ANDRZEJ INDRZEJCZAK

LOGIKA II – WPROWADZENIE DO LOGIK NIEKLASYCZNYCH

semestr zimowy 2007/2008

Spis zawartości wykładów

1. Źródła logik nieklasycznych: przegląd najważniejszych ograniczeń/wad logiki klasycznej i możliwych reakcji

2. Historyczno-filozoficzne wprowadzenie do problematyki modalności

3. Podstawowe logiki modalne; semantyka relacyjna – etykietowane diagramy Betha

4. Wynikanie, systemy DN dla logik modalnych; logiki deontyczne

5. Analiza czasu w terminach modalnych – logiki temporalne

6. Logiki epistemiczne; ogólna topografia logik modalnych

7. Alternatywne semantyki dla słabych logik modalnych

8. Logiki modalne 1-go rzędu – problemy filozoficzne i techniczne z kwantyfikacją klasyczną; logika wolna

9. System DN dla pełnej (kwantyfikacja aktualistyczna i posybilistyczna) modalnej logiki 1-go rzędu; problemy z identycznością i sztywną denotacją

10. Intuicjonizm – motywacje filozoficzne, semantyka relacyjna, etykietowane diagramy Betha

11. Problemy z implikacją materialną – implikacja relewantna

12. Systemy DN dla najważniejszych logik relewantnych i entailment; podstawowe systemy logiki okresów warunkowych

13. Motywy filozoficzne odejścia od zasady dwuwartościowości

14. Ważniejsze logiki trójwartościowe – etykietowane diagramy Betha

15. Wielowartościowość i parakonsystencja – czterowartościowa logika Belnapa

WSTĘP

1. Motywy konstrukcji logik nieklasycznych

Logika klasyczna ma ograniczone zastosowania m.in. w:

- formalizacji akceptowalnych form wnioskowania używanych w języku naturalnych

- naukach komputerowych, informatyce, badaniach nad AI

- specyficznych naukach (np. mechanika kwantowa)

- specjalnych działach wiedzy (np. prawoznawstwo, etyka)

Potrzebne są silniejsze lub bardziej wyspecjalizowane systemy logiczne.

2. Wybrane historyczne propozycje rozwiązań nieklasycznych

- Sylogizmy modalne Arystotelesa

- logika zdań stoików jako uzupełnienie logiki nazw Arystotelesa

- implikacje nieklasyczne Chryzypa i Diodora jako alternatywa dla implikacji materialnej Filona

- sylogizmy temporalne Ockhama

- sylogizmy "ukośne" Hamiltona

3. Typy logik nieklasycznych

- Wzmocnienia logiki klasycznej (zbudowane na bogatszym języku).

- Osłabienia logiki klasycznej (logiki dewiacyjne) – punktem wyjścia jest kwestionowanie poprawności logiki klasycznej.

- Systemy krzyżujące się z logiką klasyczną
  - rozwinięcia logik dewiacyjnych na bogatszym języku
  - logiki dewiacyjne na tym samym języku (connexive logic)

4. Powody wprowadzania logik dewiacyjnych

Lista przykładowych tez i reguł inferencji logiki klasycznej, które często poddawano w wątpliwość:

- EM $p \vee \neg p$
- NSP $\neg(p \wedge \neg p)$
- PN $\neg\neg p \to p$
- AI $(p \to q) \vee (q \to p)$
- DS $p \to (\neg p \to q)$ lub $p \wedge \neg p \to q$ lub $\varphi, \neg\varphi \vdash \psi$ lub $\perp \to \varphi$

- DP $p \to (q \to p)$ lub $\varphi \vdash \psi \to \varphi$
- TI $p \to (q \to q),\ p \to q \vee \neg q$ lub $\varphi \to \top$
- OP $\varphi \to \psi \vdash \varphi \wedge \chi \to \psi$
- TR $\varphi \to \psi \vdash \neg\psi \to \neg\varphi$
- SH $\varphi \to \psi, \psi \to \chi \vdash \varphi \to \chi$
- SDNW jeżeli $\Gamma, \neg\varphi \vdash \bot$, to $\Gamma \vdash \varphi$
- EU $\varphi(a) \to \exists x \varphi(x)$
- DM $\neg\exists x \neg\varphi \to \forall x \varphi$

Należy podkreślić, że występowanie tych tez czy reguł, to jedynie symptom poważniejszch trudności, które wiążą się ze:

- sposobem definiowania konkretnych stałych logicznych (np. logiki implikacji nieklasycznych)

- bądź nawet całej semantyki (np. logiki wielowartościowe)

- lub pojmowania relacji wynikania czy innych relacji logicznych, np. sprzeczności (np logiki niemonotoniczne, parakonsystentne)

PODSTAWOWE WŁASNOŚCI LOGIKI KLASYCZNEJ PROWADZĄCE DO KONSTRUKCJI SYSTEMÓW NIEKLASYCZNYCH

1. formalna – logika nieformalna, teoria argumentacji, nowa retoryka (Perelmann), critical thinking – raczej pewne tendencje nauczania niż systemy

2. dedukcyjna – logika indukcji (Carnap), wnioskowania probabilistyczne, l. niemonotoniczne

3. 2-wartościowa – l. wielowartościowe (odrzucenie samej zasady 2-wartościowoáci), l. intuicjonistyczna i l. pośrednie, l. parakonsystentne (odrzucenie tez będących wyrazem zas. 2-wartościowości: EM lub NSP)

4. asertoryczna – lokalne poszerzenia: l. erotetyczne, l. norm, l. rozkazów, l. życzeń; globalne poszerzenia: logiki czynności mowy: Austin, Searle, Vanderveken, Nowak

5. ekstensjonalna – lokalne poszerzenia: l. modalne, l. implikacji (ścisłe, silne, relewantne, entailment, analityczne, conditionals);
globalne poszerzenia: logika intensjonalna ogólna (Church, Montague, Fitting)

6. aczasowa – logiki tensalne i temporalne (Reichenbach, Prior)

7. uniwersalna – logiki lokalne: l. kwantowa, l. algorytmiczna (Salwicki), l. kategorialne

8. niekonstruktywna – intuicjonizm, logika modalna GL (dowiedlność arytmetyczna), logiki dowodów (Artemov, Fitting), logika linearna Girarda

9. 1-go rzędu – l. wyższych rzędów, teorie typów (Russell/Whitehead, Chwistek, Montague)

10. wąskie rozumienie nazw (struktura predykatowa) – rachunki nazw, mereologia (Leśniewski)

11. egzystencjalna (brak nazw pustych) – logiki wolne

12. realistyczna (niepusta dziedzina) – logiki inkluzywne

13. terminy jasne i wyraźne – logiki rozmyte (Pawlak – rough sets, Zadeh – fuzzy logics)

14. oparta na Tarskiego koncepcji wynikania – logiki podstrukturalne (intuicjonizm, relewantne, BCK-logiki), logiki niemonotoniczne, l. Q-inferencji (Malinowski)

- (ZWR) $\Gamma \subseteq Cn(\Gamma)$
- (MON) $\Gamma \subseteq \Delta \rightarrow Cn(\Gamma) \subseteq Cn(\Delta)$
- (TR) $CnCn(\Gamma) \subseteq Cn(\Gamma)$

lub (poprzez $\varphi \in Cn(\Gamma)$ wtw $\Gamma \vdash \varphi$)

- (ZWR) $\varphi \vdash \varphi$
- (MON) $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \Gamma, \psi \vdash \varphi$
- (TR) $\Gamma \vdash \varphi$ & $\varphi, \Gamma \vdash \psi \rightarrow \Gamma \vdash \psi$

LOGIKI MODALNE

I 3 tradycje w badaniach nad modalnościami:

- językoznawstwo: m. jako fenomen językowy, wskaźnik postawy nadawcy komunikatu wobec jego treści i odbiorcy

- filozoficzna: m. jako fenomen pojęciowy, kwalifikacja m.in. cech (istotne/akcydentalne), sposobów istnienia, bytów, zdarzeń i związków między nimi

- logiczna: m. jako kwalifikacje prawdziwości zdań, sposobów (trybów) orzekania

II Różne znaczenia i rodzaje modalności

1. Modalności w sensie wąskim – m. aletyczne (konieczność, możliwość, przygodność)

2. Modalności w sensie szerokim:

   – deontyczne (powinność, zakaz)

   – epistemiczne (wiedza, wiara)

   – doksastyczne (mniemanie, wrażenie)

   – temporalne

Wieloznaczność m. aletycznych:

– logiczna konieczność/możliwość

– metafizyczna konieczność/możliwość

– nomologiczna konieczność/możliwość

III Wybrane (zdaniotwórcze) funktory modalne i ich popularne oznaczenia:

- konieczne, że φ – $\Box\varphi, L\varphi$
- możliwe, że φ – $\Diamond\varphi, M\varphi$
- powinno być tak, że φ – $O\varphi$
- φ jest dopuszczalne – $P\varphi$
- φ jest zakazane – $F\varphi$
- φ jest znane – $K\varphi$
- a wie, że φ – $K_a\varphi$

- wierzy się, że φ – $B\varphi$

- a wierzy, że φ – $B_a\varphi$

- zawsze w przyszłości φ – $G\varphi$

- kiedyś w przyszłości φ – $F\varphi$

- zawsze w przeszłości φ – $H\varphi$

- kiedyś w przeszłości φ – $P\varphi$

- φ zachodzi od czasu ψ – $S(\psi, \varphi)$

- φ zachodzić będzie do czasu ψ – $U(\psi, \varphi)$

IV Historia

1. Arystoteles – sylogistyka zdań modalnych
2. Diodor Kronos – temporalne ujęcie modalności
3. Leibniz – koncepcja możliwych światów
4. Łukasiewicz – modalności w logice wielowartościowej
5. Lewis/Langford – implikacja ścisła
6. Goedel – nowoczesna formalizacja modalności
7. Kripke – semantyka relacyjna

V Klasyczny podział sądów modalnych:

– wg. formy: apodyktyczne, asertoryczne, problematyczne (podział syntaktyczny)

– wg. mocy: konieczne, przygodne (podział metafizyczny)

Pokrewne dystynkcje (często utożsamiane):

– a priori/a posteriori
(podział epistemologiczny)

– analityczne/syntetyczne
(podział semantyczny)

φ jest zdaniem analitycznym $:= \Box\varphi \vee \Box\neg\varphi$

φ jest zdaniem syntetycznym $:= \Diamond\varphi \wedge \Diamond\neg\varphi$

Wieloznaczność pojęcia przygodności:

(to co niekonieczne, to co możliwe, to co możliwe ale niekonieczne, to co jest ale niekoniecznie)

1. φ jest zdaniem przygodnym $:= \neg\Box\varphi$

2. φ jest zdaniem przygodnym $:= \Diamond\varphi$

3. φ jest zdaniem przygodnym $:= \Diamond\varphi \wedge \neg\Box\varphi$

4. φ jest zdaniem przygodnym $:= \varphi \wedge \neg\Box\varphi$

1. najpopularniejsze w filozofii, 2. – błąd Arystotelesa, 3. – obustronna możliwość = zdanie syntetyczne

VI Minimalne warunki dla modalności aletycznych

a. pozytywne:

1. wzajemna definiowalność $\Diamond$ i $\Box$:

$\Diamond\varphi \leftrightarrow \neg\Box\neg\varphi$; $\quad \Box\varphi \leftrightarrow \neg\Diamond\neg\varphi$

2. T $\Box\varphi \rightarrow \varphi$; $\quad \varphi \rightarrow \Diamond\varphi$

3. D $\Box\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$ – konsekwencja T

4. zmodalizowane MP $\Box(\varphi \rightarrow \psi) \wedge \Box\varphi \rightarrow \Box\psi$
lub K $\Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi)$

5. RG $\vdash \varphi \ / \ \vdash \Box\varphi$; $\quad \vdash \Diamond\varphi \ / \ \vdash \varphi$

b. negatywne:

1. $\nvdash p \longrightarrow \Box p$; $\quad \nvdash \Diamond p \longrightarrow p$

2. $\nvdash \Diamond p$; $\quad \nvdash \neg\Box p$

3. $\nvdash \Box\varphi \leftrightarrow \neg\varphi$

4. $\nvdash \Box\varphi \leftrightarrow \bot$

5. $\nvdash \Box\varphi \leftrightarrow \neg\bot$

Monomodalne logiki normalne: semantyka relacyjna

Definicja 1 (Struktura relacyjna)

Strukturą relacyjną, albo ramą (frame) jest dowolna para $\mathfrak{F} = \langle\ \mathcal{W}, \mathcal{R}\rangle$ gdzie:

- dziedzina to $\mathcal{W} \neq \varnothing$, który jest zbiorem punktów (światów możliwych);
- $\mathcal{R}$ to binarna relacja na $\mathcal{W}$, zwana relacją osiągalności.

W logikach modalnych aletycznych $\mathcal{R}ww'$ oznacza, że w' jest osiągalne z w (możliwe ze względu na w).

Definicja 2 (Model na strukturze) *Modelem na danej strukturze $\mathfrak{F}$ jest dowolny układ $\mathfrak{M} = \langle\, \mathfrak{F}, V \rangle$, gdzie V jest funkcją ewaluacji dla zmiennych, tj. $V : ZZ \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{W})$.*

Definicję *spełniania formuły* φ *w punkcie* w *modelu* $\mathfrak{M}$ ($\mathfrak{M}, w \vDash \varphi$) wyrażają poniższe warunki:

$\mathfrak{M}, w \vDash \varphi$	wtw	$w \in V(\varphi)$ dla dowolnej $\varphi \in ZZ$
$\mathfrak{M}, w \vDash \neg\varphi$	wtw	$\mathfrak{M}, w \nvDash \varphi$
$\mathfrak{M}, w \vDash \varphi \wedge \psi$	wtw	$\mathfrak{M}, w \vDash \varphi$ i $\mathfrak{M}, w \vDash \psi$
$\mathfrak{M}, w \vDash \varphi \vee \psi$	wtw	$\mathfrak{M}, w \vDash \varphi$ lub $\mathfrak{M}, w \vDash \psi$
$\mathfrak{M}, w \vDash \varphi \rightarrow \psi$	wtw	$\mathfrak{M}, w \nvDash \varphi$ lub $\mathfrak{M}, w \vDash \psi$
$\mathfrak{M}, w \vDash \Box\varphi$	wtw	$\mathfrak{M}, w' \vDash \varphi$ dla dowolnego w' takiego, że $\mathcal{R}ww'$
$\mathfrak{M}, w \vDash \Diamond\varphi$	wtw	$\mathfrak{M}, w' \vDash \varphi$ dla pewnego w' takiego, że $\mathcal{R}ww'$

Dla zbiorów formuł zapis $\mathfrak{M}, w \vDash \Gamma$ oznacza, że $\mathfrak{M}, w \vDash \psi$ dla $\forall_{\psi \in \Gamma}$.

$\mathfrak{M}, w \not\models \varphi$ oznacza fałszywość formuły φ w w; $\mathfrak{M}, w \not\models \Gamma$ oznacza fałszywość co najmniej jednego elementu Γ w w.

W przypadku gdy model jest ustalony, bądź domyślny będziemy po prostu pisać $w \models \varphi$ (względnie $w \not\models \varphi$) lub $w \models \Gamma$ (względnie $w \not\models \Gamma$) dla zbioru.

Zbiór wszystkich punktów spełniających daną formułę (zbiór) oznaczamy:

$\|\varphi\|_{\mathfrak{M}} = \{w \in \mathcal{W}_{\mathfrak{M}} : w \models \varphi\}$;

$\|\Gamma\|_{\mathfrak{M}} = \bigcap \|\psi\|_{\mathfrak{M}}$ dla $\forall_{\psi \in \Gamma}$

Zazwyczaj używać będziemy notacji skróconej $\|\varphi\|$ ($\|\Gamma\|$) przy $\mathfrak{M}$ domyślnym lub ustalonym.

$\|\varphi\|$ będziemy czytać dla wygody zwyczajowo jako "sąd φ" (intensja φ) w danym $\mathfrak{M}$.

Przykład 1: Rozważmy strukturę $\mathfrak{F} = \langle\ \mathcal{W}, \mathcal{R}\rangle$ gdzie: $\mathcal{W} = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$, a $\mathcal{R} = \{\langle w_1, w_2\rangle, \langle w_1, w_3\rangle, \langle w_2, w_2\rangle, \langle w_3, w_4\rangle, \langle w_4, w_3\rangle\}$. Niech $\mathfrak{M}_1 = \langle \mathfrak{F}, V_1\rangle$, gdzie $V_1(p) = \{w_2, w_3\}, V_1(q) = \{w_1, w_4\}$, a $\mathfrak{M}_2 = \langle \mathfrak{F}, V_2\rangle$, gdzie $V_2(p) = \varnothing, V_2(q) = \{w_1, w_3, w_4\}$.

- $\mathfrak{M}_1, w_1 \models \Box p \qquad \mathfrak{M}_2, w_1 \not\models \Box p$
- $\mathfrak{M}_2, w_1 \models \Diamond q \qquad \mathfrak{M}_1, w_1 \models \Diamond\Box q$
- $\mathfrak{M}_1, w_3 \models \Box\Box p \qquad \mathfrak{M}_1, w_1 \not\models \Box p \to p$
- $\mathfrak{M}_1, w_2 \models \Box p \to p \qquad \mathfrak{M}_1, w_2 \models \Diamond p \to p$
- $\mathfrak{M}_2, w_1 \models \Diamond\Box^n q$, dla dowolnego $n > 0$

Definicja 3 (Spełnialność, falsyfikowalność) φ (Γ) *jest* *spełnialna w modelu* $\mathfrak{M}$ *wtw*, $\|\varphi\| \neq \varnothing$ $(\|\Gamma\| \neq \varnothing)$.

φ (Γ) *jest* *spełnialna* *wtw, istnieje model, w którym jest spełnialna.*

φ (Γ) *jest* *sfalsyfikowana w modelu* $\mathfrak{M}$ *wtw*, $\|\varphi\| \neq \mathcal{W}_{\mathfrak{M}}$ $(\|\Gamma\| \neq \mathcal{W}_{\mathfrak{M}})$ *(inaczej:* $\mathfrak{M}$ *falsyfikuje* φ (Γ)*).*

φ (Γ) *jest* *sfalsyfikowana* *wtw, istnieje model, w którym jest sfalsyfikowana.*

Przykład 2: $\Diamond p \wedge \Box(p \rightarrow \Diamond\neg p)$ jest spełnialne.

Definicja spełniania formuły (czy zbioru formuł) w modelu daje nam *lokalną* charakterystykę prawdziwości. Dalszym krokiem jest wprowadzenie pojęcia *globalnej prawdziwości*:

Definicja 4 (Prawdziwość w modelu)

$\mathfrak{M} \models \varphi$ wtw, $\forall_{w \in \mathcal{W}_{\mathfrak{M}}}, \mathfrak{M}, w \models \varphi$
(lub $\|\varphi\|_{\mathfrak{M}} = \mathcal{W}_{\mathfrak{M}}$);

analogicznie dla Γ, $\mathfrak{M} \models \Gamma$ wtw, $\|\Gamma\|_{\mathfrak{M}} = \mathcal{W}_{\mathfrak{M}}$.

Trzeci poziom prawdziwości to tautologiczność, czyli prawdziwość w każdym modelu.

Definicja 5 (Prawdziwość w każdym modelu)

$$\models \varphi \; wtw, \; \forall_{\mathfrak{M}}, \mathfrak{M} \models \varphi$$

$\not\models \varphi$ oznacza formułę nietautologiczną, czyli falsyfikowalną.

