojęciem porządkującym wielowymiarowym, którego strukturę można oddać jako $< D, R1, ..., Rn, W1, ..., Wn >$. W przypadku, gdy cecha definiująca każdą z relacji Wi jest mierzalna mamy do czynienia z wielowymiarowym pomiarem. Jest to źródłem dodatkowych trudności, gdyż, dla każdej z uwzględnionych cech musimy ustalić osobne uporządkowanie, a następnie sprowadzić to do wspólnego mianownika, często dokonując arbitralnych wyborów.

Ujmując rzecz ogólnie, trzeba zdefiniować funkcję, która sprowadzi strukturę n-wymiarową do jednowymiarowej.

Problemy dotyczące porządkowania w humanistyce

Szczególne problemy z wprowadzaniem ładu pojęciowego pojawiają się na gruncie nauk humanistycznych. Znacznie częściej mamy tam do czynienia z wyrażeniami nieostrymi, a co za tym idzie przeprowadzanie podziałów jest utrudnione. Podobnie rzecz wygląda z porządkowaniem i pomiarem. Nawet jeżeli dysponujemy cechami stopniowalnymi, to często trudno je wyskalować (przekształcić je na mierzalne), tak aby mogły posłużyć za podstawę pomiaru. Co więcej, w przypadku wielu pojęć używanych w humanistyce również ich treść jest niewyraźna, w tym sensie, że co do wielu cech jest rzeczą sporną, czy w ogóle przysługują one (wszystkim) desygnatom odpowiedniej nazwy. Pojęcia tego rodzaju będziemy określać jako typologiczne – przyklady: renesans, barok, kapitalizm, demokracja, kryminal,

Nie znaczy to, że zabiegi wprowadzania ładu pojęciowego w humanistyce nie są z powodzeniem podejmowane. Nie każda cecha stopniowalna jest mierzalna, ale teoretycznie każda może się taką stać. Generalnie mamy tutaj do czynienia z cechami wyrażanymi przez nazwy nieostre, w oparciu o które można wprowadzić pewną relację porządkującą, którą następnie, w wyniku dalszych zabiegów teoretycznych można wyskalować.

Jako przykład może posłużyć nazwa nieostra "inteligentny", której odpowiada relacja porządkująca denotowana predykatem "_jest bardziej inteligentny od_", mierzona w oparciu o (dyskusyjną) skalę IQ. Działania zmierzające do przekształcania potocznych i nieostrych wyrażeń w precyzyjne terminy pomiarowe, przypominają do pewnego stopnia działania podejmowane przy tworzeniu definicji regulujących.

Zasygnalizowane przez nas trudności powodują, że od klasyfikacji i systematyzacji bardziej użytecznym zabiegiem porządkującym jest **typologia**, w której nie wymaga się ani rozłączności wyróżnionych klas (typów), ani adekwatności. W typologii raczej charakteryzuje się pewne obiekty, zwane obiektami typowymi (lub krótko typami albo wzorcami) i rozdziela się pozostałe obiekty z danego zbioru ze względu na stopień podobieństwa do wydzielonych wzorców.

Często wydzielone typy są wyłącznie konstruktami pojęciowymi (typ idealny) i żaden z obiektów faktycznie należących do dzielonego zbioru nie ma charakterystyki w pełni im odpowiadającej. Np. na wystawie psów rasowych sędziowie dokonują rankingu konkretnych psów danej rasy na podstawie stopnia ich podobieństwa do zdefiniowanego wcześniej wzorca, który jest typem idealnym.

Pawłowski rekonstruuje pojęcie typologiczne jako strukturę postaci < D, C1, ..., Cn, R1, ...Rn, W1, ..., Wn >, gdzie iloczyn podzbiorów (cech) C1 – Cn to pewne pojęcie klasyfikujące, natomiast Ri, Wi to relacje równoważności i wyprzedzania stowarzyszone z daną Ci. Konkretny obiekt empiryczny w mniejszym lub większym stopniu zbliża się (realizuje, egzemplifikuje) dany typ przez posiadanie odpowiednich wartości danej cechy Ci, co sytuuje go gdzieś na skali wyznaczonej przez Wi. Dopuszczalne jest nawet, że jakiś obiekt uznamy za podpadający pod dany typ nawet wtedy, gdy pewnych cech zaliczanych do pojęcia nie posiada w ogóle lub w stopniu znikomym.

Utworzenie dobrej typologii dla danej dziedziny badań na ogół zakłada wcześniejsze wielowymiarowe uporządkowanie tej dziedziny oraz dobre przygotowanie merytoryczne. Na omawianie złożonej problematyki formalnej tworzenia typologii nie mamy tutaj miejsca; zainteresowanych odsyłamy do pracy Pawłowskiego 1986, natomiast Tatarkiewicz 1951 dostarcza znakomitego nieformalnego wprowadzenia.