Lemat 1 (tautologie)
Następujące schematy generują formuły prawdziwe we wszystkich modelach:

$$\Diamond\varphi \leftrightarrow \neg\Box\neg\varphi$$

$$\Box\varphi \leftrightarrow \neg\Diamond\neg\varphi$$

$$\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$$

$$\Box(\varphi \to \psi) \to (\Diamond\varphi \to \Diamond\psi)$$

$$\Box\varphi \vee \Box\psi \to \Box(\varphi \vee \psi)$$

$$\Diamond(\varphi \wedge \psi) \to \Diamond\varphi \wedge \Diamond\psi$$

$$\Box(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \Box\varphi \wedge \Box\psi$$

$$\Diamond(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \Diamond\varphi \vee \Diamond\psi$$

Lemat 2 (formuły falsyfikowalne)
Następujące schematy nie są schematami tautologii:

(D) $\Box\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$

(T) $\Box\varphi \rightarrow \varphi$

(T') $\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$

(4) $\Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$

(5) $\Diamond\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$

(B) $\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$

Monomodalne logiki normalne: ujęcie aksjomatyczne

Bazowa logika **K** standardowo jest charakteryzowane następująco:

Schematy aksjomatów i reguł pierwotnych:

- Dowolne φ, które jest schematem tezy **KRZ**
- (Dual) $\Diamond\varphi \leftrightarrow \neg\Box\neg\varphi$
- (K) $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$
- (MP) jeżeli $\varphi \in$ **K** i $\varphi \to \psi \in$ **K**, to $\psi \in$ **K**
- (RG) jeżeli $\varphi \in$ **K**, to $\Box\varphi \in$ **K**

Definicja 6 (dowód, teza) *Dowodem formuły φ jest skończony ciąg, którego dowolny element to aksjomat lub formuła wydedukowana z wcześniejszych elementów za pomocą reguł pierwotnych, a ostatni element ciągu to φ.*

φ jest tezą **K** ($\vdash_K \varphi$) *wtw, φ ma dowód.*

Twierdzenie 1 (Przystosowanie, pełność, adekwatność (słaba))

(a) Jeżeli $\vdash_K \varphi$, to $\models \varphi$.
(b) Jeżeli $\models \varphi$, to $\vdash_K \varphi$.
(c) $\models \varphi$ wtw, $\vdash_K \varphi$.

Mocniejsze normalne logiki monomodalne

Rozważmy następujące schematy formuł:

nazwa	aksjomat
(T)	$\Box\varphi \to \varphi$
(4)	$\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$
(B)	$\varphi \to \Box\Diamond\varphi$

Z ich użyciem można zaksjomatyzować kolejne 3 ważne logiki modalne:

K+(T) = **T**

T+(4) = **S4**

S4+(B) = **S5**

Mamy więc następującą sytuację:

$\mathbf{K} \subset \mathbf{T} \subset \mathbf{S4} \subset \mathbf{S5}$

Aby scharakteryzować semantycznie inne logiki normalne musimy wprowadzić dodatkową terminologię:

Definicja 7 (Prawdziwość w strukturach)

1. $\mathfrak{F} \models \varphi\ wtw,\ \forall_{\mathfrak{M} \in MOD(\mathfrak{F})}, \mathfrak{M} \models \varphi$
(gdzie $MOD(\mathfrak{F})$ to klasa wszystkich modeli zbudowanych na strukturze $\mathfrak{F}$)

2. Niech $\mathcal{F}$ oznacza dowolną klasę struktur, wtedy: $\mathcal{F} \models \varphi\ wtw,\ \forall_{\mathfrak{F} \in \mathcal{F}}, \mathfrak{F} \models \varphi$.

3. <u>Zawartością struktury</u> $\mathfrak{F}$ nazywamy zbiór $E(\mathfrak{F}) = \{\varphi : \mathfrak{F} \models \varphi\}$.

4. <u>Zawartością klasy struktur</u> $\mathcal{F}$ nazywamy zbiór $E(\mathcal{F}) = \{\varphi : \mathcal{F} \models \varphi\}$.

Twierdzenie 4
Zawartość dowolnej $\mathfrak{F}$ ($\mathcal{F}$) jest logiką normalną.

Ponieważ nośnik danej struktury (charakter jego elementów i liczność) nie ma wpływu na określenie danej logiki, natomiast strukturalne własności relacji osiągalności mają wpływ zasadniczy, więc będziemy mówić o klasach struktur jednolitych pod względem własności relacji osiągalności. Oto najważniejsze z nich:

nazwa	warunek
serialność	$\forall x \exists y \mathcal{R}xy$
zwrotność	$\forall x \mathcal{R}xx$
przechodniość	$\forall xyz(\mathcal{R}xy \wedge \mathcal{R}yz \rightarrow \mathcal{R}xz)$
symetria	$\forall xy(\mathcal{R}xy \rightarrow \mathcal{R}yx)$
euklidesowość	$\forall xyz(\mathcal{R}xy \wedge \mathcal{R}xz \rightarrow \mathcal{R}yz)$

Struktury i klasy struktur (a także modele na nich ufundowane) będziemy określać według własności, które posiadają ich relacje osiągalności. Np. powiemy, że $\mathcal{F}$ $(\mathfrak{F}, \mathfrak{M})$ jest klasą (strukturą, modelem) zwrotną, gdy każda struktura $\mathfrak{F} \in \mathcal{F}$ jest strukturą zwrotną.

Twierdzenie 5
Zachodzą następujące równoważności dla formuł (D), (T), (4), (5) i (B):

$\mathcal{F} \models \Box\varphi \rightarrow \Diamond\varphi$ wtw, $\mathcal{F}$ jest serialna

$\mathcal{F} \models \Box\varphi \rightarrow \varphi$ wtw, $\mathcal{F}$ jest zwrotna

$\mathcal{F} \models \Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$ wtw, $\mathcal{F}$ jest przechodnia

$\mathcal{F} \models \Diamond\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$ wtw, $\mathcal{F}$ jest euklidesowa

$\mathcal{F} \models \varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$ wtw, $\mathcal{F}$ jest symetryczna.

Adekwatność względem klas struktur

Ogólna postać twierdzenia o przystosowaniu logiki **L** względem klasy struktur $\mathcal{F}$ mówi, że:

Twierdzenie 1 (Przystosowanie)

Jeżeli $\vdash_L \varphi$, to $\models_{\mathcal{F}} \varphi$.

Twierdzenie o pełności logiki **L** względem klasy struktur $\mathcal{F}$ mówi, że:

Twierdzenie 2 (Pełność)

Jeżeli $\models_{\mathcal{F}} \varphi$, to $\vdash_L \varphi$.

Oba twierdzenia dają nam twierdzenie o słabej adekwatności **L** względem klasy $\mathcal{F}$: **L**$=E(\mathcal{F})$.

Mówimy wtedy, że $\mathcal{F}$ *determinuje*, albo charakteryzuje **L**. $\mathcal{F}$ jest wtedy określane jako klasa **L**-struktur, a każdy model należący do MOD($\mathcal{F}$), to **L**-model. Powiemy też, że φ (Γ) jest **L**-spełnialny (lub **L**-falsyfikowalny) wtw, jest spełnialny (falsyfikowalny) w jakimś **L**-modelu.

Tabela zestawia wyniki dotyczące determinacji wyróżnionych wcześniej logik.

L	**L**-struktury
K	dowolne
T	zwrotne
S4	zwrotne i przechodnie
S5	równoważnościowe

Etykietowane diagramy Betha

A. Konwencje zapisu

α	α_1	α_2	β	β_1	β_2
$+\varphi \wedge \psi$	$+\varphi$	$+\psi$	$-\varphi \wedge \psi$	$-\varphi$	$-\psi$
$-\varphi \vee \psi$	$-\varphi$	$-\psi$	$+\varphi \vee \psi$	$+\varphi$	$+\psi$
$-\varphi \rightarrow \psi$	$+\varphi$	$-\psi$	$+\varphi \rightarrow \psi$	$-\varphi$	$+\psi$

π	ν	$\pi' = \nu'$
$+\Diamond\varphi$	$+\Box\varphi$	$+\varphi$
$-\Box\varphi$	$-\Diamond\varphi$	$-\varphi$

Definicja 8 (Etykiety)

1. $1 \in$ET
2. Jeżeli $\sigma \in$ET, to $\sigma.k \in$ET

$\sigma.k$ denotuje etykietę, której ostatni element to k; $\sigma\tau$: oznacza etykietę, która jest konkatenacją dwóch ciągów;

Będziemy nazywali etykietę σ *rodzicem* a $\sigma.i$ *dzieckiem*; oprócz 1. każda inna etykieta jest dzieckiem.

Przykład i interpretacja

1, 1.2.1.1.5, 1.1.1.1.3, są etykietami, a 4.1.3.7., czy 1.3.0.5. etykietami nie są. Nieformalnie, etykieta jest nazwą określonego świata w konstruowanym modelu, a jej struktura pokazuje, jakie punkty w tym modelu ją poprzedzają przez $\mathcal{R}$, np. drugi przykład etykiety można odczytać jako (częściowy) opis modelu, w którym $1, 1.2, 1.2.1, 1.2.1.1$, i 1.2.1.1.5, należą do $\mathcal{W}$ a pary $\langle 1, 1.2\rangle, \langle 1.2, 1.2.1\rangle, ..., \langle 1.2.1.1, 1.2.1.1.5\rangle$ należą do $\mathcal{R}$. Ogólnie, dla dowolnych dwóch etykiet, z których jedna jest dzieckiem drugiej, oznacza to, że $\sigma.i$ jest osiągalne przez $\mathcal{R}$ z σ.

Definicja 9 (Formuły etykietowane) *Jeżeli $\varphi \in FOR(\mathbf{MOD})$ a $\sigma \in$ET, to $\sigma : +\varphi$ i $\sigma : -\varphi$ są formułami etykietowanymi.*

Intuicyjnie $\sigma : +\varphi$ oznacza, że φ jest spełnione w modelu w punkcie σ a $\sigma : -\varphi$, że φ jest fałszywa w σ.

Reguły

1. Bazowa formalizacja (**K**-EDB)

($\perp$) $\sigma : +\varphi$, $\sigma : -\varphi$ / $\perp$

($\neg$) $\sigma : +\neg\varphi$ / $\sigma : -\varphi$ $\sigma : -\neg\varphi$ / $\sigma : +\varphi$

(α) $\sigma : \alpha$ / $\sigma : \alpha_1,\ \sigma : \alpha_2$

(β) $\sigma : \beta$, / $\sigma : \beta_1 \ | \ \sigma : \beta_2$,

(π) $\sigma : \pi$ / $\sigma.k : \pi'$, gdzie $\sigma.k$ jest nową etykietą

(ν) $\sigma : \nu$ / $\sigma.k : \nu'$, gdzie $\sigma.k$ jest dowolną etykietą

Reguły dodatkowe:

(T) $\sigma : \nu$ / $\sigma : \nu'$

(4) $\sigma : \nu$ / $\sigma.k : \nu$, gdzie $\sigma.k$ jest dowolną etykietą

(B) $\sigma.k : \nu$ / $\sigma : \nu$, gdzie $\sigma.k$ jest dowolną etykietą

Formalizacje znanych logik normalnych można uzyskać przez następujące kombinacje podanych reguł.

T-EDB = **K**-EDB + (T)

S4-EDB = **T**-EDB + (4)

S5-EDB = **S4**-EDB + (B)

Definicja φ ma dowód w **L**-EDB wtw istnieje zamknięte drzewo dla $1 : -\varphi$.

Przykład dowodu (drzewo zamknięte)

$$\begin{array}{ll}
\multicolumn{2}{l}{1 : -\Box p \vee \Box q \to \Box(p \vee q)} \\
\multicolumn{2}{l}{1 : +\Box p \vee \Box q} \\
\multicolumn{2}{l}{1 : -\Box(p \vee q)} \\
\multicolumn{2}{l}{1.1 : -p \vee q} \\
\multicolumn{2}{l}{1.1 : -p} \\
\multicolumn{2}{l}{1.1 : -q} \\
\swarrow & \searrow \\
1 : +\Box p & 1 : +\Box q \\
1.1 : +p & 1.1 : +q \\
\perp & \perp
\end{array}$$

Adekwatność diagramów Betha

Twierdzenie $\models_L \varphi$ wtw $1 : -\varphi$ ma dowód w **L**-EDB

Wynikanie i dowiedlność

Definicja 10 (Wynikanie lokalne i globalne)

1. φ wynika lokalnie z Γ w logice **L**:

$\Gamma \models_L \varphi$ wtw, $\forall_{\mathfrak{M} \in MOD(\mathbf{L})}(\|\Gamma\|_{\mathfrak{M}} \subseteq \|\varphi\|_{\mathfrak{M}})$ (inaczej: $\forall_{\mathfrak{M} \in MOD(\mathbf{L})}, \forall_{w \in \mathcal{W}_{\mathfrak{M}}}$(jeżeli $\mathfrak{M}, w \vDash \Gamma$, to $\mathfrak{M}, w \vDash \varphi$))

2. φ wynika globalnie z Γ w logice **L**:

$\Gamma \| \models_L \varphi$ wtw $\forall_{\mathfrak{M} \in MOD(\mathbf{L})}$(jeżeli $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$, to $\mathfrak{M} \vDash \varphi$))

Twierdzenie 1 *Jeżeli* $\Gamma \models_L \varphi$ *, to* $\Gamma \| \models_L \varphi$*, ale nie odwrotnie.*

Przykład:

$\varphi \| \models_L \Box\varphi$, ale $\varphi \not\models_L \Box\varphi$.

Definicja 11 (Dowiedlność lokalna i globalna)
1. $\Gamma \ \vdash_L \varphi$ *wtw* $\vdash_L \bigwedge\Gamma' \to \varphi$, *dla pewnego skończonego* $\Gamma' \subseteq \Gamma$

2. $\Gamma \ \Vdash_L \varphi$ *wtw istnieje dowód* φ *z* Γ *na gruncie* **L**

$\Vdash$ jest relacją mocniejszą od $\vdash$, gdyż dla $\Vdash$ nie zachodzi *twierdzenie o dedukcji*, które w przypadku $\vdash$ jest spełnione z definicji. Dla przykładu, mamy $p \Vdash_L \Box p$ (z racji domknięcia na (RG)), ale $p \nvdash_L \Box p$ (bo $\nvdash_L p \to \Box p$). Natomiast zachodzi zależność jednostronna:

Jeżeli $\Gamma \ \vdash_L \varphi$, to $\Gamma \ \Vdash_L \varphi$

Mocna adekwatność

Wynikanie lokalne odpowiada dowiedlności typu $\vdash_L$, a globalne dowiedlności typu $\Vdash_L$, w tym sensie, że twierdzenie 1. i 2. można wzmocnić otrzymując mocne twierdzenia o adekwatności:

Twierdzenie 3 (Mocna adekwatność)

1. $\Gamma \vdash_L \varphi$ *wtw*, $\Gamma \models_L \varphi$

2. $\Gamma \Vdash_L \varphi$ *wtw*, $\Gamma \mid\models_L \varphi$

3. $\Gamma \models_L \varphi$ *wtw*, $\{1 : +\psi_1, ..., 1 : +\psi_n, 1 : -\varphi\}$ ma dowód w **L**-EDB

gdzie $\{\psi_1, ..., \psi_n\} \subseteq \Gamma$

Dedukcja Naturalna dla logik modalnych

a) Reguły inferencji:

$(Dual)$ $\neg\Box\varphi$ / $\Diamond\neg\varphi$; $\neg\Diamond\varphi$ / $\Box\neg\varphi$

$(\Box E)$ $\Box\varphi$ / φ; $(\Diamond D)$ φ / $\Diamond\varphi$

$(\Box D)$ φ / $\Box\varphi$, gdzie φ jest tezą **L**

$(\Diamond E)$ $\Diamond\varphi$ / φ, gdzie φ jest tezą **L**

$(\Box D')$ φ / $\Box\varphi$, gdzie φ jest formułą modalną lub tezą **L**

$(\Diamond E')$ $\Diamond\varphi$ / φ, gdzie φ jest formułą modalną lub tezą **L**

b) schemat meta-reguły:

(MOD) $\Box\varphi_1, ..., \Box\varphi_n$ / $\Box\psi$ pod warunkiem, że $\varphi_1, ..., \varphi_n \vdash_L \psi$

System DN dla **K, T, S4, S5**

Do systemu DN Słupeckiego/Borkowskiego należy dodać:

a) dla **K** – $(MOD), (Dual), (\Box D), (\Diamond E)$

b) dla **T** – do DN-**K** dodajemy $(\Box E), (\Diamond D)$

c) dla **S4** – w DN-**T** zamieniamy $(\Box D), (\Diamond E)$ na $(\Box D'), (\Diamond E')$, gdzie przez formułę modalną w przypadku $(\Box D')$ rozumiemy dowolną formułę postaci $\Box\varphi$ lub $\neg\Diamond\varphi$, a w przypadku $(\Diamond E')$ dowolną formułę postaci $\Diamond\varphi$ lub $\neg\Box\varphi$

d) dla **S5** – DN-**S4** ale formuła modalna w obu przypadkach to dowolna formuła postaci $\Box\varphi, \Diamond\varphi, \neg\Box\varphi$ lub $\neg\Diamond\varphi$

Przykład dowodu

$\vdash_K (\Box p \to \Diamond q) \to \Diamond(p \to q)$

1.	$\Box p \to \Diamond q$	z
2.	$\neg\Diamond(p \to q)$	zn
3.	$\Box\neg(p \to q)$	$(Dual, 2)$
4.	$\Box(p \land \neg q)$	$(MOD, 3)$
5.	$\Box p$	$(MOD, 4)$
6.	$\Box\neg q$	$(MOD, 4)$
7.	$\Diamond q$	$(\to E, 1, 5)$
8.	$\neg\Diamond q$	$(Dual, 6)$
9.	$\bot$	$(7, 8)$

$\vdash_{S5} \Box(p \to \Box q) \to (\Diamond p \to q)$

1.	$\Box(p \to \Box q)$	z
2.	$\Diamond p$	z
3.	$\neg q$	zn
4.	$\Diamond\neg q$	$(\Diamond D, 3)$
5.	$\neg\Box q$	$(Dual, 4)$
6.	$\Box\neg\Box q$	$(\Box D', 5)$
7.	$\Box\neg p$	$(MOD, 1, 6)$
8.	$\neg\Diamond p$	$(Dual, 7)$
9.	$\bot$	$(2, 8)$

Dygresja:

Ontologiczny dowód istnienia Boga

Anzelm $\Longrightarrow$ Malcolm, Hartshorne, Purtill

Dwa założenia:

1. Możliwość istnienia – $\Diamond B$

2. Nieprzypadkowość istnienia – $\Box(B \to \Box B)$ (lub $\neg\Diamond(B \wedge \Diamond\neg B)$)

S5+1+2 $\vdash B$

gdyż $\vdash_{S5} \Box(B \to \Box B) \to (\Diamond B \to B)$

Logika deontyczna

Motywacje: prawo, etyka

Historia: Arystoteles – sylogizmy praktyczne

pierwsze systemy: Mally, VonWright, Kalinowski

Najważniejsze operatory deontyczne:

O – "należy", "powinno się", "jest obowiązkowe, że"

P – "jest dopuszczalne"

F – "jest zakazane"

$P\varphi := \neg O \neg \varphi;\ \ F\varphi := O\neg\varphi$

Pojęcie normy: – 2 opcje: mają wartość logiczną/nie mają $\Longrightarrow$
Czy argumenty funktorów deontycznych są zdaniami?

np. porównaj: "Należy dbać o dzieci" a "Jest obowiązkowe, że ludzie dbają o dzieci"

Minimalna logika deontyczna **D** powstaje z dodania do deontycznej wersji **K** (O zamiast $\Box$, P zamiast $\Diamond$) aksjomatu:

(D) $O\varphi \to P\varphi$

(uwaga: (T) jest za mocne w interpretacji deontycznej).

Problemy:

- iteracja operatorów deontycznych, łączenie ze zdaniami nienormatywnymi

- (D) jest równoważne $\neg(O\varphi \wedge O\neg\varphi)$, co jest niezgodne z faktem zachodzenia konfliktu wartości

- paradoks Rossa $\vdash_D Op \to O(p \vee q)$
  p := dbać o potomstwo, q := sprzedać je handlarzom organów

- dobry Samarytanin $\vdash_D Fp \to O(p \to q)$
  p := zabijać q := obrabować

Możliwe rozwiązania:

– ograniczenia w składni, np. system OS vonWrighta

– użycie języka multimodalnego z wieloma funktorami $O_1, O_2, ...$ zrelatywizowanymi do różnych systemów wartości

– przyjąć słabszą logikę, np. bez reguły
$\vdash \varphi \rightarrow \psi \ / \ \vdash O\varphi \rightarrow O\psi$

– przyjąć inną implikację, np. relewantną

– ogólnie: w wielu wypadkach może niewłaściwe sposoby odczytywania

Uogólnienia I – Logiki multimodalne (normalne)

Przykład logik deontycznych pokazuje, że dla adekwatnego ujęcia innych interpretacji modalności należy uogólnić standardowe techniki. Jeden ze sposobów to wprowadzenie wielu modalności.

Logiki multimodalne (polimodalne) budujemy w językach typu $\mathbf{J_n}$, gdzie mamy do dyspozycji n (par) funktorów modalnych. Zapis $\Box_i$ oznacza, że mamy do czynienia z i-tym funktorem konieczności ($1 \leq i \leq n$). Semantyka ulega stosownemu uogólnieniu:

Definicja (Struktura relacyjna multimodalna) *Strukturą relacyjną*, albo *ramą* (frame) jest dowolny układ $\mathfrak{F} = \langle\, \mathcal{W}, \{\mathcal{R}_i\}\rangle$ gdzie $\mathcal{W} \neq \varnothing$ jest zbiorem punktów (światów możliwych, punktów czasowych), a $\{\mathcal{R}_i\}$ jest zbiorem binarnych relacji na $\mathcal{W}$, zwanych *relacjami osiągalności*.

Definicja modelu na strukturze multimodalnej jest bez zmian. Podobnie definicja spełniania formuł za wyjątkiem warunków dla konieczności i możliwości, które przybierają postać:

$$
\begin{array}{lll}
\mathfrak{M}, w \models \Box_i \varphi & \text{wtw} & \mathfrak{M}, w' \models \varphi \ \text{ dla dowolnego } w' \\
& & \quad \text{takiego, że } \mathcal{R}_i w w' \\
\mathfrak{M}, w \models \Diamond_i \varphi & \text{wtw} & \mathfrak{M}, w' \models \varphi \ \text{ dla pewnego } w' \\
& & \quad \text{takiego, że } \mathcal{R}_i w w'
\end{array}
$$

Logiki multimodalne, w których każda modalność spełnia te same warunki to

logiki homogeniczne,

natomiast takie, w których różne modalności mają różne własności, to

logiki heterogeniczne

W obu wypadkach możemy mieć do czynienia ze zwykłym złożeniem kilku logik monomodalnych, w której brak jest interakcji pomiędzy różnymi modalnościami lub z *logikami interaktywnymi*, w których zachodzą relacje między różnymi modalnościami.

Ich zewnętrznym przejawem jest występowanie tzw. *aksjomatów interaktywnych*. Jako przykład można podać aksjomat inkluzji:

$$\Box_i \varphi \to \Box_j \varphi$$

Dwie ważne klasy logik multimodalnych to:

- Logiki temporalne
- Logiki epistemiczne i doksastyczne

Do czego potrzebna jest logika temporalna?

- tradycyjne filozoficzne problemy dotyczące natury czasu (zmiana w czasie a tożsamość, determinizm)

- lingwistyka; analiza czasów gramatycznych

- fizyka; czas a zmiana, czas jako wymiar, wyzwania nowej fizyki

- informatyka; analiza realizacji programów, ich poprawności itp.

- AI; problemy dotyczące planowania, kolejności akcji, przetwarzania wiedzy zmieniającej się w czasie itp.

Historia

1. paradoksy Zenona
2. Arystoteles (Fizyka, bitwa morska)
3. Diodor Kronos (temporalne definicje modalności, argument mistrzowski)
4. Augustyn – czas subiektywny
5. przedwiedza, predestynacja, wolna wola (Augustyn, Boecjusz, Anzelm, Ockham)
6. Ockham (sylogizmy temporalne)
7. Newton – czas jako wymiar

8. Leibniz – czas jako relacja
9. Kant – czas jako aprioryczna forma naoczności, pierwsza antynomia
10. McTaggart (nierealność czasu, seria A i B)
11. Bergson – krytyka naukowego ujęcia czasu
12. Husserl, Ingarden – fenomenologiczna analiza czasu
13. Heidegger, Sartre – egzystencjalistyczne doświadczenie czasu
14. Einstein (podejście relatywistyczne)

15. Russell – analiza struktur interwałowych

16. Reichenbach – analiza czasów gramatycznych

17. Prior (standardowe logiki temporalne)

18. Pnueli (logiki programów)

Podstawowe kontrowersje odnośnie natury czasu

1. subiektywny/obiektywny

2. względny/absolutny

3. punkty/interwały/zdarzenia

4. skończony/nieskończony

5. liniowy/rozgałęziony

6. dyskretny/ciągły/gęsty

	subiektywny	obiektywny
względny	Augustyn	Einstein
absolutny	Kant	Newton

Logiki temporalne czasu punktowego – język

Standardowy język bimodalny z czterema jednoargumentowymi funktorami temporalnymi:

G dla "odtąd zawsze" ($\Box_F$, $[F]$)

F dla "nastąpi" ($\Diamond_F$, $\langle F \rangle$)

H dla "dotąd zawsze" ($\Box_P$, $[P]$)

P dla "nastąpiło" ($\Diamond_P$, $\langle P \rangle$)

Uwaga! G i F oraz H i P są wzajemnie definiowalne:

$G\varphi \leftrightarrow \neg F \neg \varphi$ oraz $H\varphi \leftrightarrow \neg P \neg \varphi$

Przykład 1:

Kazik śpi. := p

Kazik będzie spał. := Fp

Kazik nie spał ale miał iść spać. :=
$P(\neg p \wedge Fp)$

Jeżeli Kazik spał jakiś czas temu, to już nie śpi lub kiedyś nie będzie spał. := $Pp \rightarrow \neg p \vee F\neg p$

Kazik się wyspał albo kiedyś się wyśpi. :=
$PPp \vee FPp$

Semantyka relacyjna – dwa warianty

Struktury dla bimodalnych logik temporalnych są postaci $\langle\ \mathcal{T}, \mathcal{R}_F, \mathcal{R}_P \rangle$, gdzie $\mathcal{T}$ jest zbiorem punktów czasowych, $\mathcal{R}_F$ jest relacją następstwa w czasie, a $\mathcal{R}_P$ jest relacją poprzedzania w czasie. Dodatkowo zakładamy, że $\mathcal{R}_P$ jest konwersem $\mathcal{R}_F$. Z tego powodu można je zastąpić prostszymi strukturami z jedną relacją.

Definicja 12 (Struktura relacyjna)

Strukturą relacyjną, albo ramą (frame) jest dowolna para $\mathfrak{F} = \langle \mathcal{T}, \mathcal{R} \rangle$ gdzie:

- dziedzina to $\mathcal{T} \neq \varnothing$, który jest zbiorem punktów czasowych (momentów);

- $\mathcal{R}$ to binarna relacja na $\mathcal{T}$, zwana relacją następstwa czasowego.

Definicja 13 (Model na strukturze)

Modelem na danej strukturze $\mathfrak{F}$ jest dowolny układ $\mathfrak{M} = \langle\, \mathfrak{F}, V \rangle$, gdzie V jest funkcją waluacji dla zmiennych, tj. $V : ZZ \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{T})$. ($ZZ$ to zbiór zmiennych zdaniowych a $\mathcal{P}(\mathcal{T})$ to zbiór potęgowy na $\mathcal{T}$). Dziedzinę danego modelu $\mathfrak{M}$ będziemy oznaczać przez $\mathcal{T}_{\mathfrak{M}}$.

Definicję *spełniania formuły* φ *w punkcie* t *modelu* $\mathfrak{M}$ ($\mathfrak{M}, t \models \varphi$) wyrażają poniższe warunki:

$\mathfrak{M}, t \models p$	wtw	$t \in V(p)$
$\mathfrak{M}, t \models \neg\varphi$	wtw	$\mathfrak{M}, t \not\models \varphi$
$\mathfrak{M}, t \models \varphi \wedge \psi$	wtw	$\mathfrak{M}, t \models \varphi$ i $\mathfrak{M}, t \models \psi$
$\mathfrak{M}, t \models \varphi \vee \psi$	wtw	$\mathfrak{M}, t \models \varphi$ lub $\mathfrak{M}, t \models \psi$
$\mathfrak{M}, t \models \varphi \rightarrow \psi$	wtw	$\mathfrak{M}, t \not\models \varphi$ lub $\mathfrak{M}, t \models \psi$
$\mathfrak{M}, t \models G\varphi$	wtw	$\mathfrak{M}, t' \models \varphi$ dla dowolnego t' takiego, że $\mathcal{R}tt'$
$\mathfrak{M}, t \models F\varphi$	wtw	$\mathfrak{M}, t' \models \varphi$ dla pewnego t' takiego, że $\mathcal{R}tt'$
$\mathfrak{M}, t \models H\varphi$	wtw	$\mathfrak{M}, t' \models \varphi$ dla dowolnego t' takiego, że $\mathcal{R}t't$
$\mathfrak{M}, t \models P\varphi$	wtw	$\mathfrak{M}, t' \models \varphi$ dla pewnego t' takiego, że $\mathcal{R}t't$

Definicje spełnialności, falsyfikowalności, prawdziwości w modelu, tautologiczności, wynikania bez zmian (jak w logikach modalnych aletycznych).

Łatwo zauważyć, że każda z (par) modalności jest modalnością normalną tzn., że zachodzi aksjomat (K) zarówno dla G jak i dla H, oraz dla obu funktorów mamy domknięcie na regułę (RG). Symetrię przyszłości i przeszłości wyraża para twierdzeń (B) dotyczących interakcji obu modalności:

$$\varphi \to GP\varphi \quad \varphi \to HF\varphi$$

Najsłabsza logika temporalna (zawartość klasy wszystkich struktur), która spełnia podane warunki to **Kt**.

Logika Kt: Ujęcie aksjomatyczne

A. Schematy aksjomatów:

- Dowolne φ, które jest schematem tezy **KRZ**
- $(Dual_F)$ $F\varphi \leftrightarrow \neg G \neg \varphi$
- $(Dual_P)$ $P\varphi \leftrightarrow \neg H \neg \varphi$
- (K_F) $G(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (G\varphi \rightarrow G\psi)$
- (K_P) $H(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (H\varphi \rightarrow H\psi)$
- (S_F) $\varphi \rightarrow GP\varphi$
- (S_P) $\varphi \rightarrow HF\varphi$

B. Reguły pierwotne:

- (MP) jeżeli $\varphi \in$ **Kt** i $\varphi \rightarrow \psi \in$ **Kt**, to $\psi \in$ **Kt**
- (RG_F) jeżeli $\varphi \in$ **Kt**, to $G\varphi \in$ **Kt**
- (RG_P) jeżeli $\varphi \in$ **Kt**, to $H\varphi \in$ **Kt**

Definicje dowodu, tezy, dowiedlności bez zmian, ponadto zachodzi:

Twierdzenie 3 (Adekwatność mocna)

1. $\Gamma \vdash_{Kt} \varphi$ wtw, $\Gamma \models \varphi$
2. $\Gamma \Vdash_{Kt} \varphi$ wtw, $\Gamma \mid\models \varphi$

Nadlogiki Kt

Nadlogiki **Kt** mogą być zarówno homogeniczne, jak i heterogeniczne np. możemy przyjąć, że przeszłość jest linearna, ale przyszłość dopuszcza rozgałęzienia.

Najbardziej elementarne własności, które wiążemy z relacją następstwa czasowego to:

nazwa	warunek
przeciwzwrotność	$\forall x \neg \mathcal{R}xx$
przechodniość	$\forall xyz(\mathcal{R}xy \wedge \mathcal{R}yz \rightarrow \mathcal{R}xz)$
asymetria mocna	$\forall xy(\mathcal{R}xy \rightarrow \neg \mathcal{R}yx)$

Zawartość klasy struktur o podanych wyżej własnościach to logika **Kt4**

Uwaga! ani asymetria, ani przeciwzwrotność nie jest definiowalna w standardowym języku temporalnym.

Kt4 – semantyka

Twierdzenie 5

(a) jeżeli $\mathcal{R}$ jest mocno asymetryczna, to jest przeciwzwrotna;

(b) jeżeli $\mathcal{R}$ jest przechodnia i przeciwzwrotna, to jest mocno asymetryczna;

(c) jeżeli $\mathcal{R}$ jest przechodnia, to jej konwers też jest przechodni.

Twierdzenie 6

$\mathcal{F} \models G\varphi \to GG\varphi$ wtw, $\mathcal{F}$ jest przechodnia

$\mathcal{F} \models FF\varphi \to F\varphi$ wtw, $\mathcal{F}$ jest przechodnia

$\mathcal{F} \models H\varphi \to HH\varphi$ wtw, $\mathcal{F}$ jest przechodnia

$\mathcal{F} \models PP\varphi \to P\varphi$ wtw, $\mathcal{F}$ jest przechodnia

Pierwsza antynomia Kanta

Teza: Świat ma początek w czasie.

Antyteza: Świat nie ma początku w czasie.

nazwa	warunek
początek	$\exists x \forall y (\mathcal{R}xy \vee x = y)$
koniec	$\exists x \forall y (\mathcal{R}yx \vee x = y)$
F-serialność	$\forall x \exists y \mathcal{R}xy$
P-serialność	$\forall x \exists y \mathcal{R}yx$

Twierdzenie 7

$\mathcal{F} \models H\bot \vee PH\bot$ wtw, $\mathcal{F}$ ma punkt najmniejszy

$\mathcal{F} \models G\bot \vee FG\bot$ wtw, $\mathcal{F}$ ma punkt największy

$\mathcal{F} \models G\varphi \to F\varphi$ wtw, $\mathcal{F}$ jest F-serialna

$\mathcal{F} \models H\varphi \to P\varphi$ wtw, $\mathcal{F}$ jest P-serialna

Uwaga! F-serialność w połączeniu z przeciwzwrotnością implikuje F-nieskończoność (analogicznie dla P-serialności i P-nieskończoności).

Logiki czasu liniowego

nazwa	warunek
liniowość mocna	$\forall xy(\mathcal{R}xy \vee \mathcal{R}yx)$
liniowość słaba	$\forall xy(\mathcal{R}xy \vee \mathcal{R}yx \vee x = y)$
F-spójność mocna	$\forall xyz(\mathcal{R}xy \wedge \mathcal{R}xz \rightarrow \mathcal{R}yz \vee \mathcal{R}zy)$
F-spójność słaba	$\forall xyz(\mathcal{R}xy \wedge \mathcal{R}xz \rightarrow \mathcal{R}yz \vee \mathcal{R}zy \vee y = z)$
P-spójność mocna	$\forall xyz(\mathcal{R}yx \wedge \mathcal{R}zx \rightarrow \mathcal{R}yz \vee \mathcal{R}zy)$
P-spójność słaba	$\forall xyz(\mathcal{R}yx \wedge \mathcal{R}zx \rightarrow \mathcal{R}yz \vee \mathcal{R}zy \vee y = z)$

Twierdzenie 8

$\mathcal{F} \models PF\varphi \rightarrow P\varphi \vee F\varphi$ wtw, $\mathcal{F}$ jest mocno F-spójna

$\mathcal{F} \models FP\varphi \rightarrow P\varphi \vee F\varphi$ wtw, $\mathcal{F}$ jest mocno P-spójna

$\mathcal{F} \models PF\varphi \rightarrow P\varphi \vee F\varphi \vee \varphi$ wtw, $\mathcal{F}$ jest słabo F-spójna

$\mathcal{F} \models FP\varphi \rightarrow P\varphi \vee F\varphi \vee \varphi$ wtw, $\mathcal{F}$ jest słabo P-spójna

Lemat 1 *Następujące formuły są na gruncie* **Kt4** *równoważne:*

$$PF\varphi \rightarrow P\varphi \vee F\varphi \vee \varphi$$

$$H\varphi \wedge G\varphi \wedge \varphi \rightarrow HG\varphi$$

$$F\varphi \wedge F\psi \rightarrow F(\varphi \wedge F\psi) \vee F(F\varphi \wedge \psi) \vee F(\varphi \wedge \psi)$$

$$G(G\varphi \wedge \varphi \rightarrow \psi) \vee G(G\psi \wedge \psi \rightarrow \varphi)$$

Bazowa logika linearna Kt4.3

1. Ujęcie aksjomatyczne

Kt4.3 to najmniejsza logika zawierająca **Kt** i wszystkie tezy o postaci:

- (4_F) $G\varphi \to GG\varphi$
- (3_F) $PF\varphi \to P\varphi \vee F\varphi \vee \varphi$
- (3_P) $FP\varphi \to P\varphi \vee F\varphi \vee \varphi$

Uwaga! zamiast (3_F) i (3_P) można użyć:

(3) $PF\varphi \vee FP\varphi \to P\varphi \vee F\varphi \vee \varphi$

2. Ujęcie semantyczne

Kt4.3 $= E(\mathcal{F})$, gdzie $\mathcal{F}$ to klasa struktur ze ścisłym porządkiem liniowym.

Ważne logiki czasu liniowego

Niech $\mathfrak{F}_N = \langle \mathbf{N}, < \rangle$, $\mathfrak{F}_C = \langle \mathbf{C}, < \rangle$, $\mathfrak{F}_W = \langle \mathbf{W}, < \rangle$, $\mathfrak{F}_R = \langle \mathbf{R}, < \rangle$, gdzie **N** to zbiór liczb naturalnych, **C** – całkowitych, **W** – wymiernych, **R** – rzeczywistych.

$E(\mathfrak{F}_N) =$ **Kt4.3** z dodatkiem:

- (S_F) $G\varphi \to F\varphi$
- (D_F) $G(G\varphi \to \varphi) \to (FG\varphi \to G\varphi)$
- (WF) $H(H\varphi \to \varphi) \to H\varphi$

$E(\mathfrak{F}_C) =$ **Kt4.3** z dodatkiem:

- (S_F) $G\varphi \to F\varphi$ $\quad$ (S_P) $H\varphi \to P\varphi$

- (D_F) $G(G\varphi \to \varphi) \to (FG\varphi \to G\varphi)$

- (D_P) $H(H\varphi \to \varphi) \to (PH\varphi \to H\varphi)$

$E(\mathfrak{F}_W) =$ **Kt4.3** z dodatkiem:

- (S_F) $G\varphi \to F\varphi$ $\quad$ (S_P) $H\varphi \to P\varphi$

- (G) $GG\varphi \to G\varphi$

$E(\mathfrak{F}_R) = E(\mathfrak{F}_W)$ z dodatkiem:

- (C) $(H\varphi \to FH\varphi) \wedge G(H\varphi \to FH\varphi)$
  $\wedge H(H\varphi \to FH\varphi) \to (H\varphi \to G\varphi)$

Uwaga! aksjomat (WF) odpowiada dobremu uporządkowaniu, $(D_F), (D_P)$ – dyskretności, (G) – gęstości, a (C) – ciągłości.

Dygresja: logika czasu stoików

Jeżeli do **Kt4** dodamy następujące aksjomaty:

- (T_F) $G\varphi \rightarrow \varphi$
- (Sym) $G\varphi \rightarrow H\varphi$

to otrzymamy logikę czasu kołowego. (T_F) odpowiada zwrotności, a (Sym) – symetrii $\mathcal{R}$. W systemie takim tezami są:

$G\varphi \leftrightarrow H\varphi \quad F\varphi \leftrightarrow P\varphi$

co prowadzi do utożsamienia przeszłości i przyszłości.

Wzmocnienie języka

1. Modalności temporalne (Diodorowska i Arystotelesowska):

$\Box\varphi := \varphi \wedge G\varphi \qquad \Diamond\varphi := \varphi \vee F\varphi$

$A\varphi := \varphi \wedge G\varphi \wedge H\varphi$

2. Następnik i poprzednik:

$\bigcirc\varphi$ – czytamy "w następnym momencie φ".

$\mathfrak{M}, t \vDash \bigcirc\varphi$ wtw $\mathfrak{M}, t' \vDash \varphi$ dla dowolnego $t' \in \mathcal{R}(t)$ takiego, że $\neg\exists t''(\mathcal{R}tt'' \wedge \mathcal{R}t''t')$

dualnie charakteryzujemy $*\varphi$ ("w poprzednim momencie").

3. "Since" i "Until":

$\varphi S \psi$ czytamy "zachodziło φ odkąd zaszło ψ"

$\mathfrak{M}, t \models \varphi S \psi$ wtw $\mathfrak{M}, t' \models \psi$ dla pewnego $t' \in \mathcal{R}^{-}(t)$ oraz $\mathfrak{M}, t'' \models \varphi$ dla każdego t'' takiego, że $\mathcal{R}t't''$ i $\mathcal{R}t''t'$

dualnie charakteryzujemy $\varphi U \psi$ ("będzie zachodzić φ aż zajdzie ψ").

Twierdzenie Kampa
W klasie liniowych i ciągłych struktur każdy funktor temporalny może być zdefiniowany z pomocą S i U.

Przykładowo:

$H\varphi := \neg(\top S \neg\varphi) \quad P\varphi := \top S \varphi$

$G\varphi := \neg(\top U \neg\varphi) \quad F\varphi := \top U \varphi$

Dygresja: The Master Argument

1. Wszystko co jest przeszłe i prawdziwe jest konieczne.

2. Niemożliwe nie wynika z możliwego.

3. Co ani nie jest, ani nie będzie, jest możliwe.

ZP: Każda możliwość kiedyś się zaktualizuje.

1. $P\varphi \rightarrow \Box P\varphi$

2. $\vdash \varphi \rightarrow \psi \ / \ \vdash \Diamond\varphi \rightarrow \Diamond\psi$

3. $\neg\varphi \wedge \neg F\varphi \wedge \Diamond\varphi$

($\neg 3 \leftrightarrow \neg\varphi \wedge \neg F\varphi \rightarrow \neg\Diamond\varphi$)

DC: $\varphi \wedge G\varphi \rightarrow PG\varphi$

Logiki epistemiczne i doksastyczne

Historia: Hintikka – Logic and belief

Standardowe języki dla tych logik są multimodalne, co przejawia się następująco:

- przyjmujemy przeliczalny zbiór podmiotów (agentów): $\{a, b, c, ...\}$

- dla każdego agenta a przyjmujemy funktor epistemiczny K_a

- dla każdego agenta a przyjmujemy funktor doksastyczny B_a

$K_a\varphi :=$ a wie, że φ

$B_a\varphi :=$ a wierzy, że (jest przekonany, że) φ

Warunki Hintikki dla logiki epistemicznej:

(RG_K) $\vdash \varphi \ / \ K_x\varphi$ – logiczna wszechwiedza

(K_K) $K_x(\varphi \to \psi) \to (K_x\varphi \to K_x\psi)$ – dedukcyjna wszechwiedza

(T_K) $K_x\varphi \to \varphi$ – Platoński ideał wiedzy

(4_K) $K_x\varphi \to K_xK_x\varphi$ – pozytywna introspekcja

(5_K) $\neg K_x\varphi \to K_x\neg K_x\varphi$ – negatywna introspekcja

Interaktywne warunki:

(Tr_K) $K_xK_y\varphi \to K_x\varphi$ – transmisja wiedzy

(S_K) $K_x\varphi \to K_y\varphi$ – zasada mądrzejszego

(O_K) $K_x\varphi \to K_yK_x\varphi$ – zasada śledczego

oczywiście (S_K) wynika z (Tr_K) i (O_K)

Warunki dla logiki doksastycznej

B_x charakteryzujemy analogiczne jak K_x (jest to również modalność typu $\Box$) ale zamiast (T) rozważać można co najwyżej:

(D_B) $B_x\varphi \to \neg B_x\neg\varphi$ – spójność przekonań

i ewentualnie osłabioną postać (T):

(WT_B) $B_x(B_x\varphi \to \varphi)$ – dobra wiara

odpowiada jej semantyczny warunek prawie-zwrotności:

$\forall xy(\mathcal{R}xy \to \mathcal{R}yy)$

Interakcja wiedzy i wiary (Krauss, Lehmann):

$K_x\varphi \to B_x\varphi$

$B_x\varphi \to K_xB_x\varphi$

Rozwiązania problemów logik epistemicznych/doksastycznych

- rezygnacja z formalizacji pojęcia ludzkiej wiedzy/wiary na rzecz interpretacji w terminach sztucznej inteligencji (agent o skończonej wiedzy i doskonałych kompetencjach logicznych)

- interpretacja w terminach wiedzy potencjalnej (apriorycznej) (agent kartezjański)

- interpretacja w terminach normatywnych (a powinien wiedzieć/wierzyć, że)

- interpretacja B_x w terminach akceptacji (przyjmowania do wiadomości)

- osłabienie logiki (bez (RG), (K), (5) itp.)

Uwaga: rezygnacja z aksjomatów (D), (T), (4), (5) to tylko odrzucenie pewnych własności relacji poznawczej osiągalności, ale eliminacja (RG) lub (K) wymaga znacznie poważniejszych modyfikacji:

- porzucenie klasy logik normalnych

- zmiana semantyki

Uogólnienie II – Podział logik modalnych

Uwaga: Logiki są tu rozumiane jako zbiory formuł domknięte na pewne operacje (reguły).

Definicja 14 (Logika modalna) *Przez logikę modalną* **L** *rozumiemy dowolny zbiór formuł w pewnym języku modalnym* **J**, *który spełnia następujące warunki:*

- *TAUT* $\subseteq$ **L**, *gdzie TAUT to zbiór tautologii* **KRZ**

- *jeżeli* $\varphi \in$ **L**, *to* $e(\varphi) \in$ **L**, *gdzie e to dowolny endomorfizm z* ZZ *w* $FOR($**J**$)$

- *jeżeli* $\varphi \in$ **L** *i* $\varphi \to \psi \in$ **L**, *to* $\psi \in$ **L**

Uwaga: Dla uproszczenia rozważań, ograniczymy się do <u>języka monomodalnego</u> z jednym funktorem konieczności ($\mathbf{J}_\Box$) (zakładamy, że $\Diamond$ jest wprowadzana przez definicję).

Rozważmy następujące reguły:

(RE) jeżeli $\varphi \leftrightarrow \psi \in$ **L**, to $\Box\varphi \leftrightarrow \Box\psi \in$ **L**

(RM) jeżeli $\varphi \rightarrow \psi \in$ **L** , to $\Box\varphi \rightarrow \Box\psi \in$ **L**

(RR) jeżeli $\wedge\Gamma \rightarrow \psi \in$ **L** , to $\wedge\Box\Gamma \rightarrow \Box\psi \in$ **L**, gdzie $\Gamma \neq \varnothing$

(RG) jeżeli $\varphi \in$ **L** , to $\Box\varphi \in$ **L**

Definicja 15 (Klasy logik modalnych) *Dowolna logika modalna* **L** *domknięta na (RE) to* logika kongruencyjna *(klasyczna modalna), domknięta na (RM) to* logika monotoniczna, *domknięta na (RR), to* logika regularna, *wreszcie domknięta na (RR) i (RG) to* logika normalna.

Lemat 1 (Relacje między logikami)

(a) Każda logika normalna jest zarazem regularna;

(b) Każda logika regularna jest zarazem monotoniczna ((RM) jest szczególnym przypadkiem (RR));

(c) Każda logika monotoniczna jest logiką kongruencyjną.

Definicja 16 (Bazowe logiki modalne) *Niech* **E** *oznacza najsłabszą logikę kongruencyjną,* **M** *– monotoniczną,* **R** *– regularną, a* **K** *– normalną.*

Definicja dowodu, tezy i dedukowalności bez zmian; $\vdash_L \varphi$ ($\Gamma \vdash_L \varphi$) oznacza, że φ jest tezą **L** (jest dedukowalne z Γ w **L**).

Semantyki dla słabszych logik modalnych

1. Monomodalne logiki regularne: semantyka relacyjna

Definicja 17 (Regularna struktura relacyjna)

Regularną strukturą relacyjną, albo ramą (frame) jest dowolna trójka $\mathfrak{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{Q}, \mathcal{R} \rangle$ gdzie:

- dziedzina to $\mathcal{W} \neq \varnothing$, który jest zbiorem punktów (światów możliwych);
- $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{W}$ to zbiór światów nienormalnych (queer)
- $\mathcal{R}$ to binarna relacja na $\mathcal{W}$, zwana relacją osiągalności.

Modelem na danej strukturze $\mathfrak{F}$ jest dowolny układ $\mathfrak{M} = \langle\, \mathfrak{F}, V \rangle$, gdzie V jest funkcją waluacji dla zmiennych, tj. V : $ZZ \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{W})$.

Definicję *spełniania formuły* φ *w punkcie* w *modelu* $\mathfrak{M}$ ($\mathfrak{M}, w \vDash \varphi$) wyrażają takie same warunki jak w modelach relacyjnych dla logik normalnych, jedynie dla funktorów modalnych mamy po parze warunków:

a) jeżeli $w \notin \mathcal{Q}$:

$\mathfrak{M}, w \vDash \Box\varphi$	wtw	$\mathfrak{M}, w' \vDash \varphi$ dla dowolnego w' takiego, że $\mathcal{R}ww'$
$\mathfrak{M}, w \vDash \Diamond\varphi$	wtw	$\mathfrak{M}, w' \vDash \varphi$ dla pewnego w' takiego, że $\mathcal{R}ww'$

b) jeżeli $w \in \mathcal{Q}$:

$\mathfrak{M}, w \nvDash \Box\varphi$
$\mathfrak{M}, w \vDash \Diamond\varphi$

Definicja 18 (Struktura otoczeniowa)

Strukturą otoczeniową jest dowolna para $\mathfrak{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{N} \rangle$ gdzie:

- dziedzina to $\mathcal{W} \neq \varnothing$, który jest zbiorem punktów (światów możliwych);

- $\mathcal{N}$ to funkcja z $\mathcal{W}$ w $\mathcal{PP}(\mathcal{W})$ ($\mathcal{N} : \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{PP}(\mathcal{W})$), zwana funkcją sąsiedztwa (inaczej: $\mathcal{N}(w) \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{W})$, dla każdego $w \in \mathcal{W}$).

$\mathcal{N}$ (od neighbourhood lub od necessary) jest to funkcja, która każdemu punktowi przyporządkowuje zbiór tych sądów, które są w nim konieczne.

Modelem na danej strukturze $\mathfrak{F}$ jest dowolny układ $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{F}, V \rangle$, gdzie V jest funkcją waluacji zmiennych. Zarówno definicja wartościowania zmiennych, jak i warunki spełniania w modelu dla wszystkich formuł za wyjątkiem modalnych są takie same jak w semantyce relacyjnej. Różnica dotyczy waluacji formuł modalnych;

$w \models \Box\varphi$ wtw $\|\varphi\| \in \mathcal{N}(w)$

$w \models \Diamond\varphi$ wtw $\| - \varphi\| \notin \mathcal{N}(w)$

Definicje prawdziwości w modelu, tautologiczności i wynikania bez zmian.

Intuicyjnie $\Box\varphi$ jest prawdziwe w punkcie w wtedy gdy sąd wyrażany przez φ jest w tym punkcie konieczny. Analogicznie, formuła jest w w możliwa wtedy gdy $\mathcal{N}(w)$ nie zawiera dopełnienia sądu wyrażanego przez tę formułę.

Charakteryzacja

E jest adekwatne względem klasy wszystkich modeli otoczeniowych.

M jest adekwatne względem klasy tych modeli otoczeniowych, które spełniają warunek:

(m) jeżeli $X \cap Y \in \mathcal{N}(w)$, to $X \in \mathcal{N}(w)$ i $Y \in \mathcal{N}(w)$

lub równoważnie

(m') jeżeli $X \subseteq Y$ i $X \in \mathcal{N}(w)$, to $Y \in \mathcal{N}(w)$

(c) jeżeli $X \in \mathcal{N}(w)$ i $Y \in \mathcal{N}(w)$, to $X \cap Y \in \mathcal{N}(w)$

(n) $\mathcal{W} \in \mathcal{N}(w)$

(d) jeżeli $X \in \mathcal{N}(w)$, to $-X \notin \mathcal{N}(w)$

(t) jeżeli $X \in \mathcal{N}(w)$, to $w \in X$

(4) jeżeli $X \in \mathcal{N}(w)$, to $\{w' : X \in \mathcal{N}(w')\} \in \mathcal{N}(w)$

Klasa modeli otoczeniowych spełniających warunki (m) i (c) daje nam najsłabszą logikę regularną **R**, a po zawężeniu do modeli spełniających dodatkowo warunek (n) otrzymujemy otoczeniową charakteryzację **K**. (d), (t) i (4) charakteryzują modele otoczeniowe spełniające aksjomaty: (D), (T) i (4).

MODALNE LOGIKI 1-GO RZĘDU

Problemy wstępne.

W przeciwieństwie od **KRZ** zdaniowe logiki modalne można poszerzyć na wiele sposobów. Wybór danej opcji wymaga wstępnego rozwiązania kilku kwestii:

1. czy w różnych światach możliwych te same obiekty czy różne?

2. jeżeli te same obiekty, to czy obecne we wszystkich światach? (czy w każdym świecie możliwym ta sama dziedzina?)

3. czy w każdym świecie możliwym nazwy mają mieć taką samą denotację czy różne?

4. czy każda nazwa ma mieć desygnat w każdym świecie?

Typowe rozstrzygnięcia.

ad 1.

- "realizm" D. Lewisa – każdy świat ma inną dziedzinę $\Longrightarrow$ teoria odpowiedników; zarzuty:
  - nieintuicyjność
  - problemy techniczne z formalnym ujęciem relacji odpowiedniości
- te same obiekty w różnych światach $\Longrightarrow$ rozwiązanie bardziej intuicyjne i technicznie prostsze w konstrukcji semantyki

ad 2.

- stała dziedzina modelu – każdy świat ma te same obiekty tylko o różnych cechach; rozwiązanie technicznie prostsze (kwantyfikacja klasyczna) ale nieintuicyjne przy tradycyjnej interpretacji kwantyfikatorów (moc egzystencjalna), możliwe rozwiązanie $\Longrightarrow$ possybilizm

- zmienne dziedziny – każdy świat ma swoją dziedzinę obiektów w nim istniejących (aktualizm); rozwiązanie bardziej intuicyjne i zgodne z tradycyjną interpretacją kwantyfikatorów ale technicznie bardziej skomplikowane $\Longrightarrow$ logika wolna (**WRK**) ad 3.

- sztywna denotacja – każda nazwa ma ten sam desygnat w każdym świecie; rozwiązanie technicznie prostsze, ale nieintuicyjne $\Longrightarrow$ kłopoty z identycznością, deskrypcjami określonymi

- ruchoma denotacja – nazwa może zmieniać desygnat w różnych światach; rozwiązanie bardziej intuicyjne ale technicznie bardziej skomplikowane

ad 4.

rozróżnienie istnienia obiektu i denotacji nazwy $\Longrightarrow$ logika nazw pustych

Motywy dla wprowadzenia logiki wolnej

Problemy z **KRK** i **KRKI**:

a. wąskie rozumienie nazw

b. egzystencjalna moc kwantyfikatorów prowadzi do wielu niepożądanych konsekwencji:

- nie można sformalizować zdań typu: "Pewne rzeczy nie istnieją.", "Coś istnieje."

- tezy **KRK** $Aa \to \exists x Ax$, $\forall x Ax \to Aa$ wymuszają egzystencjalną moc dla nazw a $\forall x Ax \to \exists x Ax$ wymusza niepustość dziedziny

- tezy **KRKI** $\exists x(x = a)$ wymuszają istnienie dowolnych obiektów (np. Boga), natomiast formalizacja jakigokolwiek zdania o nieistnieniu obiektu fikcyjnego daje sprzeczność

Możliwe strategie radzenia sobie z problemami:

1. traktować nazwy o nieustalonym statusie jako predykaty, wtedy można zapisać zdania zarówno o istnieniu jak i nieistnieniu np. Boga ($\exists x Bx, \neg\exists x Bx$) i nie są to tezy lub zdania kontradyktoryczne

2. użyć teorii deskrypcji Russella aby wyeliminować kłopotliwe nazwy

3. odrzucić tradycyjną interpretację kwantyfikatorów (moc egzystencjalna)

4. zrezygnować z **KRK** na rzecz logiki wolnej **WRK**

Wady rozwiązań 1-2

a. Komplikacja przekładu z języka naturalnego, poza tym zdania typu: "Pewne rzeczy nie istnieją.", "Coś istnieje." nadal nie do zapisania

b. Brak kryteriów uznania, które nazwy traktować jako termy, a które jako predykaty $\Longrightarrow$ Quine: całkowita eliminacja nazw – tylko zmienne

c. Niepożądane konsekwencje logiczne, np. ze zdania "Pegaz nie istnieje.":

– przy strategii 1 wynika wprawdzie zdanie "Pegaz jest skrzydlaty." ale również "Pegaz jest ropuchą.", gdyż $\neg\exists x Px \models \forall x(Px \rightarrow Ax)$

– przy strategii 2 wynika wprawdzie zdanie "Pegaz nie jest ropuchą." ale również "Pegaz nie jest skrzydlaty.", gdyż $\neg\exists x Px \models \neg\exists x(Px \wedge \forall y(Py \rightarrow x = y) \wedge Ax)$

Rozwiązanie 3:

$\exists x$ czytamy "dla pewnego (możliwego) x", $\forall x$ – "dla każdego możliwego x"

Zalety:

a. jeżeli dodamy predykat istnienia E, to zdania typu: "Pewne rzeczy nie istnieją.", "Coś istnieje." można zapisać: $\exists x \neg Ex$, $\exists x Ex$

b. możliwe jest operowanie (niektórymi) nazwami pustymi (teza $\forall x Ax \to Aa$ nie wymusza istnienia desygnatu a)

c. teza $\exists x(x = a)$ stwierdza tylko możliwość istnienia desygnatu a, dopiero kontyngentna formuła Ea stwierdza jego istnienie

(Ewentualne) Wady:

a. niezgodne z tradycją czytanie kwantyfikatorów (np. kryterium istnienia Quine'a)

b. traktowanie istnienia jako predykatu niezgodne z silną tradycją filozoficzną

c. akceptacja possybiliów (przedmiotów możliwych) jako przedmiotu rozważań

d. przesądzenie o możliwości istnienia desygnatu dowolnej nazwy (np. nazwy "Bóg")

e. nazwy przedmiotów sprzecznych nadal nie mogą być traktowane jako termy

Rozwiązanie 4: logiki wolne **WRK**

a. egzystencjalna moc kwantyfikatorów zachowana, ale nazw nie ($\forall x Ax \to Aa$, $\exists x(x = a)$ nie są tezami!) – co umożliwia bardziej naturalny przekład z języka polskiego (dowolne nazwy jako termy, egzystencjalne czytanie zwrotów kwantyfikatorowych)

b. w logice wolnej z identycznością (**WRKI**) predykat istnienia jest definiowalny:

$Ea := \exists x(x = a)$

c. reguły logiki wolnej bardziej skomplikowane niż **KRK**, ale z pewnego punktu widzenia (aktualizm) bardziej naturalne

Elementarna logika wolna – język

Do standardowego języka zdaniowego dodajemy:

- przeliczalny zbiór zmiennych nazwowych $ZN = \{x, y, ...\}$
- przeliczalny zbiór (sztywnych) stałych nazwowych $CON = \{a, b, c, ...\}$
- przeliczalny zbiór symboli predykatów $PRED = \{A, B, C, ...\}$
- predykat istnienia: E
- kwantyfikatory: $\forall, \exists$

Zbiór termów to $ZN \cup CON$

Elementarna logika wolna – reguły DN

Do systemu DN Słupeckiego, Borkowskiego dla **KRZ** należy dodać następujące reguły dla kwantyfikatorów:

($E\exists$) $\exists x\varphi$ / Ea, $\varphi(x/a)$, gdzie a to nowa stała nazwowa

($D\exists$) $E\tau$, $\varphi(x/\tau)$ / $\exists x\varphi$, gdzie τ to dowolny term

($E\forall$) $\forall x\varphi, E\tau$ / $\varphi(x/\tau)$, gdzie τ to dowolny term

($D\forall$) jeżeli z (egzystencjalnego) założenia dodatkowego Ea, gdzie a to nowa stała nazwowa w dowodzie, dedukujemy $\varphi(x/a)$, to zamykamy poddowód i do dowodu nadrzędnego dopisujemy $\forall x\varphi$ (gdzie x nie jest wolne w założeniach) dowody w **WRK**:

$\vdash \forall x(\forall y Ay \to Ax)$, $\vdash \forall x(Ax \to \exists y Ay)$

1.1.	Ea	ze
1.1.1.	$\forall y Ay$	zd
1.1.2.	Aa	(1.1, 1.1.1, $E\forall$)
1.2.	$\forall y Ay \to Aa$	(1.1.1 − 1.1.2, $D \to$)
2.	$\forall x(\forall y Ay \to Ax)$	(1.1 − 1.2, $D\forall$)

$\vdash \exists x Ax \leftrightarrow \neg\forall x \neg Ax$, $\vdash \forall x Ax \leftrightarrow \neg\exists x \neg Ax$

1.	$\neg\forall x \neg Ax$	z
2.	$\neg\exists x Ax$	zn
2.1.	Ea	ze
2.1.1.	Aa	zd
2.1.2.	$\exists x Ax$	(2.1, 2.1.1, $D\exists$)
2.1.3.	$\perp$	(2, 2.1.2)
2.2.	$\neg Aa$	(2.1.1 − 2.1.3, DNW)
3.	$\forall x \neg Ax$	(2.1 − 2.2, $D\forall$)
4.	$\perp$	(1, 3)

Komentarze:

a. Otrzymany system to logika inkluzywna (dopuszczająca puste dziedziny w modelach); jeżeli chcemy mieć logikę wykluczającą puste dziedziny w modelach, to musimy dodać aksjomat $\exists x E x$

b. Jeżeli chcemy otrzymać **KRK**, to wystarczy dodać schemat aksjomatu $E\tau$, dla dowolnego termu τ

c. Na bazie udowodnionych tez do systemu DN dla **WRK** dodajmy reguły wtórne DeMorgana:

- $\neg\forall x\varphi \; // \; \exists x\neg\varphi$

- $\neg\exists x\varphi \; // \; \forall x\neg\varphi$

Systemy DN dla logiki modalnej z kwantyfkatorami

3 rozwiązania:

a. dodanie powyższych reguł do systemu DN dla modalnej logiki **L** daje system aktualistycznej logiki modalnej z kwantyfikatorami (**WRK+L**)

b. dodanie zwykłych reguł klasycznych DN do systemu modalnego daje system possybilistycznej logiki modalnej z kwantyfikatorami (**KRK+L**)

Uwaga: aby odróżnić kwantyfikatory possybilistyczne wprowadzimy dla nich osobne symbole: $\bigvee x$ – dla pewnego możliwego x, $\bigwedge x$ – dla każdego możliwego x

c. dodanie obu rodzajów kwantyfikatorów wraz z charakteryzującymi je regułami DN daje system pełnej logiki modalnej z kwantyfikatorami (**RK+L**)

Dowód tezy w **WRK+T**

$\vdash \Box\forall x(Ax \vee Bx) \rightarrow (\Diamond\forall xAx \vee \Diamond\exists xBx)$

1.	$\Box\forall x(Ax \vee Bx)$	z
2.	$\neg(\Diamond\forall xAx \vee \Diamond\exists xBx)$	zn
3.	$\neg\Diamond\forall xAx \wedge \neg\Diamond\exists xBx$	(2, NA)
4.	$\neg\Diamond\forall xAx$	(3, $E\wedge$)
5.	$\neg\Diamond\exists xBx$	(3, $E\wedge$)
6.	$\Box\neg\forall xAx$	(4, $Dual$)
7.	$\Box\neg\exists xBx$	(5, $Dual$)
8.	$\Box\exists x\neg Ax$	(6, MOD, DeM)
9.	$\Box\forall x\neg Bx$	(7, MOD, DeM)
10.	$\Box Ea$	(8, MOD, $E\exists$)
11.	$\Box\neg Aa$	(8, MOD, $E\exists$)
12.	$\Box(Aa \vee Ba)$	(1, 10, MOD, $E\forall$)
13.	$\Box\neg Ba$	(9, 10, MOD, $E\forall$)
14.	$\Box Ba$	(11, 12, MOD, $E\vee$)
15.	$\neg Ba$	(13, $E\Box$)
16.	Ba	(14, $E\Box$)
17.	$\perp$	(15, 16)

Dlaczego kwantyfikatory klasyczne należy na gruncie logiki modalnej rozumieć possybilistycznie?

Formuła Barcan (BF): $\bigwedge x \Box Ax \rightarrow \Box \bigwedge x Ax$ lub $\Diamond \bigvee x Ax \rightarrow \bigvee x \Diamond Ax$

Konwers formuły Barcan (CBF):
$\Box \bigwedge x Ax \rightarrow \bigwedge x \Box Ax$ lub $\bigvee x \Diamond Ax \rightarrow \Diamond \bigvee x Ax$

Twierdzenie: zarówno (BF) jak i (CBF) są tezami **KRK+K**

1.	$\bigwedge x \Box Ax$	z
2.	$\Box Ax$	(1, $E\bigwedge$)
3.	$\Box \bigwedge x Ax$	(2, MOD, $D\bigwedge$)

1.	$\Box \bigwedge x Ax$	z
2.	$\Box Ax$	(1, MOD, $E\bigwedge$)
3.	$\bigwedge x \Box Ax$	(2, $D\bigwedge$)

Obie tezy przy egzystencjalnej interpretacji kwantyfikatorów dają paradoksalne interpretacje

Semantyka relacyjna

Modele to struktury o postaci $\mathfrak{M} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, D, d, V \rangle$, gdzie $\mathcal{W}, \mathcal{R}$ to standardowa rama modalna, D to niepusta dziedzina modelu, a $d : W \longrightarrow \mathcal{P}(D)$ to funkcja, która każdemu światu przypisuje zbiór obiektów, które w nim istnieją.
V jest definiowane następująco:

– $V(a) \in D$, dla każdej stałej nazwowej

– $V(A^n) \subseteq D^n \times \mathcal{W}$, dla dowolnego n-argumentowego predykatu

Podstawienie zmiennych v definiujemy jako funkcję $v : ZN \longrightarrow D$

Interpretacja I termu τ w modelu przy danym podstawieniu jest definiowana następująco:

$I(x) = v(x) \qquad I(a) = V(a)$

Dodatkowe klauzule dla spełniania formuły w modelu przy danym podstawieniu mają postać:

$\mathfrak{M}, v, w \models A^n(\tau_1, ..., \tau_n)$ wtw $\langle I(\tau_1), ..., I(\tau_n), w\rangle \in V(A^n)$

$\mathfrak{M}, v, w \models E\tau$ wtw $I(\tau) \in d(w)$

$\mathfrak{M}, v, w \models \forall x\varphi$ wtw $\mathfrak{M}, v^x_o, w \models \varphi$ dla każdego $o \in d(w)$

$\mathfrak{M}, v, w \models \exists x\varphi$ wtw $\mathfrak{M}, v^x_o, w \models \varphi$ dla pewnego $o \in d(w)$

$\mathfrak{M}, v, w \models \bigwedge x\varphi$ wtw $\mathfrak{M}, v^x_o, w \models \varphi$ dla każdego $o \in D$

$\mathfrak{M}, v, w \models \bigvee x\varphi$ wtw $\mathfrak{M}, v^x_o, w \models \varphi$ dla pewnego $o \in D$

IDENTYCZNOŚĆ

1. Filozoficzny problem kryteriów tożsamości obiektów w różnych światach (problem TI – transworld identity).

- czy mówienie o tym samym obiekcie w różnych światach ma sens? – realizm pojęciowy Lewisa

- jak identyfikujemy ten sam obiekt w różnych światach?

  – czy istnieje istota indywidualna (haecceitas) gwarantująca zachowanie tożsamości? – Kaplan

  – czy jest to źle postawiony problem? – Kripke

2. Techniczny problem nieadekwatności reguł dla identyczności.

Reguła Leibniza $a = b,\ \varphi \ /\ \varphi[a//b]$ prowadzi do problemów w kontekstach intensjonalnych:

(Frege): Gwiazda poranna to gwiazda wieczorna. Starożytni wiedzieli, że gwiazda poranna to gwiazda poranna. / Starożytni wiedzieli, że gwiazda poranna to gwiazda wieczorna.

$a = b,\ K(a = a)\ \models\ K(a = b)$

(Quine): Liczba planet wynosi 9. 9 jest koniecznie większe od 7. / Liczba planet jest koniecznie większa od 7.

$a = 9,\ \Box(9 > 7)\ \models\ \Box(a > 7)$

Możliwe rozwiązania:

1. modyfikacja przekładu

2. ograniczenie reguły Leibniza

3. odrzucenie sztywnej denotacji dla nazw w semantyce

ad 1.

Dwie możliwości: potraktować kłopotliwe nazwy nie jako termy (por. omówione wyżej dwie strategie eliminacji nazw, zwłaszcza deskrypcji określonych i ich wady) lub uwzględnić dwie możliwe interpretacje modalności – de dicto i de re.

De re / de dicto

Niewłaściwy przekład z powodu nierozróżniania modalności de dicto / de re. Np. zdanie "Coś koniecznie istnieje." jest dwuznaczne; można je wyrazić jako zdanie modalne:

– de dicto $\Box\exists x Ex$ (tautologia w logice modeli z dziedzinami niepustymi)

– de re $\exists x \Box Ex$ (kontrowersyjne twierdzenie o istnieniu bytu koniecznego)

Jeżeli zdanie "Liczba planet jest koniecznie większa od 7." zinterpretujemy de re – pewna liczba jest liczbą planet i ta liczba (tj. 9) jest koniecznie większa od 7 (czyli $\exists x(x = a \wedge \Box(x > 7))$) – to wprawdzie nadal wynika ono z podanych przesłanek, ale nie wydaje się dłużej fałszywe.

Zarzuty:

Quine: modalności de re implikują esencjalizm.

Zarzut Quine'a, że wprowadzanie modalności de re jest wyrazem esencjalizmu jest chybiony; logika modalna 1-go rzędu pozwala jedynie mówić o koniecznych własnościach obiektów, nie przesądza czy takie są. To stanowi raczej o jej sile, gdyż krytyka z pozycji filozoficznych nie powinna dążyć do likwidacji zjawisk językowych, których istnienie jest niekwestionowalne. Logika modalna z kwantyfikatorami pozwala wyrażać różne stanowiska filozoficzne będąc względem nich neutralna.

A poza tym, kto powiedział, że esencjalizm jest bezwartościowy :-)

Jednak rozróżnienie de re / de dicto nie rozwiązuje wszystkich problemów.

logika modalna z kwantyfikatorami i identycznością prowadzi do uznania wszystkich identyczności (i nieidentyczności) za konieczne, gdyż łatwo w niej dowieść:

- $a = b \rightarrow \Box(a = b)$

- $\neg(a = b) \rightarrow \Box\neg(a = b)$

a co z identycznościami kontyngentnymi?

Możliwe reakcje:

a. Fitting: obie tezy są poprawne przy zmiennych, ale nie przy stałych nazwowych. Reguła Leibniza powinna być ograniczona tylko do zmiennych

b. Kripke: obie tezy poprawne również przy stałych, ale tylko gdy reprezentują one imiona własne, bo te należy uznać za "sztywne desygnatory" (por. jego rozwiązanie problemu TI). Ich występowanie pokazuje, że oprócz zdań koniecznych a priori mamy też zdania konieczne a posteriori.

Aby wyeliminować takie tezy należy:

– ograniczyć regułę Leibniza do zdań atomowych

– zmodyfikować semantykę wprowadzając zmienną denotację dla nazw

LOGIKA INTUICJONISTYCZNA

Historia:

1907 – L. Brouwer, początek ruchu intuicjonistycznego

1925 – Kołmogorov, 1930 – A. Heyting – aksjomatyczna konstrukcja logiki **INT**

lata 30-te – K. Goedel, S. Jaśkowski – semantyka matrycowa dla **INT**, G. Gentzen – teoriodowodowa konstrukcja **INT**

lata 60-te – E. Beth, S. Kripke – semantyka relacyjna dla **INT**

Motywacje: Konstruktywizm jako reakcja na dominujący w filozofii matematyki realizm pojęciowy i nominalizm (formalizm, szkoła Hilberta). Sprowadzenie prawdy matematycznej do dowiedlności – zakwestionowanie zasady 2-wartościowości.

Założenia intuicjonizmu:

- kryterium istnienia obiektów matematycznych jest ich konstruowalność (niesprzeczność to warunek konieczny ale nie wystarczający!)

- matematykę należy oprzeć na pierwotnej intuicji ciągu liczb naturalnych oraz intuicyjnej oczywistości zasady indukcji matematycznej

Nowa wizja matematyki prowadzi do zakwestionowania tych środków logiki, które umożliwiają niekonstruktywne dowody m.in. pewnych form dowodu niewprost, tez o postaci: $\neg\varphi \vee \varphi$, $\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$, $\neg\forall x\varphi \rightarrow \exists x\neg\varphi$, $\neg\forall x\neg\varphi \rightarrow \exists x\varphi$, $\neg\exists x\neg\varphi \rightarrow \forall x\varphi$.

Teorio-dowodowa interpretacja znaczenia stałych logicznych INT

$\vdash \varphi \wedge \psi$ wtw $\vdash \varphi$ i $\vdash \psi$

$\vdash \varphi \vee \psi$ wtw $\vdash \varphi$ lub $\vdash \psi$

$\vdash \varphi \rightarrow \psi$ wtw jeżeli $\vdash \varphi$, to $\vdash \psi$

$\vdash \neg\varphi$ wtw $\vdash \varphi \rightarrow \bot$

$\vdash \exists x\varphi$ wtw $\vdash \varphi(x/a)$ dla pewnego a

Semantyka relacyjna dla IRZ

Definicja 19 (Struktura relacyjna)

Strukturą relacyjną, albo ramą (frame) jest dowolna para $\mathfrak{F} = \langle\ \mathcal{S}, \leq \rangle$ gdzie:

- dziedzina to $\mathcal{S} \neq \varnothing$, który jest zbiorem punktów (stanów wiedzy);
- $\leq$ to binarna relacja na $\mathcal{S}$, zwana relacją dziedziczenia (wiedzy), spełniająca warunek: zwrotności i przechodniości.

Definicja 20 (Model na strukturze) *Modelem na danej strukturze $\mathfrak{F}$ jest dowolny układ $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{F}, V \rangle$, gdzie V jest funkcją waluacji dla zmiennych, tj. $V : ZZ \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{S})$, spełniającą warunek dziedziczenia prawdziwości zmiennych:*

jeżeli $s \in V(p)$ i $s \leq s'$, to $s' \in V(p)$

Definicję *spełniania formuły φ w punkcie s modelu $\mathfrak{M}$* ($\mathfrak{M}, s \models \varphi$) wyrażają poniższe warunki:

$\mathfrak{M}, s \models \varphi$	wtw	$s \in V(\varphi)$ dla dowolnej $\varphi \in ZZ$
$\mathfrak{M}, s \models \neg\varphi$	wtw	$\mathfrak{M}, s' \not\models \varphi$ dla dowolnego s' takiego, że $s \leq s'$
$\mathfrak{M}, s \models \varphi \wedge \psi$	wtw	$\mathfrak{M}, s \models \varphi$ i $\mathfrak{M}, s \models \psi$
$\mathfrak{M}, s \models \varphi \vee \psi$	wtw	$\mathfrak{M}, s \models \varphi$ lub $\mathfrak{M}, s \models \psi$
$\mathfrak{M}, s \models \varphi \rightarrow \psi$	wtw	$\mathfrak{M}, s' \not\models \varphi$ lub $\mathfrak{M}, s' \models \psi$ dla dowolnego $s' \geq s$

Twierdzenie o dziedziczeniu prawdy:
jeżeli $s \models \varphi$ i $s \leq s'$, to $s' \models \varphi$

Dla zbiorów formuł zapis $\mathfrak{M}, s \models \Gamma$ oznacza, że $\mathfrak{M}, s \models \psi$ dla $\forall_{\psi \in \Gamma}$.

$\mathfrak{M}, s \not\models \varphi$ oznacza fałszywość formuły φ w s; $\mathfrak{M}, s \not\models \Gamma$ oznacza fałszywość co najmniej jednego elementu Γ w s.

W przypadku gdy model jest ustalony, bądź domyślny będziemy po prostu pisać $s \models \varphi$ (względnie $s \not\models \varphi$) lub $s \models \Gamma$ (względnie $s \not\models \Gamma$) dla zbioru.

Zbiór wszystkich punktów spełniających daną formułę (zbiór) oznaczamy:

$\|\varphi\|_{\mathfrak{M}} = \{s \in \mathcal{S}_{\mathfrak{M}} : s \models \varphi\}$;

$\|\Gamma\|_{\mathfrak{M}} = \bigcap \|\psi\|_{\mathfrak{M}}$ dla $\forall_{\psi \in \Gamma}$

Zazwyczaj używać będziemy notacji skróconej $\|\varphi\|$ ($\|\Gamma\|$) przy $\mathfrak{M}$ domyślnym lub ustalonym.

Definicja 21 (Spełnialność, falsyfikowalność) φ (Γ) *jest spełnialna w modelu* $\mathfrak{M}$ *wtw,* $\|\varphi\| \neq \varnothing$ ($\|\Gamma\| \neq \varnothing$).

φ (Γ) *jest spełnialna wtw, istnieje model, w którym jest spełnialna.*

φ (Γ) *jest sfalsyfikowana w modelu* $\mathfrak{M}$ *wtw,* $\|\varphi\| \neq \mathcal{S}_{\mathfrak{M}}$ ($\|\Gamma\| \neq \mathcal{S}_{\mathfrak{M}}$) (*inaczej:* $\mathfrak{M}$ *falsyfikuje* φ (Γ)).

φ (Γ) *jest sfalsyfikowana wtw, istnieje model, w którym jest sfalsyfikowana.*

Definicja spełniania formuły (czy zbioru formuł) w modelu daje nam *lokalną* charakterystykę prawdziwości. Dalszym krokiem jest wprowadzenie pojęcia *globalnej prawdziwości*:

Definicja 22 (Prawdziwość w modelu)

$\mathfrak{M} \models \varphi$ wtw, $\forall_{s \in \mathcal{S}_{\mathfrak{M}}}, \mathfrak{M}, s \models \varphi$
(lub $\|\varphi\|_{\mathfrak{M}} = \mathcal{S}_{\mathfrak{M}}$);

analogicznie dla Γ, $\mathfrak{M} \models \Gamma$ wtw, $\|\Gamma\|_{\mathfrak{M}} = \mathcal{S}_{\mathfrak{M}}$.

Trzeci poziom prawdziwości to tautologiczność, czyli prawdziwość w każdym modelu.

Definicja 23 (Prawdziwość w każdym modelu)

$$\models \varphi \ wtw, \ \forall_{\mathfrak{M}}, \mathfrak{M} \models \varphi$$

$\not\models \varphi$ oznacza formułę nietautologiczną, czyli falsyfikowalną.

Wynikanie w INT

Definicja 24 (Wynikanie lokalne i globalne)

1. φ <u>wynika lokalnie</u> z Γ:

$\Gamma \models \varphi$ wtw, $\forall_{\mathfrak{M} \in MOD}(\|\Gamma\|_{\mathfrak{M}} \subseteq \|\varphi\|_{\mathfrak{M}})$ (inaczej: $\forall_{\mathfrak{M} \in MOD}, \forall_{s \in \mathcal{S}_{\mathfrak{M}}}$(jeżeli $\mathfrak{M}, s \vDash \Gamma$, to $\mathfrak{M}, s \vDash \varphi$))

2. φ <u>wynika globalnie</u> z Γ:

$\Gamma \mid\models \varphi$ wtw $\forall_{\mathfrak{M} \in MOD}$(jeżeli $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$, to $\mathfrak{M} \vDash \varphi$))

Twierdzenie 2 *Jeżeli $\Gamma \models \varphi$, to $\Gamma \mid\models \varphi$, ale nie odwrotnie.*

Lemat 1: ważne własności IRZ:

- **IRZ** $\subset$ **KRZ**
- $\varphi \in$ **KRZ** wtw $\neg\neg\varphi \in$ **IRZ**
- $\varphi \vee \psi \in$ **IRZ** wtw $\varphi \in$ **IRZ** lub $\psi \in$ **IRZ**
- $\Gamma, \varphi \models \psi$ wtw $\Gamma \models \varphi \to \psi$
- $\Gamma, \varphi \models \bot$ wtw $\Gamma \models \neg\varphi$
- jeżeli $\Gamma \models \varphi$, to $\Gamma, \neg\varphi \models \bot$

zestawienie ważniejszych tautologii KRZ, z których nie wszystkie należą do IRZ:

$\models$	$\not\models$
$p \rightarrow p$	
$\neg(p \wedge \neg p)$	$\neg p \vee p$
$p \rightarrow \neg\neg p$	$\neg\neg p \rightarrow p$
$(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$	$(\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p)$
$(p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow \neg p)$	$(\neg p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow p)$
$(p \rightarrow q) \wedge \neg q \rightarrow \neg p$	
$\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$	
$\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge q)$	$\neg(p \wedge q) \rightarrow \neg p \vee \neg q$
$p \wedge \neg q \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg q)$	$\neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow p \wedge \neg q$
$\neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg\neg p \wedge \neg q$	
$\neg p \vee q \rightarrow (p \rightarrow q)$	$(p \rightarrow q) \rightarrow \neg p \vee q$
$\neg p \rightarrow q \leftrightarrow p \vee q$	
$p \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$	
	$((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$
	$(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$

Etykietowane diagramy Betha dla IRZ

Konwencje zapisu

α	α_1	α_2	β	β_1	β_2
$+\varphi \wedge \psi$	$+\varphi$	$+\psi$	$-\varphi \wedge \psi$	$-\varphi$	$-\psi$
$-\varphi \vee \psi$	$-\varphi$	$-\psi$	$+\varphi \vee \psi$	$+\varphi$	$+\psi$

Definicja 25 (Etykiety)

1. 1 $\in$ET

2. Jeżeli σ $\in$ET, to $\sigma.k$ $\in$ET

$\sigma.k$ denotuje etykietę, której ostatni element to k

Intuicyjnie: $\sigma \leq \sigma'$ wtw $\sigma' = \sigma$ lub $\sigma' = \sigma.\tau$, gdzie τ to skończony ciąg liczb naturalnych

Definicja 26 (Formuły etykietowane) *Jeżeli* $\varphi \in FOR(\mathbf{IRZ})$ *a* $\sigma \in$*ET, to* $\sigma : +\varphi$ *i* $\sigma : -\varphi$ *są formułami etykietowanymi.*

Intuicyjnie $\sigma : +\varphi$ *oznacza, że* φ *jest spełnione w modelu w punkcie* σ *a* $\sigma : -\varphi$*, że* φ *jest fałszywa w* σ*.*

Definicja φ ma dowód w **IRZ**-EDB wtw istnieje zamknięte drzewo dla $1 : -\varphi$ zbudowane z użyciem reguł podanych niżej.

Adekwatność etykietowanych diagramów Betha

Twierdzenie $\models_{IRZ} \varphi$ wtw $1 : -\varphi$ ma dowód w **IRZ**-EDB

Twierdzenie (Mocna adekwatność):

$\Gamma \models \varphi\ wtw,\ \{1 : +\psi_1,\ ...,\ 1 : +\psi_n,\ 1 : -\varphi\}$ ma dowód w **IRZ**-EDB

gdzie $\{\psi_1, ..., \psi_n\} \subseteq \Gamma$

Reguły IRZ

$(\bot)$ $\sigma : +\varphi$, $\sigma : -\varphi$ / $\bot$

$(\neg-)$ $\sigma : -\neg\varphi$ / $\sigma.k : +\varphi$, gdzie $\sigma.k$ jest nową etykietą

$(\neg+)$ $\sigma : +\neg\varphi$ / $\sigma : -\varphi$

(α) $\sigma : \alpha$ / $\sigma : \alpha_1$, $\sigma : \alpha_2$

(β) $\sigma : \beta$ / $\sigma : \beta_1 \mid \sigma : \beta_2$

$(\rightarrow -)$ $\sigma : -\varphi \rightarrow \psi$ / $\sigma.k : +\varphi$, $\sigma.k : -\psi$, gdzie $\sigma.k$ jest nową etykietą

$(\rightarrow +)$ $\sigma : +\varphi \rightarrow \psi$ / $\sigma : -\varphi, \mid \sigma : +\psi$

$(+)$ $\sigma : +\varphi$ / $\sigma.k : +\varphi$, gdzie $\sigma.k$ jest dowolną etykietą

Przykład dowodu (drzewo zamknięte)

$1 : -\neg(p \to q) \to \neg\neg p \wedge \neg q$

$1.1 : +\neg(p \to q)$

$1.1 : -\neg\neg p \wedge \neg q$

$1.1 : -p \to q$

$1.1.1 : +p$

$1.1.1 : -q$

$1.1.1 : +\neg(p \to q)$

$1.1.1 : -p \to q$

$1.1 : -\neg\neg p$	$1.1 : -\neg q$
$1.1.2 : +\neg p$	$1.1.2 : +q$
$1.1.2 : +\neg(p \to q)$	$1.1.2 : +\neg(p \to q)$
$1.1.2 : -p \to q$	$1.1.2 : -p \to q$
$1.1.2.1 : +p$	$1.1.2.1 : +p$
$1.1.2.1 : -q$	$1.1.2.1 : -q$
$1.1.2.1 : +\neg p$	$1.1.2.1 : +q$
$1.1.2.1 : -p$	$\perp$
$\perp$	

Relacje między **IRZ** a **S4**

Niech $\Im$ będzie funkcją przekładu z FOR(**IRZ**) w FOR(**S4**) zdefiniowaną natępująco:

$$
\begin{array}{rcl}
\Im(p) & = & \Box p \\
\Im(\varphi \wedge \psi) & = & \Im(\varphi) \wedge \Im(\psi) \\
\Im(\varphi \vee \psi) & = & \Im(\varphi) \vee \Im(\psi) \\
\Im(\varphi \rightarrow \psi) & = & \Box(\Im(\varphi) \rightarrow \Im(\psi)) \\
\Im(\neg\varphi) & = & \Box\neg\Im(\varphi)
\end{array}
$$

Twierdzenie: $\models_{IRZ} \varphi$ wtw $\models_{S4} \Im(\varphi)$

Dedukcja Naturalna dla IRZ

Do systemu DN Słupeckiego/Borkowskiego należy wprowadzić dwie modyfikacje:

1. dowód niewprost można przeprowadzić tylko dla tezy o postaci: $\varphi_1 \to (\varphi_2 \to ...(\varphi_n \to \neg\psi)...)$

– jako założenie niewprost wprowadzamy ψ

2. jeżeli do dowodu wprowadzamy dodatkowe założenie niewprost φ, to po zamknięciu poddowodu (pojawienie się sprzeczności), dołączamy do dowodu nadrzędnego zawsze $\neg\varphi$ (nawet jeżeli φ jest formułą zanegowaną i daje to w wyniku formułę poprzedzoną dwiema negacjami)

NIEKLASYCZNE IMPLIKACJE

Kłopotliwe tezy i reguły logiki klasycznej (w tym tzw. paradoksy implikacji materialnej)

- $(p \to q) \vee (q \to p)$, $(p \to q) \vee p$
- $p \to (q \to p)$ lub $\varphi \vdash \psi \to \varphi$
- $p \to (\neg p \to q)$, $p \wedge \neg p \to q$ lub $\bot \to \varphi$ lub $\varphi, \neg\varphi \vdash \psi$
- $p \to (q \to q)$, $p \to q \vee \neg q$ lub $\varphi \to \top$
- $\varphi \to \psi \vdash \varphi \wedge \chi \to \psi$ (OP)
- $\varphi \to \psi \vdash \neg\psi \to \neg\varphi$ (TR)
- $\varphi \to \psi, \psi \to \chi \vdash \varphi \to \chi$ (SH)

Przykłady:

Gdyby Kowalski nie wygrał w audiotele, to by nie miał samochodu. Gdyby nie miał samochodu, to by nie przejechał swojego sąsiada. Zatem, gdyby przejechał swojego sąsiada, to by wygrał w audiotele.

Jeżeli nasypię do filiżanki kawy 3 łyżki cukru, to będzie słodka. Zatem, jeżeli nasypię tam 3 łyżki cukru i naleję oleju silnikowego, to będzie słodka.

Reakcja na problemy implikacji materialnej: inne logiki – zasadniczo 2 grupy:

(a) logiki nieklasycznej implikacji (zasadniczo nie kwestionują 3 ostatnich reguł)

(b) logiki okresów warunkowych

Ważniejsze propozycje w grupie (a)

- implikacja intuicjonistyczna
- implikacja ścisła
- implikacje relewantne
- implikacje w logikach wielowartościowych

Implikacja intuicjonistyczna

1. Implikacja w **INT** syntaktycznie charakteryzowana jest tak samo jak implikacja materialna (przez MP i DT) lub za pomocą warunku:

($\rightarrow$) $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ wtw $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$

Wniosek: reguły DN dla implikacji w **KRZ** są niezależne od reguł dla innych spójników tylko pozornie. Różnica obu implikacji widoczna jest dopiero w semantyce.

2. W **KRZ** są tezy czysto implikacyjne, które nie są tezami **INT**, np.

prawo Peirce'a: $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$

(uwaga: PP dołączone do **INT** daje **KRZ**!)

1	$(p \to q) \to p$	z
2	$\neg p$	zn
2.1	p	zd
2.2	$\bot$	(2, 2.1)
2.3	q	(2.2)
3	$p \to q$	(2.1 – 2.3, DI)
4	p	(1, 3, MP)
5	$\bot$	(2, 4)

Uwaga! niedopuszczalna w **INT** forma dowodu niewprost – zn w wierszu 2.

$1 : -((p \to q) \to p) \to p$
$1.1 : +(p \to q) \to p$
$1.1 : -p$

$1.1 : -p \to q$	$1.1 : +p$
$1.1.1 : +p$	$\bot$
$1.1.1 : -q$	
$1.1.1 : +(p \to q) \to p$	

$1.1.1 : -p \to q$	$1.1.1 : +p$
$1.1.1.1 : +p$	
$1.1.1.1 : -q$	

3. $\nvdash_{INT} (p \to q) \vee (q \to p)$ ale dołączone do **INT** daje logikę pośrednią (między **INT** a **KRZ**) Dummetta, charakteryzowaną przez klasę tych modeli **INT**, w których $\leq$ jest relacją spójną: $\forall x, y, x(x \leq y \wedge x \leq z \to y \leq z \vee z \leq y)$

$$
\begin{array}{c}
1 : -(p \to q) \vee (q \to p) \\
1 : -p \to q \\
1 : -q \to p \\
1.1 : +p \\
1.1 : -q \\
1.2 : +q \\
1.2 : -p \\
\begin{array}{ll}
/ & \backslash \\
1.1 \leq 1.2 & 1.2 \leq 1.1 \\
1.2 : +p & 1.1 : +q \\
\perp & \perp
\end{array}
\end{array}
$$

4. $\vdash_{INT} p \to (q \to p)$ – zatem implikacja intuicjonistyczna też za mocna

Implikacja ścisła

1. Wprowadzona przez Lewisa jako spójnik pierwotny, ale definiowalna na gruncie standardowych logik modalnych:

$\varphi \Rightarrow \psi \ := \ \Box(\varphi \rightarrow \psi)$

2. Charakterystyka semantyczna $\Rightarrow$ jest taka sama jak dla implikacji intuicjonistycznej ale jest to spójnik słabszy np. $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ nie jest tezą nawet w **S5**.

$$\begin{array}{l} 1 : -p \Rightarrow (q \Rightarrow p) \\ 1.1 : +p \\ 1.1 : -q \Rightarrow p \\ 1.1.1 : +q \\ 1.1.1 : -p \end{array}$$

3. $\Rightarrow$ generuje jednak inne problemy, tzw. paradoksy implikacji ścisłej:

$\Box p \Rightarrow (q \Rightarrow p), \ p \Rightarrow (q \Rightarrow q), \ p \wedge \neg p \Rightarrow q.$

Logiki relewantne

Historia:

1928 – logika relewantna Orłowa

1932 – Parry: implikacja analityczna

lata 50-te: Church, Ackermann – implikacja silna w ujęciu aksjomatycznym

lata 60-te: Anderson, Belnap – implikacja relewantna, spójnik *entailment*; systemy DN

lata 70-te: Routley, Meyer – semantyka relacyjna dla logik relewantnych

Wyznacznik tego nurtu – związek znaczeniowy poprzednika i następnika implikacji musi być oddany formalnie. Ale jak?

W logikach relewantnych jest to wyrażone przez występowanie wspólnych zmiennych. 3 znaczenia:

- wąskie: logika **R** i jej nadlogiki

- szersze: również **E** i jej nadlogiki (w obu minimalny wymóg relewancji – co najmniej jedna zmienna wspólna)

- szerokie: wszelkie systemy relewantne, np. implikacja analityczna Parry'ego (wszystkie zmienne następnika muszą być w poprzedniku.

E, EM, R, RM – cztery bazowe systemy implikacji relewantnej w ujęciu DN

System DN dla logik tego typu ma następujące cechy wyróżniające:

- dla zapewnienia warunku relewancji w dedukcji, każda formuła występuje z indeksem, który jest zbiorem numerów założeń tej formuły

- reguły inferencji i konstrukcji dowodu są zdefiniowane zarazem na formułach i indeksach

- każde założenie ma przydzielany indeks z nowym numerem i otwiera osobny poddowód

- przesłanki każdej reguły inferencji muszą występować w obrębie tego samego poddowodu

- specjalne reguły rejteracji określają możliwość przenoszenia formuł z dowodu nadrzędnego do poddowodu

Uwaga! dla logiki **R** i **RM** dwa ostatnie punkty można wyeliminować

Indeksy w schematach reguł zapisujemy przy pomocy zmiennych A, B, C, np. φ_A oznacza formułę φ z indeksem A. W praktyce uprościmy zapis: zamiast $p \rightarrow q_{\{1,3,4\}}$ napiszemy $p \rightarrow q : 1, 3, 4$.

Tezą jest formuła, której indeks jest zbiorem pustym.

Reguły dla implikacji:

(MP) $\varphi \rightarrow \psi_A,\ \varphi_B \vdash \psi_{A\cup B}$

(DT) jeżeli $\varphi_{\{i\}} \vdash \psi_A$, to $\vdash \varphi \rightarrow \psi_{A-\{i\}}$, pod warunkiem, że $i \in A$

Reguły rejteracji:

$(Reit_E)$ wolno przenieść implikację do poddowodu

$(Reit_R)$ wolno przenieść dowolną formułę do poddowodu

Reguły "mieszania":

(M_E) $\varphi \rightarrow \psi_A,\ \varphi \rightarrow \psi_B \vdash \varphi \rightarrow \psi_{A\cup B}$

(M_R) $\varphi_A,\ \varphi_B \vdash \varphi_{A\cup B}$

Różnica między **E** i **R**: (dowód prawa przestawiania i ograniczonego prawa przestawiania)

$\vdash_R (p \to (q \to r)) \to (q \to (p \to r))$ (ale $\nvdash_E$)

$\vdash_E (p \to ((q \to s) \to r)) \to ((q \to s) \to (p \to r))$

1	$p \to (q \to r) : 1$	z
1.1	$q : 2$	z
1.2	$p \to (q \to r) : 1$	$(1, Reit_E)$
1.1.1	$p : 3$	z
1.1.2	$p \to (q \to r) : 1$	$(1.2, Reit_E)$
1.1.3	$q \to r : 1, 3$	$(1.1.1, 1.1.2, MP)$
1.1.4	$q : 2$	$(1.1, Reit_R)$
1.1.5	$r : 1, 2, 3$	$(1.1.3, 1.1.4, MP)$
1.3	$p \to r : 1, 2$	$(1.1.1 - 1.1.5\ DT)$
2	$q \to (p \to r) : 1$	$(1.1 - 1.3\ DT)$
	$\vdash$	$(1 - 2\ DT)$

Różnica między **EM** i **RM** a **E** i **R**:

$\vdash_{RM} p \rightarrow (p \rightarrow p)$ (ale $\nvdash_{R}$ i $\nvdash_{EM}$)

$\vdash_{EM} (p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q))$ (ale $\nvdash_{E}$)

1	$p : 1$	z
1.1	$p : 2$	z
1.2	$p : 1$	$(1, Reit_R)$
1.3	$p : 1, 2$	$(1.1, 1.2, M_R)$
2	$p \rightarrow p : 1$	$(1.1 - 1.3\ DT)$
	$p \rightarrow (p \rightarrow p)$	$(1 - 2\ DT)$

Relacje między logikami:

E$\subset$**R**, **EM**$\subset$**RM**, **E**$\subset$**EM**, **R**$\subset$**RM**

Reguły dla $\neg$:

$(NN)\ \varphi_A \dashv\vdash \neg\neg\varphi_A$

$(MT)\ \varphi \rightarrow \psi_A,\ \neg\psi_B \vdash \neg\varphi_{A\cup B}$

$(Red)\ \varphi \rightarrow \neg\varphi_A \vdash \neg\varphi_A$

Uwaga! brak w DN dla logik relewantnych reguły dowodu niewprost; (Red) pełni funkcję ograniczonej formy takiego dowodu.

dowód prawa kontrapozycji

1	$p \rightarrow q : 1$	z
1.1	$\neg q : 2$	z
1.2	$p \rightarrow q : 1$	$(1, Reit_R)$
1.3	$\neg p : 1, 2$	$(1.1, 1.2, MT)$
2	$\neg q \rightarrow \neg p : 1$	$(1.1 - 1.3\ DT)$
	$(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$	$(1 - 2\ DT)$

Reguły dla $\wedge$:

$(\wedge E)$ $\varphi \wedge \psi_A \vdash \varphi_A,\ \varphi \wedge \psi_A \vdash \psi_A$

$(\wedge D)$ $\varphi_A,\ \psi_A \vdash \varphi \wedge \psi_A$

Uwaga! ograniczenie na indeksach w $(\wedge D)$ pełni istotną funkcję; reguła z różnymi indeksami w przesłankach pozwala na dowód $p \rightarrow (q \rightarrow q)$

1	$p : 1$	z
1.1	$q : 2$	z
1.2	$p : 1$	$(1, Reit_R)$
1.3	$p \wedge q : 1, 2$	$(1.1, 1.2, \wedge D^*)$
1.4	$q : 1, 2$	$(1.3, \wedge E)$
2	$q \rightarrow q : 1$	$(1.1 - 1.4\ DT)$
	$p \rightarrow (q \rightarrow q)$	$(1 - 2\ DT)$

Reguły dla $\vee$:

$(\vee D)$ $\varphi_A \vdash \varphi \vee \psi_A,\ \psi_A \vdash \varphi \vee \psi_A$

$(\vee E)$ $\varphi \vee \psi_A,\ \varphi \rightarrow \chi_B,\ \psi \rightarrow \chi_B \vdash \chi_{A \cup B}$

$(\wedge\vee)$ $\varphi \wedge (\psi \vee \chi)_A \vdash (\varphi \wedge \psi) \vee \chi_A$

Dlaczego brak standardowej reguły $(\vee E)$ (czyli MTP)? – bo pozwala na dowód $p \wedge \neg p \rightarrow q$.

1	$p \wedge \neg p : 1$	z
2	$p : 1$	$(1, \wedge E)$
3	$\neg p : 1$	$(1, \wedge E)$
4	$p \vee q : 1$	$(2, \vee D)$
5	$q : 1$	$(3, 4, MTP)$
	$p \wedge \neg p \rightarrow q$	$(1-5, DT)$

Problem co odrzucić (MTP) czy $\vee E$? Wybór relewantystów dyskusyjny.

Krótka dygresja o semantyce relacyjnej

Logiki relewantne można charakteryzować z pomocą modeli relacyjnych z ternarną relacją osiągalności $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{W}^3$. Warunek spełnialności dla implikacji wygląda następująco:

$\mathfrak{M}, x \models \varphi \to \psi$ wtw jeżeli $\mathfrak{M}, y \models \varphi$, to $\mathfrak{M}, z \models \psi$ dla dowolnych $y, z \in \mathcal{W}$, takich, że $\mathcal{R}xyz$

Aby otrzymać klasę modeli charakteryzujących **E** trzeba na $\mathcal{R}$ nałożyć szereg dodatkowych warunków, gdyż w klasie wszystkich modeli nawet $p \to p$ jest falsyfikowalne.

Logiki okresów warunkowych

Inna motywacja niż w przypadku logik relewantnych – formalizacja spójnika okresów warunkowych w języku naturalnym. Stąd w logikach OW nie zastępuje się implikacji materialnej nowym spójnikiem $>$, lecz dodaje się go do standardowego języka **KRZ**.

Spójnik $>$ jest bardzo słaby; nie spełnia nawet takich reguł jak:

- $\varphi \to \psi \vdash \varphi \wedge \chi \to \psi$ (OP)

- $\varphi \to \psi \vdash \neg\psi \to \neg\varphi$ (TR)

- $\varphi \to \psi, \psi \to \chi \vdash \varphi \to \chi$ (SH)

Logiki OW uzyskujemy jako wzmocnienia **KRZ** z użyciem m.in:

(RCEA) $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ / $\vdash \varphi > \chi \leftrightarrow \psi > \chi$

(RCEC) $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ / $\vdash \chi > \varphi \leftrightarrow \chi > \psi$

(CM) $\vdash \varphi > \psi \wedge \chi \rightarrow (\varphi > \psi) \wedge (\varphi > \chi)$

(CR) $\vdash (\varphi > \psi) \wedge (\varphi > \chi) \rightarrow \varphi > \psi \wedge \chi$

(RCK) $\vdash \varphi_1 \wedge \ldots\ldots \wedge \varphi_n \rightarrow \psi$ /
$\vdash (\chi > \varphi_1) \wedge \ldots\ldots \wedge (\chi > \varphi_n) \rightarrow \chi > \psi$, n$\geq$0

Logika domknięta na (RCEA) i (RCEC) jest logiką *klasyczną*, jeżeli dodatkowo zawiera (CM) to jest *monotoniczna*, a jeżeli zawiera też (CR), to jest *regularna*. Logika klasyczna domknięta na (RCK) to logika normalna. Najsłabsza logika klasyczna to **CE**, monotoniczna to **CM**, regularna to **CR** a normalna to **CK**.

Semantyka dla logik normalnych

Przez standardowy model warunkowy rozumiemy strukturę $\mathfrak{M} = \langle \mathcal{W}, f, V \rangle$ gdzie $\mathcal{W}$ to zbiór światów, V to waluacja zmiennych, a f to funkcja selekcji klasy światów (sądu), która dowolnemu światu i sądowi przyporządkowuje jakiś sąd. Formalnie $f : \mathcal{W} \times \mathcal{P}(\mathcal{W}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{W})$. Warunki spełniania dla dowolnego zdania są takie same jak w dowolnych rozważanych poprzednio modelach, dla okresów warunkowych stosowna klauzula wygląda tak:

$\mathfrak{M}, w \models \varphi > \psi$ wtw, $f(w, \|\varphi\|) \subseteq \|\psi\|$

Tautologiczność i wynikanie w takich modelach definiujemy tak jak poprzednio.

CK można teraz scharakteryzować semantycznie jako logikę zdeterminowaną przez klasę wszystkich standardowych modeli warunkowych. Najbardziej znane logiki OW są nadlogikami **CK**.

Ważniejsze logiki normalne OW

1.**CKD** (dependable) to najmniejsza logika zawierająca **CK** + (ID) $\varphi > \varphi$

Logika ta jest semantycznie scharakteryzowana przez klasę modeli spełniających warunek:

(id) $f(w, X) \subseteq X$

2.**CKWM** (weakly material) to najmniejsza logika zawierająca **CK** + (MP) $\varphi > \psi \to (\varphi \to \psi)$

Logika ta jest semantycznie scharakteryzowana przez klasę modeli spełniających warunek:

(mp) jeżeli $w \in X$, to $w \in f(w, X)$

System DN

Aby uzyskać formalizację **CK** do systemu DN dla **KRZ** dodajemy 3 reguły:

$(> D)$ jeżeli w *poddowodzie warunkowym* zapoczątkowanym założeniem warunkowym (zw) φ wydedukowaliśmy ψ, to można zamknąć ten poddowód i w dowodzie nadrzędnym dopisać $\varphi > \psi$

$(Reit_>)$ do poddowodu warunkowego zapoczątkowanego założeniem warunkowym φ, można przenieść ψ tylko jeżeli jest tezą lub jeżeli $\varphi > \psi$ występuje w dowodzie nadrzędnym

$(RL_>)$ z $\varphi > \psi$ można wydedukować $\chi > \psi$ pod warunkiem, że $\varphi \leftrightarrow \chi$ jest tezą

Dla otrzymania **CKD** należy dodać aksjomat $\varphi > \varphi$, a dla **CKWM** regułę (MP) dla $>$.

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE – HISTORIA

Arystoteles – problem wartości zdań przygodnych o przyszłości; związek z problemem indeterminizmu (czy zasada dwuwartościowości jest wyrazem determinizmu?)

lata 20-te – Łukasiewicz, Post: pierwsze systemy trójwartościowe i skończenie wartościowe

lata 30-te – budowanie probabilistycznych logik wielowartościowych – Zawirski, Reichenbach

1938 – niezależne konstrukcje Kleene'ego i logiki nonsensu Bochvara

lata 50-te, 60-te – Schroter, Rousseau – rozwój teorii dowodu dla logik wielowartościowych

lata 60-te, 70-te – superwaluacje van Fraassena; logiki częściowe

1965 – teoria zbiorów rozmytych Zadeha; 1975 – logika rozmyta

1977 – 4-wartościowa logik Belnapa dla AI

lata 90-te – Hahnle, Avron – systemy dedukcyjne używające zbiorów wartości jako etykiet

LOGIKI WIELOWARTOŚCIOWE – MOTYWY

Różne motywacje dla odejścia od zasady dwuwartościowości i dla wprowadzenia dodatkowych wartości logicznych (filozoficzne, matematyczne, jezykowe, praktyczne). Motywy filozoficzne można pogrupować wg. 3 sposobów postrzegania statusu dodatkowych wartości:

- Modalności

- Luki

- Zlepki

A. Modalności

Różne aspekty związków wielowartościowości i modalności:

1. wartości logiczne jako modalności

2. zdania ani prawdziwe ani fałszywe jako zdania modalne

3. definiowanie zwrotów modalnych w logikach wielowartościowych

Ad A.1. i A.2.

Łukasiewicz nazywa trzecią wartość logiczną możliwością a zdania, które ją posiadają zdaniami możliwymi. Są to zdania przygodne o przyszłości (por. dalej punkt B.1.).

Reichenbach uważa, ze kategorie modalne (możliwość, konieczność, niemożliwość) prowadzą do logiki 3-wartościowej poszerzonej następnie do 5-wartościowej przez dodanie 1 i 0.

Prior – logika 4-wartościowa kwalifikowanej prawdy i fałszu (koniecznie i niekoniecznie prawdziwe itp.).

Ad. A.3.

Propozycje Łukasiewicza zdefiniowania funktorów modalnych na bazie logiki 3-wartościowej (potem 4 wartościowej).

Krytyka podejścia "modalnego"

Wydaje sie, ze takie próby w istocie nie wychodzą poza paradygmat 2-wartościowości z 1 i 0 jako pierwotnymi dla człowieka pojęciami. Nie wydaje się aby zdania koniecznie prawdziwe (analityczne, syntetyczne a priori) były w inny sposób prawdziwe niż zdania prawdziwe a posteriori (i tak samo zdania fałszywe). Nawet jeżeli odrzucimy argumenty Quine'a, które generalnie znoszą te rozróżnienia to i tak podstawowe argumenty za tym, że to różne rodzaje prawdy (lub fałszu) padają np.:

– Reichenbach myli się uważając kategorie modalne za pierwotne; ich pojawienie się wymagało odpowiedniego rozwoju wiedzy

– można zakwestionować, że ich wartość logiczna jest ustalana w inny sposób; wydaje się że dla zdań analitycznych podłożem też jest doświadczenie tylko nie w perspektywie jednostkowej ale filogenetycznej, jako podstawa ustalenia kategorii pojęciowych jezyka

– nawet jeżeli uznamy, że inny jest sposób ustalania ich prawdziwości, to i tak nie znaczy, że to inne rodzaje prawdy

– argument, że zdania analityczne i syntetyczne a priori sa niezmienne w przeciwieństwie do zdań aposteriorycznych też chybiony, bo nasz aparat pojęciowy też się zmienia, np.

"Atom jest niepodzielny" jest fałszywe, choć kiedyś było zdaniem analitycznie prawdziwym

"Słońce krąży wokół Ziemi" kiedyś uznawano za syntetyczne a priori

Również próba budowania przez Łukasiewicza logiki modalnej na logice 3-wartościowej lub 4-wartościowej była chybiona, gdyż prowadziła do paradoksalnych tez i reguł. Dugundji wykazał, że standardowe logiki modalne wymagają użycia matryc nieskończonych.

Ale!

– sukces techniczny; matryce w dowodach niezależności aksjomatów

– współcześnie budowa wielowartościowych logik modalnych np. Fitting

B. Luki

1. zdania przygodne o przyszłości (względy metafizyczne)

2. zdania, których wartości logicznej aktualnie nie znamy (względy epistemiczne)

3. zdania eliptyczne

4. zdania z pustymi nazwami

5. zdania literackie

6. nonsensy

7. twierdzenia mechaniki kwantowej

Ad B.1. (zdania przygodne o przyszłości – futura contingentia)

Arystoteles, Kotarbiński, Łukasiewicz przedstawiają argument, że zasada 2-wartościowości implikuje determinizm (twardy). Więc: albo uznajemy tę zasadę i determinizm, albo odrzucając ten ostatni musimy odrzucić też 2-wartościowość.

Uwaga! Argument Łukasiewicza jest niepoprawny (modalny paralogizm), ale mimo tego jest to ważny powód do wprowadzenia 3 wartości logicznej (utożsamianej z możliwością).

Ad B.2. (zdania których wartości logicznej aktualnie nie znamy)

Chodzi tu o dowolne zdania, co do których brak nam aktualnie wiedzy czy są prawdziwe czy nie, choć może się to zmienić. W grę wchodzą zdania, których wartości logicznej nie znamy przez przypadek albo, których wartości możemy nigdy nie ustalić ze względów zasadniczych, np.

– zdania o przeszłości (wiedza historyczna) – z punktu widzenia logiki klasycznej nie ma to znaczenia, ale z punktu widzenia analizy praktycznego wnioskowania w oparciu o niepełne dane ma to znaczenie zasadnicze

– problemy matematyczne nierozstrzygalne lub nawet rozstrzygalne teoretycznie ale nie praktycznie (nontractable)

Proponowane ważniejsze rozwiazania z tej grupy:

– Kleene (funkcje częściowe)

– van Fraassen; superwaluacje

– logiki częściowe

Uwaga! Do tej grupy można zaliczyć też **INT** i jego motywy odrzucenia prawa wyłączonego środka.

Ad B.3. (zdania eliptyczne)

Albo w nich brak pewnych elementów (np. relatywizacji, kwantyfikacji) albo są pozornie kompletne lecz zawierają wyrażenia okazjonalne. Zdania tego typu można uznać za pozbawione wartości logicznej, ale możliwe jest też przyjęcie relatywizmu co umieszcza je w grupie C.

Ad B.4. (zdania z pustymi nazwami)

Do odrzucenia zasady 2-wartościowości prowadzi uznawanie zasady kompozycyjności znaczenia Fregego, głoszącej, że denotacja zdania jest funkcją denotacji jego składników. Zatem brak denotacji jakiegoś składnika zdania powoduje brak jego wartości logicznej – w szczególności problem zdań z nazwami pustymi.

Strawson, Geach: aby określić wartość logiczną zdania z nazwą muszą być spełnione 2 kryteria:

- desygnat podmiotu istnieje
- desygnat ma (nie ma) odpowiednią cechę z orzecznika

Ogólniej: potrzebna logika presupozycji. Np. Smiley (także Woodruff) proponuje matryce Bochvara dla formalizacji logiki Fregego.

Obrona 2-wartościowości:

1. Russell – rozwiazanie Arystotelesowskie ale zmodyfikowane. U Arystotelesa mamy kryterium formalne: zdanie twierdzące jest 0 a przeczące jest 1, co prowadzi do paradoksalnego wniosku, ze np. "Sokrates jest zdrowy"=0, a "Sokrates nie jest chory"=1. Poprawka Russella to uwzględnienie zasięgu negacji; zdanie drugie interpretujemy wtedy: Fałszem jest, że istnieje Sokrates i że jest chory.

2. Grodziński – wszystkie takie zdania są 0. Uwaga! – pada zasada, że zdania sprzeczne nie mogą być jednocześnie fałszywe, choć zostaje, że nie mogą być równocześnie prawdziwe. Jest to mocna interpretacja takich zdań (por. Kotarbiński) – w grę wchodzi też słaba interpretacja, przy której prawdę przypiszemy każdemu zdaniu, w którym nieistniejącemu obiektowi przypiszemy cechy definicyjne lub z nich wynikające, np. "Cyklop ma 1 oko"=1.

Ad. B.5. (zdania literackie)

1. Świat przedstawiony

Problem konkretyzacji postaci literackich, które nie mają kompletnego opisu np.

– "Odyseusz ma bliznę na udzie"=1

– "Odyseusz jest wyższy od Diomedesa"=0

– "Odyseusz ma pieprzyk na lewym pośladku"=?

Oczywiście takie rozróżnienia wartości logicznych są możliwe tylko przy odrzuceniu wyżej podanych rozwiązań dla zdań z nazwami pustymi – ewentualnie przy przyjęciu zmodyfikowanej teorii słabej interpretacji (zdanie=1 jeśli jest zgodne z opisem świata przedstawionego). Można jednak użyć przykładów literackich z nazwami niepustymi jeśli chcemy się uniezależnić od poprzednich rozważań.

2. Językowe składniki dzieła

Ingarden – quasi-sady. Zdania w literackich utworach nie mają podmiotowej intencji sądzenia, czyli asertywności, więc nie ma sensu oceniać ich pod względem ich logicznej wartości

(uwaga! tu mówi się o sądach – składnikach tekstu, a nie o zdaniach zewnętrznych dotyczących świata przedstawionego jak było wyżej).

Strawson jeszcze bardziej radykalna teoria – nie tylko zdania literackie nie mają wartości logicznej, prawdziwe mogą być tylko twierdzenia (intencja asercji) a nie zdania jako takie (np. niemożliwe jest prawdziwe kłamstwo!).

Ad B.6. (nonsensy)

Rozumienie waskie: mieszanie kategorii syntaktycznych lub semantycznych ("Pies liczyć albo", "liczba 3 jest różowa" – błędy kategorialne).

Rozumienie szerokie: Hallden (oceny moralne), Aqvist (rozkazy), Goddard, Routley (wszystko co ani prawdziwe ani fałszywe) – pokłosie neopozytywizmu z jego ostrymi kryteriami sensu=weryfikowalności.

System Bochvara jako techniczna propozycja.

Ad B.7. (twierdzenia mechaniki kwantowej)

Reichenbach (1944, również Putnam) – projekt logiki wielowartościowej aby uniknąć tzw. anomalii przyczynowych, czyli zdań o mikroobiektach, które są sprzeczne z zasadami mechaniki klasycznej, a wyprowadzalne z pomocą logiki klasycznej.

Przykład: Nie można zarazem zmierzyć położenia i momentu pędu cząstki elementarnej, chociaż można zmierzyć każde z osobna.

Wg. Bohra i Heisenberga takie zdania są bezsensowne, wg. Reichenbacha są sensowne ale mają nieokreśloną wartość logiczną.

C. Zlepki

1. zdania z wyrażeniami nieostrymi
2. zdania mówiące o zmianie stanu rzeczy
3. twierdzenia systemów dialektycznych
4. zdania o obiektach sprzecznych
5. sprzeczne prawa
6. paradoksy samozwrotności

Ad. C.1. (zdania z wyrażeniami nieostrymi)

Nie chodzi o dowolne zdania ale o zdania z przypadkami granicznymi, które zarazem mogą być odbierane jako prawdziwe bądź fałszywe przez różnych użytkowników. Może to prowadzić do relatywizmu lub do akceptacji istnienia zdań, które są zarazem prawdziwe i fałszywe.

Ad. C.3. i C.4. (twierdzenia systemów dialektycznych o zdania o obiektach sprzecznych)

Tradycja dialektyczna (Heraklit – Hegel – Marx) stwierdzająca istnienie sprzeczności w rzeczywistości prowadzi do uznania odpowiadających im zdań jako zarazem prawdziwych i fałszywych. Tradycja Meinongowska uznająca istnienie obiektów sprzecznych zradykalizowana u Łukasiewicza (wątpliwe jest istnienie obiektów niesprzecznych).

Ad. C.5. (sprzeczne prawa)

Nowe ustawy mogą być sprzeczne z innymi prawami w ramach tego samego systemu. Akceptacja sprzeczności prawnych wymaga przypisania im obu wartości logicznych.

Ad. C.6. (paradoksy samozwrotnosci)

Przyjęcie, że wnioski z rozumowań paradoksalnych są zarazem prawdziwe i fałszywe jest uznawane za możliwy sposób ich rozwiązania.

Generalnie są to różne argumenty na rzecz dialetheizmu, stanowiska głoszącego, że są prawdziwe zdania sprzeczne, rozwiniętego w latach 90-tych przez G. Priesta.

Niezależny argument zarówno za wartościami-lukami jak i zlepkami pochodzi z badań nad AI (Belnap 1977). Dotyczy gromadzenia i przetwarzania informacji w systemach eksperckich. Dowolne zdanie może znaleźć się w bazie danych jako informacja o nieustalonej wartości (luka) lub jako zdanie kwalifikowane zarazem jako 1 i 0 (zlepek), gdyż pochodzące z różnych źródeł. Zatem potrzebna jest logika do przetwarzania wszelkich typów danych.

Trójwartościowa logika Łukasiewicza Ł$_3$

Przyjmujemy standardowy język zdaniowy z $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$. Wartościowanie V to funkcja ze zmiennych zdaniowych w zbiór $\{1, 0, 1/2\}$. V poszerzamy na dowolne formuły według poniższych definicji spójników w **Ł**$_3$

$\wedge$	1	1/2	0	$\vee$	1	1/2	0
1	1	1/2	0	1	1	1	1
1/2	1/2	1/2	0	1/2	1	1/2	1/2
0	0	0	0	0	1	1/2	0

$\rightarrow$	1	1/2	0	φ	$\neg\varphi$
1	1	1/2	0	1	0
1/2	1	1	1/2	1/2	1/2
0	1	1	1	0	1

φ jest tautologią **Ł**$_3$ ($\models_{L_3} \varphi$) wtw $V(\varphi) = 1$ dla dowolnego V.

Przykładowo:

- $\not\models_{L_3} p \vee \neg p$, $\not\models_{L_3} \neg(p \wedge \neg p)$

- $\models_{L_3} (p \wedge q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$, ale $\not\models_{L_3} (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \wedge q \rightarrow r)$

- $\models_{L_3} (p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$, ale $\not\models_{L_3} (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$

- $\models_{L_3} p \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$ ale $\not\models_{L_3} p \wedge \neg p \rightarrow q$

Uwaga: $p \leftrightarrow \neg p$ nie jest kontrtautologią, co umożliwia rozwiązanie paradoksu Russella!

Modalności w Ł_3

Jednym z motywów wprowadzenia wielowartościowości przez Łukasiewicza było przekonanie o możliwości rekonstrukcji w takich rachunkach Arystotelesowskiej logiki modalnej. W $\textbf{Ł}_3$ modalności definiuje się następująco (I oznacza przygodność):

φ	$\Box\varphi$	$\Diamond\varphi$	$I\varphi$
1	1	1	0
1/2	0	1	1
0	0	0	0

Użycie I pozwala na formalne wyrażenie 3-wartościowości $\textbf{Ł}_3$; tautologiami są bowiem następujące warianty prawa wyłączonego środka i niesprzeczności:

$$p \vee \neg p \vee Ip \quad \neg(p \wedge \neg p \wedge \neg Ip)$$

Trójwartościowa logika Kleene'go $\mathbf{K}_3$

Język i wartościowania oraz definicje $\neg, \wedge, \vee$ jak w $\mathbf{Ł}_3$, natomiast implikacja ma następującą charakterystykę:

$\rightarrow$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1	1/2	1/2
0	1	1	1

Uwaga! $\mathbf{K}_3$ jest logiką z pustym zbiorem tautologii!

Relację wynikania definiujemy następująco:

$\Gamma \models_{K_3} \varphi$ wtw dla dowolnego V, jeżeli $V(\Gamma) = 1$, to $V(\varphi) = 1$

Trójwartościowa logika Bochvara B_3

Trzecia wartość oznacza brak sensu.

$\wedge$	1	1/2	0	$\vee$	1	1/2	0
1	1	1/2	0	1	1	1/2	1
1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2
0	0	1/2	0	0	1	1/2	0

$\rightarrow$	1	1/2	0	φ	$\neg\varphi$
1	1	1/2	0	1	0
1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2
0	1	1/2	1	0	1

Logika B_3 ma również pusty zbiór tautologii. Dla relacji wynikania zachodzi następujące twierdzenie o relewancji:

Dla dowolnego niesprzecznego Γ:
$\Gamma \models_{B_3} \varphi$ wtw $\Gamma \models_{KRZ} \varphi$ i $ZZ(\varphi) \subseteq ZZ(\Gamma)$

Etykietowane diagramy Betha

Przyjmijmy cztery typy etykiet przed formułami odpowiadające wybranym zbiorom wartości logicznych:

$+$ oznacza $\{1\}$ $\quad$ $(+)$ oznacza $\{1, 1/2\}$

$-$ oznacza $\{0\}$ $\quad$ $(-)$ oznacza $\{0, 1/2\}$

α	α_1	α_2	β	β_1	β_2
$+\varphi \wedge \psi$	$+\varphi$	$+\psi$	$-\varphi \wedge \psi$	$-\varphi$	$-\psi$
$-\varphi \vee \psi$	$-\varphi$	$-\psi$	$+\varphi \vee \psi$	$+\varphi$	$+\psi$
$-\varphi \to \psi$	$+\varphi$	$-\psi$	$+\varphi \to \psi$	$-\varphi$	$+\psi$
$(+)\varphi \wedge \psi$	$(+)\varphi$	$(+)\psi$	$(-)\varphi \wedge \psi$	$(-)\varphi$	$(-)\psi$
$(-)\varphi \vee \psi$	$(-)\varphi$	$(-)\psi$	$(+)\varphi \vee \psi$	$(+)\varphi$	$(+)\psi$
$(-)\varphi \to \psi$	$(+)\varphi$	$(-)\psi$	$(+)\varphi \to \psi$	$(-)\varphi$	$(+)\psi$

Intuicyjnie $+\varphi$ oznacza, że φ jest prawdziwe, $-\varphi$, że φ jest fałszywe, $(+)\varphi$ oznacza, że φ jest prawdziwe lub nieokreślone, a $(-)\varphi$, że φ jest fałszywe lub nieokreślone.

Reguły dla $\mathbf{K}_3$

$(\bot)$	$+\varphi,\ -\varphi\ /\ \bot$;	$+\varphi,\ (-)\varphi\ /\ \bot$;
	$(+)\varphi,\ -\varphi\ /\ \bot$	
$(\neg)$	$+\neg\varphi\ /\ -\varphi$;	$-\neg\varphi\ /\ +\varphi$;
	$(+)\neg\varphi\ /\ (-)\varphi$;	$(-)\neg\varphi\ /\ (+)\varphi$
(α)	$\alpha\ /\ \alpha_1,\ \alpha_2$;	$(\beta)\ \beta\ /\ \beta_1 \ \mid\ \beta_2$

Uwaga! $(+)\varphi$ i $(-)\varphi$ nie dają sprzeczności

$\psi_1,\ ...,\ \psi_n\ /\varphi$ ma dowód w $\mathbf{K}_3$-EDB wtw istnieje zamknięte drzewo dla $\{+\psi_1,\ ...,\ +\psi_n,\ (-)\varphi\}$ zbudowane z użyciem reguł wyżej podanych.

Adekwatność etykietowanych diagramów Betha

Twierdzenie (Mocna adekwatność):

$\Gamma \models \varphi\ wtw,\ \psi_1,\ ...,\ \psi_n\ /\varphi$ ma dowód w $\mathbf{K}_3$-EDB, gdzie $\{\psi_1, ..., \psi_n\} \subseteq \Gamma$

Przykłady

$\not\models_{K_3} (p \to q) \wedge \neg q \to \neg p$ ale $p \to q, \neg q \models_{K_3} \neg p$; $(p \to q) \wedge \neg q \models_{K_3} \neg p$; $p \to q \models_{K_3} \neg q \to \neg p$

$$
\begin{array}{c}
(-)(p \to q) \wedge \neg q \to \neg p \\
(+)(p \to q) \wedge \neg q \\
(-)\neg p \\
(+)p \to q \\
(+)\neg q \\
(+)p \\
(-)q \\
\swarrow \qquad \searrow \\
(-)p \qquad (+)q
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
+p \to q \\
+\neg q \\
(-)\neg p \\
-q \\
(+)p \\
\swarrow \qquad \searrow \\
-p \qquad +q \\
\bot \qquad\quad \bot
\end{array}
$$

Reguły dla Ł$_3$

Dla $\bot, \neg, \wedge, \vee$ jak w $\mathbf{K}_3$. Dla implikacji z $-$ i z $(+)$ tak samo, natomiast dla $+$ i $(-)$ mamy następujące reguły:

$(+\rightarrow)$ $+\varphi \rightarrow \psi$ / $(-)\varphi$, $(+)\psi$ $|$ $+\varphi$, $+\psi$ $|$ $-\varphi$, $-\psi$

$((-)\rightarrow)$ $(-)\varphi \rightarrow \psi$ / $+\varphi$, $(-)\psi$ $|$ $(+)\varphi$, $-\psi$

ψ_1, ..., ψ_n $/\varphi$ ma dowód w **Ł**$_3$-EDB wtw istnieje zamknięte drzewo dla $\{+\psi_1, ..., +\psi_n, (-)\varphi\}$ zbudowane z użyciem reguł wyżej podanych.

Adekwatność etykietowanych diagramów Betha

Twierdzenie (Mocna adekwatność):

$\Gamma \models \varphi$ *wtw*, ψ_1, ..., ψ_n $/\varphi$ ma dowód w **Ł**$_3$-EDB, gdzie $\{\psi_1, ..., \psi_n\} \subseteq \Gamma$

Przykłady

$\models_{L_3} p \to (\neg p \to q)$ ale $\not\models_{L_3} p \wedge \neg p \to q$

$$
\begin{array}{ccc}
 & (-)p \to (\neg p \to q) & \\
\swarrow & & \searrow \\
\begin{array}{l}
+p \\
(-)\ \neg p \to q
\end{array} & & \begin{array}{l}
(+)p \\
-\neg p \to q \\
+\neg p \\
-q \\
-p \\
\bot
\end{array}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
 & (-)\ \neg p \to q & \\
\swarrow & & \searrow \\
\begin{array}{l}
+\neg p \\
(-)q \\
-p \\
\bot
\end{array} & & \begin{array}{l}
(+)\neg p \\
-q \\
(-)p \\
\bot
\end{array}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
 & (-)p \wedge \neg p \to q & \\
\swarrow & & \searrow \\
\begin{array}{l}
+p \wedge \neg p \\
(-)q \\
+p \\
+\neg p \\
-p \\
\bot
\end{array} & & \begin{array}{l}
(+)p \wedge \neg p \\
-q \\
(+)p \\
(+)\neg p \\
(-)p
\end{array}
\end{array}
$$

Ogólne ujęcie logik wielowartościowych

Matryca to struktura postaci $\mathfrak{M} = \langle A, O, D \rangle$, gdzie:

A to niepusty zbiór wartości logicznych

O to niepusty zbiór operacji zdefiniowanych na A, które odpowiadają spójnikom

$D \subset A$ to niepusty zbiór wyróżnionych wartości logicznych (niekoniecznie $\{1\}$!)

Para $\mathcal{A} = \langle A, O \rangle$ z danej matrycy, zawierająca operacje odpowiadające każdemu spójnikowi danego języka to algebra podobna do tego języka. Dowolny homomorfizm $h : FOR \longrightarrow \mathcal{A}$ to interpretacja języka w tej matrycy. Zawartość matrycy $E(\mathfrak{M})$ definiujemy następująco:

$E(\mathfrak{M}) = \{\varphi : h(\varphi) \in D$, dla dowolnego homomorfizmu $h\}$

Jeżeli zawartość matrycy $\mathfrak{M}$ jest identyczna ze zbiorem tautologii logiki **L**, to mówimy, że matryca ta wyznacza logikę **L** (jest adekwatna).

Dla danej matrycy relacja konsekwencji matrycowej jest definiowana następująco:

$\Gamma \models_M \varphi$ wtw dla dowolnego homomorfizmu h: jeżeli $h(\Gamma) \subseteq D$, to $h(\varphi) \in D$

Przykładowo matryca dla $\mathbf{K}_3$ to $\mathfrak{M}^3_1$, gdzie $A = \{0, 1/2, 1\}$, $D = \{1\}$, a O zawiera jednoargumentową operację $\underline{\neg} : A \longrightarrow A$ i dwuargumentowe operacje $\odot : A \times A \longrightarrow A$, gdzie $\odot \in \{\underline{\wedge}, \underline{\vee}, \underline{\rightarrow}\}$. Operacje są zdefiniowane podanymi wyżej tabelkami. Matryca dla 3-wartościowej logiki Łukasiewicza różni się jedynie definicją operacji $\underline{\rightarrow}$.

Jeżeli przyjmiemy naturalny porządek na wartościach logicznych odpowiadający porządkowi liczb wymiernych, to operacje w matrycy dla **Ł**$_3$ można zdefiniować następująco:

$\underline{\neg} x = 1 - x$

$x \underline{\triangle} y = min(x, y)$

$x \underline{\vee} y = max(x, y)$

$x \underline{\rightarrow} y = min(1, 1 - x + y)$

Ma to znaczenie przy uogólnieniach na większą liczbę wartości logicznych, gdyż jedyne co ulega zmianie, to A. Np. dla dowolnej logiki n-wartościowej o skończonej liczbie wartości $A = \{0, 1/n - 1, 2/n - 1, ..., 1\}$.

Dygresja: parakonsystencja w logikach trój-wartościowych

1. Logika **LP** (logika paradoksu) Priesta wyznaczona przez matrycę $\mathfrak{M}_2^3$, gdzie $A = \{0, 1/2, 1\}$, $D = \{1, 1/2\}$, O zawiera operacje zdefiniowane identycznie jak w matrycy $\mathfrak{M}_1^3$ wyznaczającej $\mathbf{K}_3$.

W przeciwieństwie do rozważanych dotąd logik 1/2 interpretujemy tutaj jako zlepek (zarazem prawdziwe i fałszywe). Poszerzenie zbioru wartości wyróżnionych o 1/2 powoduje, że w przeciwieństwie do K_3 zbiór tautologii **LP** jest niepusty. Np. $\models_{LP} p \vee \neg p$.

Parakonsystencja w **LP** ma jedynie częściowy wyraz: $p \wedge \neg p \not\models_{LP} q$ (chociaż w $\mathbf{K}_3$ wynikanie zachodzi), ale $\models_{LP} p \wedge \neg p \to q$!

Podstawowa wada **LP** – nieintuicyjne własności $\to$, np. ani MP ani SH nie są poprawnymi regułami.

2. $\mathbf{RM}_3$ – logika wyznaczona przez matrycę $\mathfrak{M}_2^{3}{}'$, gdzie $A = \{0, 1/2, 1\}$, $D = \{1, 1/2\}$, O zawiera operacje zdefiniowane identycznie jak w matrycy $\mathfrak{M}_2^3$ z wyjątkiem definicji implikacji.

$\to$	1	1/2	0
1	1	0	0
1/2	1	1/2	0
0	1	1	1

Zmiana definicji implikacji pozwala ocalić jej podstawowe własności (zachodzi zarówno MP jak i SH oraz definiowalność $\to$ przez $\vee$ i $\neg$).

$\mathbf{RM}_3$ mocniej wyraża parakonsystencję, gdyż $p \wedge \neg p \to q$ nie jest tautologią tej logiki.

$\mathbf{RM}_3$ jest podlogiką relewantnej logiki **RM**.

3. Logika DaCosty $\mathbf{J}_3$ – wyznaczona przez matrycę $\mathfrak{M}_2^3$", gdzie $A = \{0, 1/2, 1\}$, $D = \{1, 1/2\}$, O zawiera operacje zdefiniowane identycznie jak w matrycy $\mathfrak{M}_2^3$ z wyjątkiem definicji implikacji.

$\rightarrow$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1	1/2	0
0	1	1	1

$\mathbf{J}_3$ to próba formalnego ujęcia intuicji Jaśkowskiego wyrażonych w jego projekcie logiki dyskusyjnej.

Dwa w jednym: 4-wartościowa logika Belnapa

Podstawowa intuicja: rozwinąć logikę, w której oprócz klasycznych wartości 1 i 0 mamy wartość odpowiadającą brakowi wartości (luka) i obu wartościom klasycznym łącznie (zlepek) Niech $\bot$ oznacza lukę a $\top$ oznacza zlepek. Wartości wyróżnione to 1 i $\top$. B_4 jest wyznaczona przez matrycę $\mathfrak{M}_2^4$, gdzie $A = \{0, \bot, \top, 1\}$, $D = \{1, \top\}$, O zawiera operacje zdefiniowane następująco:

$\wedge$	1	$\top$	$\bot$	0	$\vee$	1	$\top$	$\bot$	0
1	1	$\top$	$\bot$	0	1	1	1	1	1
$\top$	$\top$	$\top$	0	0	$\top$	1	$\top$	1	$\top$
$\bot$	$\bot$	0	$\bot$	0	$\bot$	1	1	$\bot$	$\bot$
0	0	0	0	0	0	1	$\top$	$\bot$	0

$\longrightarrow$	1	$\top$	$\bot$	0	φ	$\neg\varphi$
1	1	$\top$	$\bot$	0	1	0
$\top$	1	$\top$	$\bot$	0	$\top$	$\top$
$\bot$	1	1	1	1	$\bot$	$\bot$
0	1	1	1	1	0	1

Krata prawdy z porządkiem $\leq_t$ (kres górny to 1 a dolny to 0) i krata wiedzy z porządkiem $\leq_k$ (kres górny to $\top$, a dolny to $\bot$).

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & 1 \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ \top \arrow[dr, dash] & & \bot \arrow[dl, dash] \\ & 0 & \end{tikzcd}$$

$\Gamma \models_{B_4} \varphi$ wtw dla dowolnego homomorfizmu h: jeżeli $h(\Gamma) \subseteq D$, to $h(\varphi) \in D$

Twierdzenie: Niech φ, ψ nie zawierają $\rightarrow$, wtedy: $\varphi \models_{B_4} \psi$ wtw, $\varphi \rightarrow \psi$ jest tezą **FDE**$\subset$**E**

Etykietowane diagramy Betha

$+$ oznacza $\{1, \top\}$ $\quad$ $(+)$ oznacza $\{1, \bot\}$

$-$ oznacza $\{0, \top\}$ $\quad$ $(-)$ oznacza $\{0, \bot\}$

Intuicyjnie $+\varphi$ oznacza, że φ jest na pewno uznane, $(-)\varphi$, że φ jest na pewno odrzucone, $(+)\varphi$ oznacza, że φ może być prawdziwe a $-\varphi$, że φ może być fałszywe.

$\psi_1,\ ...,\ \psi_n\ /\varphi$ ma dowód w $\mathbf{B}_4$-EDB wtw istnieje zamknięte drzewo dla
$\{+\psi_1,\ ...,\ +\psi_n,\ (-)\varphi\}$ zbudowane z użyciem reguł dalej podanych.

Reguły dla $\mathbf{B}_4$

Dla $\neg, \wedge, \vee$ jak w $\mathbf{K}_3$. Dla implikacji z $-$ i z $(+)$ tak samo, natomiast dla $+$ i $(-)$ oraz dla $\perp$ mamy następujące reguły:

$(+)\ +\varphi \rightarrow \psi\ /\ (-)\varphi\ \mid\ +\psi$

$((-))\ (-)\varphi \rightarrow \psi\ /\ +\varphi,\ (-)\psi$

$(\perp)\ +\varphi,\ (-)\varphi\ /\ \perp; \quad (+)\varphi,\ -\varphi\ /\ \perp$

Uwaga! ani $(+)\varphi$ i $(-)\varphi$, ani $+\varphi$ i $-\varphi$ nie dają sprzeczności.

Adekwatność etykietowanych diagramów Betha

Twierdzenie (Mocna adekwatność):

$\Gamma \models \varphi$ *wtw*, $\psi_1, \ldots, \psi_n / \varphi$ ma dowód w $\mathbf{B}_4$-EDB, gdzie $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \subseteq \Gamma$

Przykłady

$\not\models_{B_4} (p \to q) \wedge \neg q \to \neg p$ ale $\models_{B_4} (p \to q) \wedge p \to q$

$$
\begin{array}{l}
(-)(p \to q) \wedge \neg q \to \neg p \\
+(p \to q) \wedge \neg q \\
(-)\neg p \\
+p \to q \\
+\neg q \\
(+)p \\
-q \\
\begin{array}{cc}
/ & \backslash \\
(-)p & +q
\end{array}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
(-)(p \to q) \wedge p \to q \\
+(p \to q) \wedge p \\
(-)q \\
+p \to q \\
+p \\
\begin{array}{cc}
/ & \backslash \\
(-)p & +q \\
\perp & \perp
\end{array}
\end{array}
$$